$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ell^{-a^2\omega^2 t} F(\omega)\cos\omega x \, d\omega \qquad (3.3.24)$$

จากสมการ (3.3.24) เราสามารถทำให้ผลเฉลยอยู่ในรูปที่สะดวกขึ้นโดยแทนค่า $F(\omega)$ ในรูปอินทิกรัล

$$F(\omega) = \int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi \, d\xi$$

ซึ่งจะได้

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \ell^{-a^2\omega^2 t} f(\xi)\cos\omega\xi\cos\omega x \, d\xi \, d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \ell^{-a^2\omega^2 t} f(\xi)\left\{\cos[\omega(x-\xi)]+\cos[\omega(x+\xi)]\right\} d\xi \, d\omega \qquad (3.3.25)$$

โดยสลับอันดับการอินทิเกรต และใช้ผลลัพธ์ที่ว่า (แบบฝึกหัด 3.3 ข้อ 1.1)

$$\int_0^\infty \ell^{-bx^2}\cos cx \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\,\ell^{-c^2/4b}, \quad b > 0 \qquad (3.3.26)$$

ทำให้สมการ (3.3.25) กลายเป็น

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\xi)\left\{\ell xp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] + \ell xp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right]\right\} d\xi \qquad (3.3.27)$$

ตัวอย่าง 3.3.5

พิจารณาปัญหาการนำความร้อนโดยปลายข้างหนึ่งของโลหะที่ยาวมากถูกทำให้ขึ้นกับแหล่งความร้อนที่แปรตามเวลา และสมมุติว่าการกระจายอุณหภูมิเริ่มต้นเป็นศูนย์ รูปแบบปัญหาคือ

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t \quad , \quad 0 < x < \infty \quad , \quad t > 0$$

B.C. $u(0,t) = f(t)$, $u(x,t) \to 0$, $u_x \to 0$ เมื่อ $x \to \infty$ (3.3.28)

I.C. $u(x,t) = 0$

ผลเฉลย

เราจะใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ซายน์ ซึ่งจะแปลงปัญหา (3.3.28) เป็น

$$U_t + a^2\omega^2 U = a^2\omega f(t) \quad , \quad t > 0 \qquad (3.3.29)$$

I.C. $U(\omega,0) = 0$, $0 < \omega < \infty$

โดย $U(\omega,t)$ เป็นผลการแปลงฟูริเยร์ซายน์ของ $u(x,t)$

ผลเฉลยของสมการเงื่อนไขเริ่มต้น (3.3.29) คือ

$$U(\omega,t) = a^2\omega \int_0^t f(\tau) e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\, d\tau \qquad (3.3.30)$$

จากความสัมพันธ์ (แบบฝึกหัด 3.3 ข้อ 1.2)

$$\hat{F}_s^{-1}[\omega\, e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}] = \frac{x}{\sqrt{8}\, a^3} (t-\tau)^{-3/2} e^{-x^2/4a^2(t-\tau)} \qquad (3.3.31)$$

ทำให้สามารถหาผลการแปลงผกผันของ (3.3.30) ได้เป็น

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \ell^{-x^2/4a^2(t-\tau)} d\tau \quad (3.3.32)$$

ข้อสังเกต

1. ปัญหาตามสมการ (3.3.19) นี้ สามารถแก้โดยใช้ผลการลาปลาซได้ (ดูหัวข้อ 5.4)
2. เงื่อนไขขอบเขตที่ขวามือไม่เป็นศูนย์ตามตัวอย่าง 3.3.5 นี้ เป็นแบบไม่เอกพันธ์ (nonhomogeneons)

ตัวอย่าง 3.3.6

หาผลเฉลยในสมการ (3.3.19) โดยกำหนดกรณีพิเศษว่า $f(t) = T_1$ (ค่าคงที่)

ผลเฉลย

ผลเฉลยคือสมการ 3.3.32)

โดยเปลี่ยนตัวแปร

$$z = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$$

ทำให้สมการ (3.3.32) กลายเป็น

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t-\frac{x^2}{4a^2z^2}\right) \ell^{-z^2} dz$$

สำหรับ $f(t) = T_1$

ดังนั้น

$$u(x,t) = T_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \ell^{-z^2} dz$$

