## 2.4 ผลการประสาน (Convolution)

บทนิยาม 2.4.1

ให้ $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ สำหรับ $-\infty < t < \infty$ ผลการประสานของฟังก์ชัน $f$ และ $g$ นิยามโดยฟังก์ชัน

$$f*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \qquad (2.4.1)$$

กรณีเฉพาะที่ $f(t) = 0$ และ $g(t) = 0$ สำหรับ $t < 0$ จะได้ว่า

$$f*g = \int_{0}^{t} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \qquad (2.4.2)$$

ซึ่งจะพบในเรื่องผลการแปลงลาปลาซ
ก่อนอื่นเรามาดูความหมายก่อน

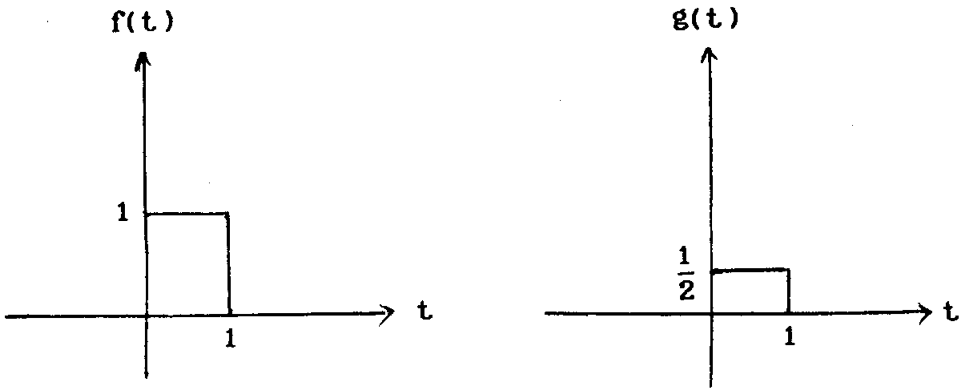
ความหมายของเรขาคณิต :

ผลสมการ (2.4.1) ซึ่งเป็นผลการประสานของ $f(t)$ และ $g(t)$ จะสังเกตพบว่า ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ

1. การพับ $g(\tau)$ ตามแนวแกนดิ่ง ได้เป็น $g(-\tau)$
2. การเลื่อน $g(-\tau)$ ไปเป็นจำนวน $t$ หน่วย เป็น $g(t-\tau)$
3. การคูณ $g(t-\tau)$ ด้วย $f(\tau)$
4. การอินทิเกรตฟังก์ชันที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 ซึ่งก็คือ พื้นที่ใต้ผลคูณดังกล่าว

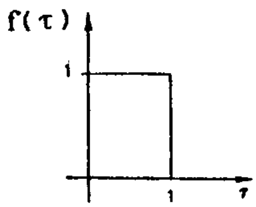
ตัวอย่าง 2.4.1

ให้ $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นดังรูป 2.4.1

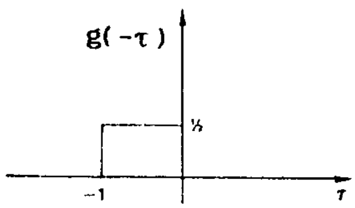



รูป 2.4.1

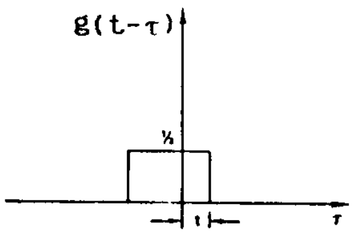
โดยขั้นตอน 1 และ 2 สามารถแสดงได้ด้วยรูป 2.4.2
สำหรับขั้นตอน 3 และ 4 แสดงดังรูป 2.4.3




(ก)

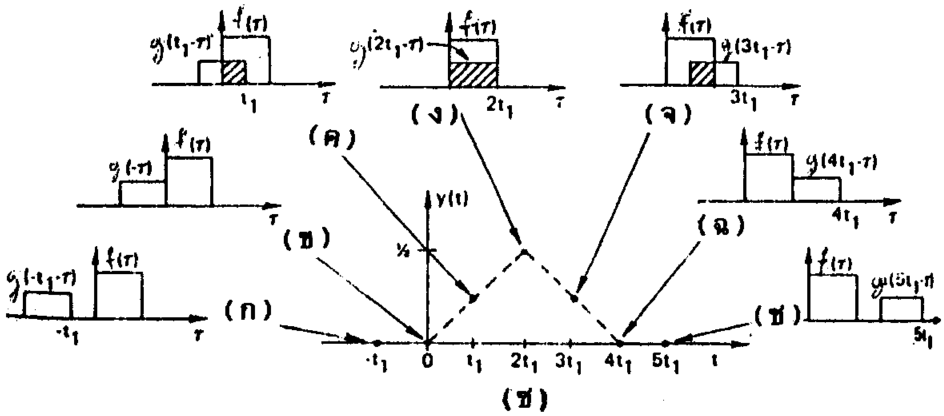



(ข)




