บทที่ 3
การประยุกต์ที่เกี่ยวข้องกับผลการแปลงฟูริเยร์
(Applications Involving Fourier Transforms)

3.1 บทนำ

ผลการแปลงฟูริเยร์ สามารถนำไปใช้ช่วยในการแก้ปัญหาในวิชาการแขนงต่างๆ มากมาย แต่ในที่นี้จะศึกษาถึงวิธีที่จะนำไปใช้ในการประยุกต์บางอย่างเท่านั้น จุดมุ่งหมายของผลการแปลงก็คือทำให้ปัญหาที่มีอยู่นั้นง่ายขึ้น ในกรณีสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ภายหลังใช้ผลการแปลงแล้วปัญหาจะกลายเป็นสมการพีชคณิตธรรมดา สำหรับกรณีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เมื่อใช้ผลการแปลงแล้วจะทำให้ลดตัวแปรตามลงไปได้หนึ่งตัว ผลเฉลยของผลการแปลงของทั้งสองกรณีนี้ จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรที่เกิดจากการแปลงรวมกับตัวแปรตามที่เหลือ และเมื่อหาผลการแปลงผกผันของผลเฉลยนี้ก็จะได้ผลเฉลยของปัญหาเดิม

ผลการแปลงฟูริเยร์ (รูปชี้กำลัง) สามารถใช้แปลงอนุพันธ์ได้ทุกอันดับโดยไม่มีเงื่อนไขขอบเขตมาเกี่ยวข้อง ($\hat{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$) ดังนั้นจึงเหมาะที่จะแก้ปัญหา (สมการเชิงอนุพันธ์) ที่มีโดเมนเป็นอนันต์ ส่วนผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์ และซายน์ เหมาะกับปัญหาที่มีโดเมนเป็นกึ่งอนันต์และเป็นสมการอันดับคู่เท่านั้น เพราะว่าผลการแปลงโคซายน์ (หรือซายน์) ของอนุพันธ์อันดับคู่จะเกี่ยวข้องกับผลการแปลงโคซายน์ (หรือซายน์) ของฟังก์ชันเดิม

3.2 สมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดา (Ordinary Differential Equations)

พิจารณาสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = f(t) \qquad (3.2.1)$$

เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เป็นช่วง ๆ สำหรับ $-\infty < t < \infty$ โดยการคูณตลอดทั้งสมการด้วย $e^{-i\omega t}$ แล้วอินทิเกรตจาก $-\infty$ ถึง ∞

$$\int_{-\infty}^{\infty}[a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t)]e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

หรือ

$$\hat{F}\,[a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t)] = \hat{F}[f(t)]$$

จากทฤษฎีบท 2.3.2 และ 2.3.9 จะได้ว่า

$$[a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_0\,]\,Y(\omega) = F(\omega)$$

เมื่อ $\hat{F}\,[y(t)] = Y(\omega)$

นั่นคือ

$$Y(\omega) = G(i\omega)\,F(\omega) \qquad (3.2.2)$$

โดย

$$G(i\omega) = \frac{1}{a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \ldots a_0}$$

จากสมการ (3.2.2) โดยใช้ผลการแปลงผกผัน จะได้คำตอบของสมการ

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\,PV\int_{-\infty}^{\infty} G(i\omega)F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \qquad (3.2.3)$$

บางครั้งเป็นการสะดวกที่จะใช้ผลการประสาน เพื่อหาผลการแปลงผกผัน ดังนั้น จากทฤษฎีบท 2.4.1 จะได้

$$y(t) = g(t)*f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau \qquad (3.2.4)$$