แต่จากนิยามของฟังก์ชันค่าผิดพลาดเติมเต็ม หัวข้อ 1.5.2

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\pi}\int_{x}^{\infty} e^{-z^2}\,dz$$

ดังนั้น

$$u(x,t) = T_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

3.3.2 การสั่นทางกลศาสตร์ (Mechanical Vibrations)

สมการคลื่น

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} u_{tt} - q(x,y,z,t) \qquad (3.3.33)$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่มีหน่วยเป็นความเร็วเป็นการบรรยายการเคลื่อนที่ต่างๆ แบบคลื่น เช่น คลื่นเสียงที่เกิดจากการสั่นกระดิ่ง , คลื่นน้ำที่เกิดจากการทิ้งก้อนกรวดลงในสระน้ำ และการหักเห (การเคลื่อน) ของแผ่นบาง ๆ (membrane) (the deflections of membrane set in motion) เมื่อมีการเคลื่อนที่ ส่วน q เป็นแรงภายนอกที่กระทำกับระบบ เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับสมการจะประกอบด้วย สองเงื่อนไขเริ่มต้น กับอีกหนึ่งเงื่อนไขขอบเขต

สำหรับปัญหาเบื้องต้น เช่นการสั่นของเชือกที่ผูกไว้

ตัวอย่าง 3.3.7 สมการคลื่นบนเชือกที่ยาวอนันต์ (Wave Equation on an infinite Line)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของเชือกที่ยาวอนันต์ โดยมีการหักเห (การเคลื่อน) เริ่มต้น f(x) และความเร็วเริ่มต้น g(x) สมมุติว่า ไม่มีแรงภายนอกมากระทำกับเส้นเชือก ดังนั้นรูปแบบปัญหา คือ

$$u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt} \qquad (3.3.34)$$

B.C. $u(x,t) \to 0$ เมื่อ $|x| \to \infty$

I.C. $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $-\infty < x < \infty$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก x อยู่ในช่วงอนันต์ ดังนั้น เราจะใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ โดยให้

$$\hat{F}[u(x,t)] = U(\omega,t)$$

จะได้ปัญหาของผลการแปลงดังนี้

$$U_{tt} + c^2\omega^2 U = 0 \quad , \ t > 0 \qquad (3.3.36)$$

I.C. $U(\omega,0) = F(\omega)$, $U_t(\omega,0) = G(\omega)$

ซึ่ง $\hat{F}[f(x)] = F(\omega)$ และ $\hat{F}[g(x)] = G(\omega)$

เราสามารถหาผลเฉลยของ (3.3.36) ได้

$$U(\omega,t) = F(\omega)\cos c\omega t + \frac{G(\omega)}{c\omega}\sin c\omega t \qquad (3.3.37)$$

และผลการแปลงผกผัน ทำให้ได้

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ell^{i\omega x}\left[F(\omega)\cos c\omega t + \frac{G(\omega)}{c\omega}\sin c\omega t\right]d\omega \qquad (3.3.38)$$

แม้ว่าสมการ (3.3.38) จะเป็นผลเฉลยของสมการ 3.3.35) แต่ที่น่าสนใจคือเราจะเขียนซายน์และโคซายน์ในรูปชี้กำลัง โดยใช้สูตรของออยเลอร์

$$\cos x = \frac{1}{2}(\ell^{ix} + \ell^{-ix}) \ , \ \sin x = \frac{1}{2i}(\ell^{ix} + \ell^{-ix})$$

ดังนั้น จากสมการ (3.3.38) จะพบว่า

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\ell^{-i\omega(x-ct)} + \ell^{-i\omega(x+ct)}] F(\omega)d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\ell^{-i\omega(x-ct)} - \ell^{-i\omega(x+ct)}] \frac{G(\omega)}{ic\omega} d\omega$$

(3.3.39)

อินทิกรัลแรกในสมการ (3.3.39) อยู่ในรูป

$$\frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)]$$

ส่วนอินทิกรัลที่สอง สามารถเขียนได้ทำนองเดียวกัน ถ้าเราให้

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-i\omega z} G(\omega)\, d\omega \qquad (3.3.40)$$