(ค)

รูป 2.4.2 การพับและการเลื่อน




รูป 2.4.3  $y(t) = f*g$

จะพบว่าผลการประสานได้เป็นฟังก์ชันสามเหลี่ยม (รูป 2.4.3 (ซ)) ซึ่งสามารถแสดงการคำนวณหาได้ดังนี้

จาก

$$f*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

โดย

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 , & 0 < \tau < 1 \\ 0 , & \tau \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

และ

$$g(\tau) = \begin{cases} 1/2 , & 0 < \tau < 1 \\ 0 , & \tau \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

ดังนั้น

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 1/2 , & 0 < t-\tau < 1 \\ 0 , & \tau \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

เนื่องจากค่าของ $f(\tau)$ ที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ระหว่างช่วง $0 < \tau < 1$ และสำหรับค่าของ $g(t-\tau)$ ที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ระหว่าง $t-1 < \tau < t$ ฉะนั้น ลิมิตล่างในการอินทิเกรตของผลคูณฟังก์ชันทั้งสองนี้คือ $\max(0, t-1)$ และลิมิตบนในการอินทิเกรตคือ $\min(1, t)$ ซึ่งค่า $t$ ที่เป็นไปได้มี 2 ช่วง คือ $(0, 1)$ และ $(1, 2)$ นั่นคือ

$$f*g = \begin{cases} \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau &, \quad 0 < t < 1 \\[2ex] \int_{t-1}^1 f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau &, \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$