โดย

$$g(t) = \hat{F}^{-1}[G(i\omega)]$$

ตัวอย่าง 3.2.1

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y'+2y = t^3$$

ผลเฉลย

โดยการใช้ผลการแปลงฟูริเยร์

ให้

$$\hat{F}[y(t)] = Y(\omega)$$

เนื่องจาก

$$\hat{F}[y'(t)] = i\omega\, Y(\omega)$$

ดังนั้น จากการใช้ผลการแปลงฟูริเยร์กับสมการในโจทย์ จะได้

$$(i\omega+2)\, Y(\omega) = \hat{F}[t^3]$$

นั่นคือ

$$Y(\omega) = \frac{1}{i\omega+2}\, \hat{F}[t^3]$$

$$= \hat{F}[\ell^{-2t}u(t)]\ \ \hat{F}[t^3]$$

โดยใช้ผลการประสาน เพื่อหาผลการแปลงผกผันจะได้

$$y(t) = \ell^{-2t}\, u(t) * t^3$$

$$= \int_0^{\infty} \ell^{-2\tau}(t-\tau)^3\, d\tau$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $x = t-\tau$

เพราะฉะนั้น

$$y(t) = -\int_t^{-\infty} \ell^{-2(t-x)}\, x^3\, dx$$

$$= \ell^{-2t} \int_{-\infty}^{t} \ell^{2x}\, x^3\, dx$$

จากสูตรอินทิเกรตในแคลคูลัส

$$\int x^m e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left\{x^m - \frac{m}{a}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^2}x^{m-2} - \dots\right\}$$

จะได้

$$\int x^3 e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\left\{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{4}x - \frac{6}{8}\right\}$$

$$= \frac{e^{2x}}{8}\left\{4x^3-6x^2+6x-3\right\}$$

ในที่สุด

$$y(t) = e^{-2t}\left[\frac{e^{2x}}{8}\ (4x^3 - 6x^2 + 6x - 3)\right]_{-\infty}^{t}$$

$$= \frac{1}{8}(4t^3 - 6t^2 + 6t - 3)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.2.2

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y'' + 3y' + 2y = e^t$$

<u>ผลเฉลย</u>

ให้

$$\hat{F}[y(t)] = Y(\omega)$$

เนื่องจาก

$$\hat{F}[y'(t)] = i\omega\, Y(\omega)$$

$$\hat{F}[y''(t)] = (i\omega)^2\, Y(\omega)$$

โดยใช้ผลการแปลงฟูริเยร์กับสมการในโจทย์ จะได้

$$((i\omega)^2 + 3(i\omega) + 2)\, Y(\omega) = \hat{F}[e^t]$$

นั่นคือ

$$Y(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2+3i\omega+2}\ \hat{F}[e^t]$$

$$= \left(\frac{1}{i\omega+1} - \frac{1}{i\omega+2}\right) \hat{F}[\ell^{t}]$$

$$= \hat{F}[(\ell^{-t} - \ell^{-2t})u(t)]\ \hat{F}[\ell^{t}]$$

ใช้ผลการประสาน เพื่อหาผลการแปลงผกผัน

$$y(t) = (\ell^{-t} - \ell^{-2t})u(t) * \ell^{t}$$

$$= \int_{0}^{\infty} (\ell^{-\tau} - \ell^{-2\tau})\ \ell^{t-\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{\ell^{t}}{6}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

เราต้องถือว่า $y(t) \to 0$, $y'(t) \to 0$ เมื่อ $|t| \to \infty$ เพื่อที่ y' และ y'' จะได้หาผลการแปลงฟูริเยร์ได้

<u>ตัวอย่าง 3.2.3</u>

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y''-y = -u(1-|t|) \quad , \quad -\infty < t < \infty$$

$$y(t) \to 0 \quad , \quad y'(t) \to 0 \quad \text{เมื่อ } |t| \to \infty$$

<u>ผลเฉลย</u>

ให้

$$\hat{F}[y(t)] = Y(\omega)$$

เนื่องจาก

$$\hat{F}[y''] = (i\omega)^{2}\, Y(\omega)$$

และ

$$\hat{F}[u(1-|t|)] = \int_{-1}^{1} \ell^{-i\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