อินทิเกรตจาก x-ct ถึง x+ct ดังนั้น

$$\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\ell^{-i\omega(x-ct)} - \ell^{-i\omega(x+ct)}] \frac{G(\omega)}{i\omega} d\omega$$

ซึ่งทำให้สมการ (3.3.39) เขียนได้เป็น

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct)+f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz \quad (3.3.41)$$

สมการ (3.3.41) นี้ รู้จักกันดีว่าเป็น ผลเฉลยดาลองแบต์(d'Alembert) ของสมการคลื่นบนเส้นเชือกที่ยาวอนันต์

3.3.3 ทฤษฎีบทศักย์ (Potential Theory)

สมการของลาปลาซหรือสมการศักย์ (potential equation) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีความสำคัญมากในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งรูปสมการในสอง และสามมิติ คือ

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (3.3.42)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \qquad (3.3.43)$$

ขณะที่รูปทั่วไปคือ

$$\nabla^2 u = 0 \qquad (3.3.44)$$

สมการของลาปลาซเกิดขึ้นในภาวะสม่ำเสมอ (steady-state) ของปัญหาการนำความร้อนในของแข็งเนื้อเดียวกัน(สมการความร้อน $\nabla^2 u = a^{-2} u_t$ จะกลายเป็นสมการของลาปลาซเมื่อ $u_t = 0$ นั่นคือเมื่อ u ไม่ขึ้นกับเวลา t) สมการนี้ยังพบในปัญหาเกี่ยวกับศักย์เนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (gravitational), ศักย์เนื่องจากสนามแม่เหล็ก(magnetic potential), ศักย์เนื่องจากสนามไฟฟ้า(electric potential)ในการไหลสม่ำเสมอของตัวนำของแข็ง , ฯลฯ

ซึ่งสูตรทางคณิตศาสตร์ของทุกปัญหาศักย์เหมือนกัน จะต่างกันก็แต่เพียงความหมายทางกายภาพ ด้วยเหตุนี้ทุกผลเฉลยของสมการศักย์จึงถูกรวมเข้าด้วยกันและเรียกว่าฟังก์ชันศักย์(potential functions) ในการศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเหล่านี้เกิดเป็นสาขาของคณิตศาสตร์ที่รู้จักกันว่า"ทฤษฎีบทศักย์"

เนื่องจากสมการนี้เกิดในภาวะสม่ำเสมอ ดังนั้นผลเฉลยที่ต่อเนื่องของสมการจึงมีความเรียบ(smoothness) ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่สำคัญมาก อย่างไรก็ตามผลเฉลยอาจจะไม่ต่อเนื่องก็ได้ เช่นฟังก์ชัน $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$สอดคล้องสมการ(3.3.42)แต่ไม่ต่อเนื่องที่จุด (0,0) ผลเฉลยที่ต่อเนื่องของสมการของลาปลาซที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสองต่อเนื่องในบางโดเมน R เรียกว่าฟังก์ชันฮาร์มอนิค(harmonic functions) ฉะนั้นปัญหาของสมการลาปลาซก็คือการหาฟังก์ชันฮาร์มอนิคในบริเวณ R โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้ เงื่อนไขขอบเขตที่พบโดยทั่ว ๆ ไปจะมีสองแบบ แบบแรกจะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 \quad \text{ใน } R \\ u &= f \quad \text{บน } C \end{aligned} \qquad (3.3.45)$$

เมื่อ R เป็นบริเวณในระนาบ และ C เป็นเส้นโค้งของขอบเขต ซึ่งเรียกว่า ปัญหาดีริคเลต (Dirichlet problem) หรือปัญหาค่าขอบเขตชนิดที่หนึ่ง (Boundary-value problem of the first kind)เป็นปัญหาที่กำหนดค่า u ที่แต่ละชุดของขอบเขต(ที่จำกัด) เช่นการหาการกระจายของอุณหภูมิอย่างสม่ำเสมอในบริเวณ R เมื่อกำหนดอุณหภูมิทุก ๆ ที่ของขอบเขต R ให้ อีกรูปแบบหนึ่งของปัญหาคือ