ดังนั้น โดยการใช้ผลการแปลงฟูริเยร์กับสมการในโจทย์ จะได้

$$\{(i\omega)^2 - 1\} Y(\omega) = -\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

นั่นคือ

$$Y(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega(\omega^2+1)}$$

$$= \frac{1}{\omega^2+1} \quad \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

เนื่องจาก

$$\hat{F}[u(1-|t|)] = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

และ

$$\hat{F}[\frac{1}{\omega^2+1}] = \frac{1}{2}\, \ell^{-|t|}$$

เพราะฉะนั้น

$$Y(\omega) = \hat{F}[\frac{1}{2}\, \ell^{-|t|}] \,.\, \hat{F}[u(1-|t|)]$$

ใช้ผลการประสาน เพื่อหาผลการแปลงผกผัน

$$y(t) = \frac{1}{2}\, \ell^{-|t|} * u(1-|t|)$$

โดยฟังก์ชัน $\frac{1}{2}\, \ell^{-|\tau|}$ ที่ไม่เป็นศูนย์ อยู่บนช่วง $-\infty < \tau < \infty$ และฟังก์ชัน $u(1-|t-\tau|)$ ที่ไม่เป็นศูนย์ อยู่ในช่วง $t-1 \le \tau \le t+1$ ดังนั้นลิมิตล่างในการอินทิเกรตคือ $\max(-\infty, t-1) = t-1$ และลิมิตบนในการอินทิเกรตคือ $\min(\infty, t+1) = t+1$ ซึ่งค่า t แบ่งช่วงดังนี้ $-\infty < t < -1$, $-1 \le t \le 1$ และ $1 < t < \infty$

$$y(t) = \begin{cases} \int_{t-1}^{t+1} \ell^{-|\tau|}\, d\tau &, -\infty < t < -1 \\ \int_{t-1}^{t+1} \ell^{-|\tau|}\, d\tau &, -1 \le t \le 1 \\ \int_{t-1}^{t+1} \ell^{-|\tau|}\, d\tau &, 1 < t < \infty \end{cases}$$

หรือ

$$y(t) = \begin{cases} \int_{t-1}^{t+1} \ell^{\tau}\, d\tau &, -\infty < t < -1 \\ \int_{t-1}^{0} \ell^{\tau}\, d\tau + \int_{0}^{t+1} \ell^{-\tau}\, d\tau &, -1 \le t \le 1 \\ \int_{t-1}^{t+1} \ell^{-\tau}\, d\tau &, 1 \le t < \infty \end{cases}$$

จากการอินทิเกรต ในที่สุดจะได้ผลเฉลย เป็น

$$y(t) = \begin{cases} \ell^{t} \sinh(1) &, -\infty < t < -1 \\ 1 - \ell^{-1} \cosh\ t &, -1 \le t \le 1 \\ \ell^{-t} \sinh(1) &, 1 < t < \infty \end{cases}$$

ถ้าโดเมนในตัวอย่าง 3.2.3 นี้ เป็นกึ่งอนันต์ $0 < t < \infty$ เราสามารถแก้ปัญหาโดยใช้ผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์ หรือซายน์ได้ แต่จะใช้แบบใดให้สังเกตจากเงื่อนไขขอบเขตที่ $t = 0$ จากแบบฝึกหัด 2.3 ข้อ 4

$$\hat{F}_c[y''] = -\omega^2 Y_c(\omega) - y'(0)$$

$$\hat{F}_s[y''] = -\omega^2 Y_s(\omega) + \omega y(0)$$

ดังนั้นถ้ากำหนด $y(0)$ มาให้ เราจะใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ซายน์ แต่ถ้ากำหนด $y'(0)$ มาให้ เราจะใช้ผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงแก้สมการต่อไปนี้ โดยใช้ผลการแปลงที่เหมาะสม