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{ใน } R$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{บน } C \qquad (3.3.46)$$

เมื่อ $\frac{\partial u}{\partial n}$ เป็นอนุพันธ์แนวตั้งฉาก (normal derivative) ของ u และเป็นบวกในทิศตั้งฉากออกจากขอบเขตของเส้นโค้ง C ($\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u . n$ โดย n เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศตั้งฉากออกจาก C)

ในปัญหาของอุณหภูมิที่อยู่ในสภาพสม่ำเสมอ $\frac{\partial u}{\partial n}$ บ่งถึงความร้อนที่ไหลข้ามขอบเขตของ R เรียกปัญหาตามสมการ (3.3.46) ว่าปัญหานอยมันน์ (Neumann problem) หรือปัญหาค่าขอบเขตชนิดที่สอง(Boundary-value problem of the second kind)ความจริงยังมีปัญหาอีกแบบหนึ่งคือปัญหาโรบิน(Robin's problem) ซึ่งเงื่อนไขขอบเขตเป็นการรวม u และ $\frac{\partial u}{\partial n}$ เข้าด้วยกันซึ่งจะไม่กล่าวถึงในที่นี้

<u>ตัวอย่าง</u> 3.3.8 ปัญหาศักย์ในครึ่งระนาบ

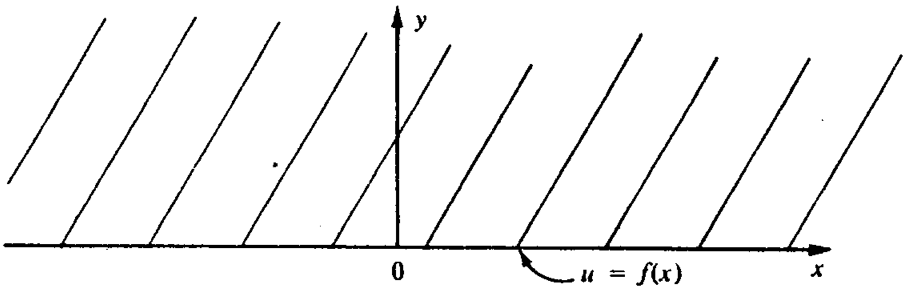
(Potential Problems in the Half-Plane)

พิจารณาปัญหาการหาฟังก์ชันศักย์ u ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 , \quad -\infty < x < \infty \quad , y > 0$$

$$\text{B.C.} \quad \begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \quad , -\infty < x < \infty \\ u(x,y) &\to 0 \quad \text{เมื่อ } \rho \to \infty \end{aligned} \qquad (3.3.47)$$

โดย $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$ (ดูรูป 3.3.1)



รูป 3.3.1 ปัญหาในครึ่งระนาบ

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจากเรากำหนด u บนขอบเขตที่จำกัด ดังนั้น (3.3.47) เป็นปัญหา - ดีริคเลต ปัญหาคือหาการกระจายอุณหภูมิในภาวะสม่ำเสมอในแผ่นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใหญ่ ผิวราบ มีฉนวนหุ้ม เมื่อกำหนดให้อุณหภูมิที่ขอบข้างหนึ่งของแผ่นเป็น f(x) และขอบที่เหลือ มีอุณหภูมิเข้าใกล้ศูนย์

เราจะสังเกตพบว่าค่าของ x มีช่วงเป็นอนันต์ ขณะที่ค่าของ y เป็นกึ่งอนันต์ ดังนั้น เราสามารถใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ชายน์ เทียบกับตัวแปร y หรืออาจจะให้ผลการแปลงฟูริเยร์เทียบกับตัวแปร x ซึ่งในกรณีนี้ แบบหลังจะทำให้แก้ปัญหาง่ายกว่า