1.1 $y'' - y = \ell^{|t|}$, $-\infty < t < \infty$

$y(t) \to 0$, $y'(t) \to 0$ เมื่อ $|t| \to \infty$

1.2 $y'' - y = \ell^{-t}$, $0 < t < \infty$

$y(0) = 0$, $y(t) \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$

1.3 $y'' - y = \ell^{-t}$, $0 < t < \infty$

$y'(0) = 0$, $y(t) \to 0$, $y'(t) \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$

1.4 $y'' - k^2 y = -u(1-t)$, $k > 0$, $0 < t < \infty$

$y'(0) = 0$, $y(t) \to 0$, $y'(t) \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$

1.5 $y'' - y = t\ell^{-t}$, $0 < t < \infty$

$y(0) = 0$, $y(t) \to 0$, $y'(t) \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$

(แนะนำ $\hat{F}_s[t^2 \ell^{-t}] = \dfrac{2\omega(3-\omega^2)}{(\omega^2 + 1)^3}$)

1.6 $y'' + 3y' + 2y = u(t) - u(t-1)$

3.3 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations)

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เราจะพิจารณาคือ สมการความร้อน (heat equation), สมการคลื่น (wave equation) และสมการของลาปลาซ (Laplace's equation) ซึ่งเป็นสมการพื้นฐาน

3.3.1 การนำความร้อนในของแข็ง

(Heat Conduction in Solids)

เป็นที่ทราบกันว่า ถ้าอุณหภูมิ u ในวัตถุซึ่งเป็นของแข็งไม่คงที่ พลังงานความร้อนจะไหลในทิศทางของเกรเดียนต์ (gradient) $-\nabla u$ ด้วยขนาด $k|\nabla u|$ โดย k เป็นปริมาณที่เรียกว่า สภาพการนำความร้อน (thermal conductivity) ของวัตถุ ซึ่งหลักการข้างต้นนี้เรียกว่า "กฎการนำความร้อนของฟูริเยร์" (Fourier's law of heat conduction) และจากกฎการอนุรักษ์พลังงานความร้อน (law of conservation of thermal energy) ซึ่งกล่าวว่า

"...อัตราความร้อนที่ไหลเข้าบริเวณใดบริเวณหนึ่งรวมกับความร้อนซึ่งก่อกำเนิดขึ้นภายในบริเวณดังกล่าว จะเท่ากับอัตราความร้อนที่ไหลออกจากบริเวณนั้นรวมกับความร้อนซึ่งสะสมไว้..."

จากกฎเกณฑ์ทั้งสองนี้ นำไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2} u_t - q\,(x,y,z,t) \qquad (3.3.1)$$

โดย a^2 เป็นค่าคงที่ เรียกว่า สภาพการแพร่กระจาย (diffusivity) และ g เป็นสัดส่วนกับแหล่งความร้อนภายใน เรียกสมการ (3.3.1) ว่า สมการความร้อน หรือ สมการแพร่กระจาย (diffusion equation) สมการนี้ยังเกิดในปัญหาที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า , ขบวนการแพร่ และการส่งกระแสไฟฟ้าตามสาย ปริมาณ $\nabla^2 u$ จากสมการ (3.3.1) เรียกว่า ลาปลาเซียน(Laplacian)เป็นการวัดผลต่างระหว่างค่าของ u ที่จุด ๆ หนึ่ง กับค่าเฉลี่ยของ u ในย่านจุด (neighbourhood) นั้น, ในพิกัดฉาก ลาปลาเซียน จะอยู่ในรูป

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \qquad (3.3.2)$$

หมายเหตุ

เราเขียน u_x แทนความหมายของ $\frac{\partial u}{\partial x}$, u_{xx} แทนความหมายของ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

และ u_{xy} แทนความหมายของ $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

ปัญหาในทางคณิตศาสตร์ก็คือแก้สมการ (3.3.1) สำหรับอุณหภูมิ u ในวัตถุซึ่งเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous) เมื่อทราบการกระจายของอุณหภูมิทั่ววัตถุ ณ เวลา t = 0 และเงื่อนไขขอบเขตของวัตถุ เงื่อนไขขอบเขตที่ควรรู้จักมี 3 ชนิด ชนิดแรก เป็นการกำหนดอุณหภูมิ u ตามแต่ละผิวของวัตถุ (เรียกว่า เงื่อนไขดีริคเลต, Dirichlet condition) ชนิดที่สองกำหนดฟลักซ์ (flux) ความร้อนผ่านผิววัตถุ ซึ่งก็คือกำหนดอนุพันธ์ตั้งฉากของ u ที่พื้นผิว (เรียกว่าเงื่อนไขนอยมันน์, Neumann condition) และชนิดที่สามกำหนดอัตราที่ความร้อนสูญเสียจากวัตถุขึ้นกับการแผ่รังสีของพื้นผิวผ่านเข้าไปในตัวกลางโดยรอบ (กฎการเย็นตัวของนิวตัน , Newton's law of cooling) เงื่อนไขชนิดสุดท้ายนี้เรียกว่าเงื่อนไขของโรบิน (Robin's condition) จากสมการ (3.3.1) ถ้าฟังก์ชัน u ขึ้นกับตัวแปรระยะห่าง x และตัวแปรเวลา t จะได้ว่า

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t - q(x,t) \qquad (3.3.3)$$

และเมื่อไม่มีแหล่งความร้อนภายใน จะพบว่า

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t \qquad (3.3.4)$$

ทั้งสมการ (3.3.3) และ (3.3.4) เป็นสมการความร้อนในหนึ่งมิติ ซึ่งได้แก่ปัญหาของโลหะกลมยาวหรือลวดยาว ซึ่งที่ผิวด้านข้างไม่มีความร้อนไหลผ่าน(โดยหุ้มฉนวน) โลหะเป็นวัตถุเนื้อเดียวกันตลอด , อุณหภูมิ u(x,t) เท่ากันทุก ๆ ที่ในพื้นที่หน้าตัดเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.3.1 สมการความร้อนบนเส้นวัตถุที่ยาวอนันต์

(Heat equation on an infinite line)

พิจารณาการไหลของความร้อนในตัวกลางที่ยาวอนันต์ $-\infty < x < \infty$ สมมุติ

ว่าการกระจายของอุณหภูมิเริ่มต้นเป็น f(x) และไม่มีแหล่งความร้อนภายใน โดยทางกายภาพ ปัญหานี้เป็นการไหลของความร้อนในแท่งโลหะเล็ก ๆ ที่ยาวมาก ซึ่งที่ผิวด้านข้าง หุ้มฉนวนกันความร้อนไหลออกไว้ ในกรณีนี้ผลเฉลยจะแทนอุณหภูมิตอนกลาง ๆ ของแท่งโลหะที่ยาวอนันต์กำหนดปัญหาด้วยสมการดังนี้

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t \quad , \quad -\infty < x < \infty \ , \ t > 0$$

B.C. $\quad u(x,t) \to 0 \ , \ u_x(x,t) \to 0$ เมื่อ $|x| \to \infty$ (3.3.5)

I.C. $\quad u(x,0) = f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$

(B.C. หมายถึงเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งสำหรับตัวอย่างนี้อาจไม่ต้องกำหนดก็ได้ เพราะว่า การที่จะหาผลการแปลงฟูริเยร์ของอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ $u \to 0$ เมื่อ $|x| \to \infty$, I.C. หมายถึงเงื่อนไขเริ่มต้น)

ผลเฉลย

เพราะว่า $-\infty < x < \infty$ ดังนั้นเราจึงแนะนำให้ใช้ผลการแปงฟูริเยร์และเนื่องจากฟังก์ชันที่จะหาผลการแปลง ขึ้นกับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวดังนั้น เราจะหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ u(x,t) เทียบกับตัวแปร x โดยให้

$$\hat{F}[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x,t)\, dx = U(\omega,t) \qquad (3.3.6)$$