เพราะฉะนั้นให้

$$\hat{F}[u(x,y)] = U(\omega,y) \qquad (3.3.48)$$

$$\hat{F}[f(x)] = F(\omega) \qquad (3.3.49)$$

ทำให้ได้ผลการแปลงเป็น

$$U_{yy} - \omega^2 U = 0 \quad , \quad y>0 \qquad (3.3.50)$$

B.C. $U(\omega,0) = F(\omega)$, $U(\omega,y) \to 0$ เมื่อ $y \to \infty$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้น คือ

$$U(\omega,y) = A(\omega)\ell^{-\omega y} + B(\omega)\ell^{\omega y}$$

โดย $A(\omega)$ และ $B(\omega)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ ω ซึ่งผลเฉลยสำหรับทุกค่า ω คือ

$$U(\omega,y) = F(\omega)\ell^{-|\omega|y} \qquad (3.3.51)$$

จาก

$$\hat{F}^{-1}[\ell^{-|\omega|y}] = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (3.3.52)$$

โดยใช้ผลการประสาน หาการแปลงผกผัน จะได้

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)d\tau}{(x-\tau)^2+y^2} \quad , \ y>0 \qquad (3.3.53)$$

ซึ่งเรียกว่า สูตรอินทิกรัลปัวส์ซง(Poisson integral formula)สำหรับครึ่งระนาบ

<u>ตัวอย่าง</u> 3.3.9

จงแก้ปัญหาในตัวอย่างที่แล้ว เมื่อกำหนด

$$f(x) = \begin{cases} T_o , & |x| < b \\ 0 , & |x| > b \end{cases}$$

<u>ผลเฉลย</u>

แทนค่า f ในสูตรอินทิกรัลปัวส์ซง จะได้

$$u(x,y) = y\frac{T_o}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{dt}{(t-x)^2+y^2}$$

$$= \frac{T_o}{\pi}[\tan^{-1}(\frac{x+b}{y}) - \tan^{-1}(\frac{x-b}{y})]$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\tan (A-B) = \frac{\tan a - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

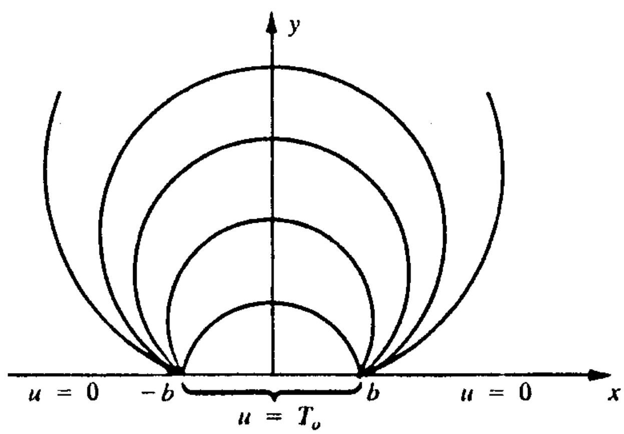
จะได้ผลเฉลยในรูป

$$u(x,y) = \frac{T_o}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2by}{x^2+y^2-b^2}\right)$$

เราเรียกเส้นโค้งในครึ่งระนาบบนสำหรับอุณหภูมิในภาวะสม่ำเสมอที่มีค่าคงที่ว่า isotherms สำหรับปัญหาของเรา เส้นโค้งเหล่านี้กำหนดโดยส่วนโค้งของวงกลม

$$x^2 + y^2 - cy = b^2 \qquad (c \text{ ค่าคงที่})$$

ซึ่งจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน y และจุดปลายอยู่บนแกน x ณ $x= \pm b$ (ดูรูป 3.3.2)



รูป 3.3.2 ชุดเส้นโค้ง isotherms

<u>ตัวอย่าง</u> 3.3.10

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 , \quad -\infty < x < \infty , \quad y > 0 \qquad (3.3.54)$$

$$BC = \begin{cases} u_y(x,0) = f(x) , & -\infty < x < \infty \\ u(x,y) \to 0 & \text{เมื่อ} \quad \rho \to \infty \end{cases}$$

ผลเฉลย

ปัญหานี้เป็นปัญหานอยมันน์ ซึ่งเราสามารถใช้ปัญหาดีริคเลตมาช่วยได้

ให้ $V(x,y) = u_y(x,y)$ ดังนั้น

$$V_{xx} + V_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(u_{xx}+u_{yy}) = 0 \qquad (3.3.55)$$