ทำนองเดียวกัน

$$\hat{F}[u_x(x,t)] = i\omega\, U(\omega,t) \qquad (3.3.7)$$

$$\hat{F}[u_{xx}(x,t)] = -\omega^2 U(\omega,t) \qquad (3.3.8)$$

และ

$$\hat{F}[u_t(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-i\omega x} u_t(x,t)dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-i\omega x} u\ (x,t)dx$$

หรือ

$$\hat{F}[u_t(x,t)] = U_t(\omega,t) \qquad (3.3.9)$$

ใช้ผลข้างต้น และให้ $\hat{F}[f(x)] = F(\omega)$ กับสมการ (3.3.5) จะได้

$$U_t + a^2\omega^2 U = 0 \quad , \quad t > 0 \qquad (3.3.10)$$

I.C. $U(\omega,0) = F(\omega) \quad , \quad -\infty < \omega < \infty$

ซึ่งสมการ (3.3.10) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สามารถหาผลเฉลยได้

$$U(\omega,t) = F(\omega)\ \ell^{-a^2\omega^2 t} \qquad (3.3.11)$$

ผลเฉลยของปัญหาเดิม หาได้โดยการใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ผกผันกับสมการ (3.3.11) โดยทฤษฎีบทผลการประสาน
จะพบว่า

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau,t)d\tau \qquad (3.3.12)$$

$$g(x,t) = \hat{F}^{-1}[\ell^{-a^2\omega^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\ \ell^{-x^2/4a^2 t} \qquad (3.3.13)$$

ดังนั้น ผลเฉลยคือ

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ell^{-(x-\tau)^2/4a^2 t}\ d\tau \qquad (3.3.14)$$

ข้อสังเกต

การหาผลการแปลงผกผันของสมการ (3.3.11) อาจใช้สูตรโดยตรงก็ได้

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{F(\omega)\ell^{-a^2\omega^2t}\right\}\ell^{i\omega x}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ell^{i\omega x-a^2\omega^2t}F(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ell^{i\omega x-a^2\omega^2t}\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\ell^{-i\omega v}\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\,dv\int_{-\infty}^{\infty}\ell^{i\omega(x-v)-a^2\omega^2t}\,d\omega$$

โดยใช้วิธีการเช่นเดียวกับตัวอย่าง 2.1.5 จะพบว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ell^{i\omega(x-v)-a^2\omega^2t}\,d\omega = \frac{\ell^{-(v-x)^2/4a^2t}}{2a\sqrt{\pi t}}$$

ดังนั้น

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\,\ell^{-(v-x)^2/4a^2t}\,dv$$

ซึ่งเหมือนกับสมการ (3.3.14)

ตัวอย่าง 3.3.2

จงหาผลเฉลยของปัญหาในสมการ (3.3.5) เมื่อกำหนดการกระจายของอุณหภูมิเริ่มต้นในแท่งโลหะ โดย

$$f(x) = \ell^{-x^2/4a^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{F}[\ell^{-x^2/4a^2}] = 2\sqrt{\pi}\ a\ \ell^{-a^2\omega^2}$$

จากตัวอย่าง 3.3.1 เราพบว่าสมการ (3.3.11) เป็นผลเฉลยของปัญหาที่แปลงแล้ว

$$U(\omega,t) = 2\sqrt{\pi}\ a\ \ell^{-a^2\omega^2}\ \ell^{-a^2\omega^2 t}$$

$$= 2\sqrt{\pi}\ a\ \ell^{-a^2\omega^2(1+t)}$$

ในที่นี้จะหาผลการแปลงผกผันโดยใช้อินทิกรัลของฟูริเยร์ (สูตรการแปลง-ผกผัน)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\sqrt{\pi}\ a\ell^{-a^2\omega^2(1+t)}\ \ell^{i\omega x}d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \ell^{-x^2/4a^2(1+t)}$$

ตัวอย่าง 3.3.3

สมมุติว่าพิจารณาปัญหาในกรณีที่มีแหล่งความร้อนภายใน และอุณหภูมิเริ่มต้นเป็นศูนย์ นั่นคือ กำหนดรูปแบบปัญหาโดย

$$u_{xx} = \frac{1}{a}u_t - q(x,t)\ ,\ -\infty < x < \infty\ ,\ t > 0 \qquad (3.3.15)$$

B.C. $u(x,t) \to 0,\ u_x(x,t) \to 0$ เมื่อ $|x| \to \infty,\ t > 0$

I.C. $u(x,0) = 0, \qquad -\infty < x < \infty$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{F}[u(x,t)] = U(\omega,t)$$

$$\hat{F}[q(x,t)] = Q(\omega,t)$$

จากการใช้ผลการแปลงฟูริเยร์กับสมการ (3.3.15) จะได้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง แบบไม่เอกพันธ์

$$U_t + a^2\omega^2 U = a^2 Q(\omega,t), \quad t > 0 \qquad (3.3.16)$$

$$\text{I.C. } U(\omega,0) = 0, \quad -\infty < \omega < \infty$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยเป็น

$$U(\omega,t) = a^2 \int_0^t e^{-a^2\omega^2(t-\tau)} Q(\omega,\tau)d\tau \qquad (3.3.17)$$

หาผลการแปลงผกผัน โดยใช้ทฤษฎีบทผลการประสาน จะได้

$$u(x,t) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t g(x-\xi,t-\tau)q(\xi,\tau)d\tau d\xi \qquad (3.3.18)$$

โดย $g(x,t)$ เป็นตามสมการ (3.3.13)

ตัวอย่าง 3.3.4 สมการความร้อนบนเส้นวัตถุที่ยาวกึ่งอนันต์

(Heat Equation on a Semiinfinite Line

พิจารณาปัญหาของการหาการกระจายอุณหภูมิใกล้ปลายข้างหนึ่งของแท่งโลหะที่ยาวมาก โดยมีฉนวนหุ้มไว้ ในกรณีเช่นนี้ ช่วงจะเป็น $0 < x < \infty$ ถ้าให้การกระจายอุณหภูมิเริ่มต้นในแท่งโลหะเป็น $f(x)$ รูปแบบปัญหาจะเป็นดังนี้

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \qquad (3.3.19)$$

B.C. $u_x(0,t) = 0$ $u(x,t) \to 0$, $u_x(x,t) \to 0$ เมื่อ $X \to \infty$

I.C. $u(x,t) = f(x) \quad , \quad 0 < x < \infty$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจากช่วงเป็นกึ่งอนันต์ และเงื่อนไขขอบเขต $u_x(0,t) = 0$ ดังนั้นจึงใช้ผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์

ถ้าให้

$$\hat{F}_c[u(x,t)] = U(\omega,t) \tag{3.3.20}$$

จากคุณสมบัติของผลการแปลงโคซายน์

$$\hat{F}[u_{xx}(x,t)] = -\omega^2 U(\omega,t) - u_x(0,t)$$

$$= -\omega^2 U(\omega,t) \tag{3.3.21}$$

และให้ $\hat{F}[f(x)] = F(\omega)$

ดังนั้นปัญหา (3.3.19) จะกลายเป็น

$$U_t + a^2\omega^2 U = 0 \ , \ t > 0 \tag{3.3.22}$$

I.C. $U(\omega,0) = F(\omega)$

ซึ่งผลเฉลยของสมการ (3.3.22) คือ

$$U(\omega,t) = F(\omega)\ell^{-a^2\omega^2 t} \tag{3.3.23}$$

โดยการแปลงฟูริเยร์โคซายน์ผกผัน จะได้