B.C. $\quad V(x,0) = u_y(x,0) = f(x)$

ดังนั้น $V(x,y)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาดีริคเลต ซึ่งกำหนดโดย (3.3.53)

$$V(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)d\tau}{(x-\tau)^2+y^2}, \quad y>0 \qquad (3.3.56)$$

โดยผลเฉลย $u(x,y)$ หาได้โดยการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตสมการ (3.3.56) จะได้

$$u(x,y) = \int V(x,y)\,dy$$

สลับอันดับการอินทิเกรต

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int \frac{ydy}{(x-\tau)^2+y^2}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\{\ln[(x-\tau)^2+y^2] + c\}d\tau \qquad (3.3.57)$$

เป็นผลเฉลยของปัญหานอยมันน์บนครึ่งระนาบ $y > 0$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงแสดงว่า

1.1

$$\int_0^\infty \ell^{-bx^2} \cos cx \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\, \ell^{-c^2/4b} \quad , \; b>0$$

(แนะนำ : กระจาย cos cx ในรูป Maclaurin series และใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันแกมม่า)

1.2 โดยหาอนุพันธ์ผลที่ได้ในข้อ 1.1 เทียบกับ c จะได้

$$\int_0^\infty x\ell^{-b^2x^2/2} \sin cx \, dx = \frac{c}{b^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \ell^{-c^2/2b^2} \quad , \; b>0$$

2. จงแก้ปัญหาสมการความร้อนตามสมการ(3.3.5) เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้

2.1 $$f(x) = \begin{cases} T_o & , \; |x| < c \\ 0 & , \; |x| > c \end{cases}$$

2.2 $$f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < 0 \\ T_o & , \; x > 0 \end{cases}$$

2.3 $$f(x) = \begin{cases} T_o & , \; 0<x<c \\ 0 & , \; x \text{ มีค่าอื่น} \end{cases}$$

2.4 $$f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < 0 \\ \ell^{-x} & , \; x > 0 \end{cases}$$

3. จงแก้ปัญหาสมการคลื่นตามสมการ (3.3.5) เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้

3.1 $f(x) = \ell^{-|x|}$, $g(x) = 0$, $-\infty < x < \infty$

3.2 $f(x) = 0$, $g(x) = \ell^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$

3.3 $f(x) = \begin{cases} F_o & , \; |x| < 1 \\ 0 & , \; |x| > 1 \end{cases}$ $g(x) = V_o \; , \; -\infty < x < \infty$

3.4 $f(x) = \begin{cases} F_o & , \; 0 < x < a \\ 0 & , \; x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} V_o & , \; -\infty<x<\infty \\ & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$

4. จงแก้ปัญหาตามสมการ(3.3.17)เมื่อกำหนดให้

4.1 $f(x) = T_o \; , \; -\infty < x < \infty$

4.2 $f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < 0 \\ 1 & , \; x > 0 \end{cases}$

4.3 $f(x) = \begin{cases} 1 & , \; x < 0 \\ 0 & , \; x > 0 \end{cases}$

4.4 $f(x) = \begin{cases} T_o & , \; 0 < x < 1 \\ 0 & , \; x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$

5. ใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ซายน์ แก้ปัญหาในสมการ(3.3.47)

6. ใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ซายน์แสดงว่า

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \; , \; 0 < x < \infty \; , \; y > 0$$

$$\text{B.C.} \quad \begin{cases} u(x,y) = 0 \; , \; u(x,0) = f(x) \\ u(x,y) \to 0 \; , \; \text{เมื่อ} \;\; x^2+y^2 \to \infty \end{cases}$$

มีผลเฉลยในรูป

6.1 $$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty f(t)\left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2} - \frac{1}{(t+x)^2+y^2}\right]dt$$

6.2 เมื่อ $f(x) = 1$ ผลเฉลยใน 6.1 คือ

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{x}{y}$$

7. ใช้ผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์แก้ปัญหา

$$u_{xx} + y_{yy} = 0 \ , \ 0 < x < \infty \ , \ y > 0$$

$$\text{B.C.} = \begin{cases} u(x,y) = 0 \ , \ u(x,0) = f(x) \\ u(x,y) \to 0 \ , \ \text{เมื่อ} \ \ x^2+y^2 \to \infty \end{cases}$$