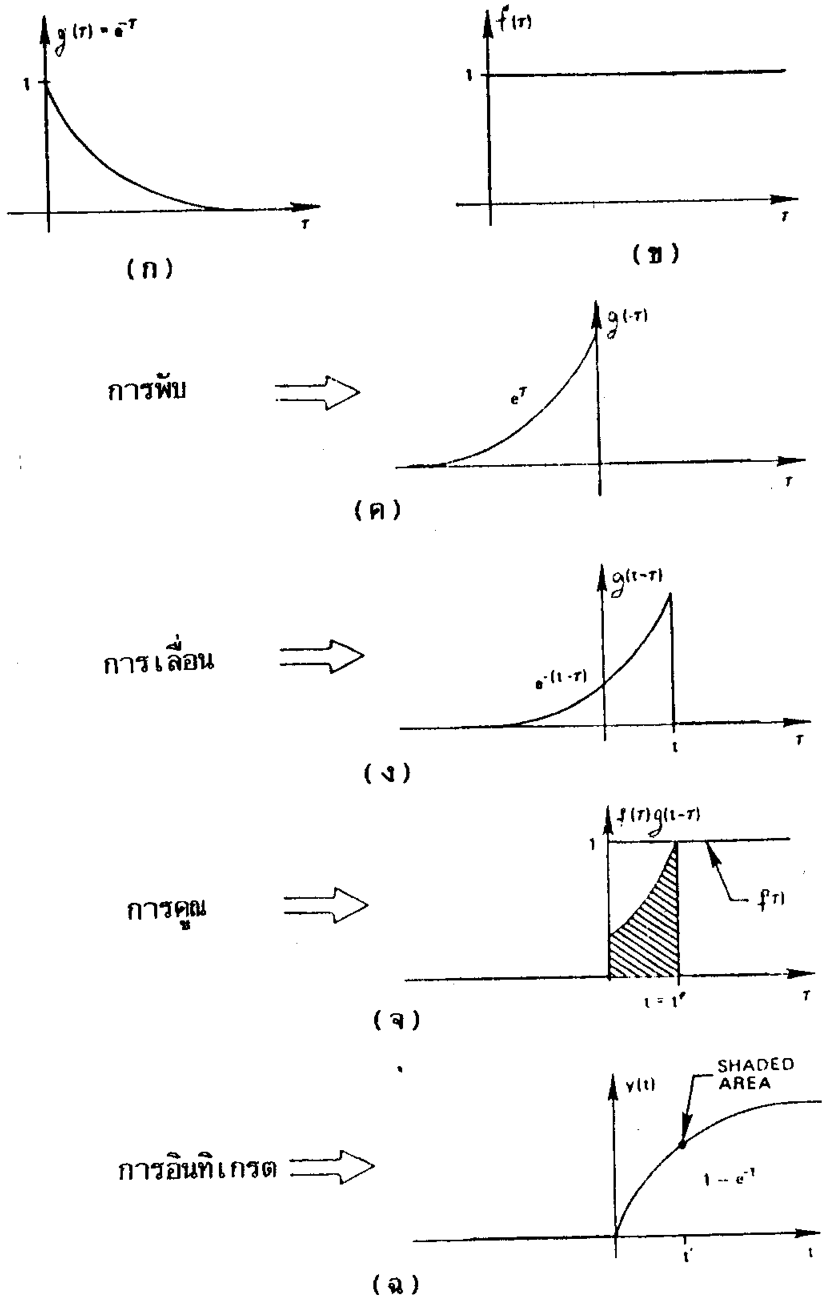
หรือ

$$f*g = \begin{cases} \int_0^t \frac{1}{2}\, d\tau &, \quad 0 < t < 1 \\[2ex] \int_{t-1}^1 \frac{1}{2}\, d\tau &, \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\, t &, \quad 0 < t < 1 \\[2ex] 1 - \frac{1}{2}\, t &, \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.4.2

กำหนด $f(t)$ และ $g(t)$ ดังรูป 2.4.4 ( (ข) และ (ก) )



g(τ) = e^{-τ}
1
τ
(ก)
f(τ)
1
τ
(ข)
การพับ
g(-τ)
e^τ
τ
(ค)
การเลื่อน
g(t-τ)
e^{-(t-τ)}
t
τ
(ง)
การคูณ
f(τ)g(t-τ)
1
f(τ)
t = t'
τ
(จ)
การอินทิเกรต
y(t)
SHADED AREA
1 - e^{-t}
t'
t
(ฉ)


รูป 2.4.4 $y(t) = f*g$

เช่นเดียวกับตัวอย่างที่แล้ว เราสามารถหา $f*g$ (จากรูปก็คือ $y(t)$ ) ได้โดยการคำนวณดังนี้

เนื่องจากค่าของ

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 & , \quad \tau > 0 \\ 0 & , \quad \tau < 0 \end{cases}$$

และ

$$g(\tau) = \begin{cases} \ell^{-\tau} & , \quad \tau > 0 \\ 0 & , \quad \tau < 0 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$g(t-\tau) = \begin{cases} \ell^{-(t-\tau)} & , \quad \tau < t \\ 0 & , \quad \tau > t \end{cases}$$

เนื่องจากค่าของ $f(\tau)$ ที่ไม่เป็นศูนย์ อยู่ในช่วง $0 < \tau < \infty$ และสำหรับค่าของ $g(t-\tau)$ ที่ไม่เป็นศูนย์ อยู่ในช่วง $-\infty < \tau < t$ ฉะนั้น ลิมิตล่างในการอินทิเกรตคือ $\max(0, -\infty) = 0$

และลิมิตบนในการอินทิเกรตคือ $\min(\infty, t) = t$

นั่นคือ

$$f*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} (1)\, \ell^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \ell^{-t}\left(\ell^{\tau} \Big|_{0}^{t}\right)$$

$$= 1 - \ell^{-t}$$

คุณสมบัติของผลการประสาน

1. $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

2. $[f(t) * g(t)] * k(t) = f(t) * [g(t) * k(t)]$

3. $f(t) * [g(t) + k(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * k(t)$

ซึ่งในที่นี้จะพิสูจน์กรณีแรกอย่างเดียว ที่เหลือลองไปพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

เนื่องจาก

$$f(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

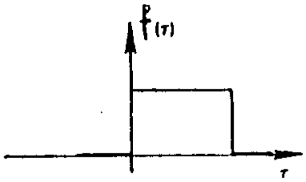
เปลี่ยนตัวแปรให้ $t-\tau = x$ จะได้

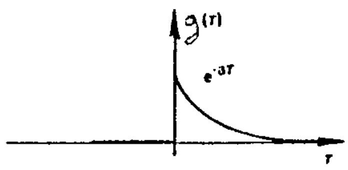
$$f(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(t-x)\, dx$$

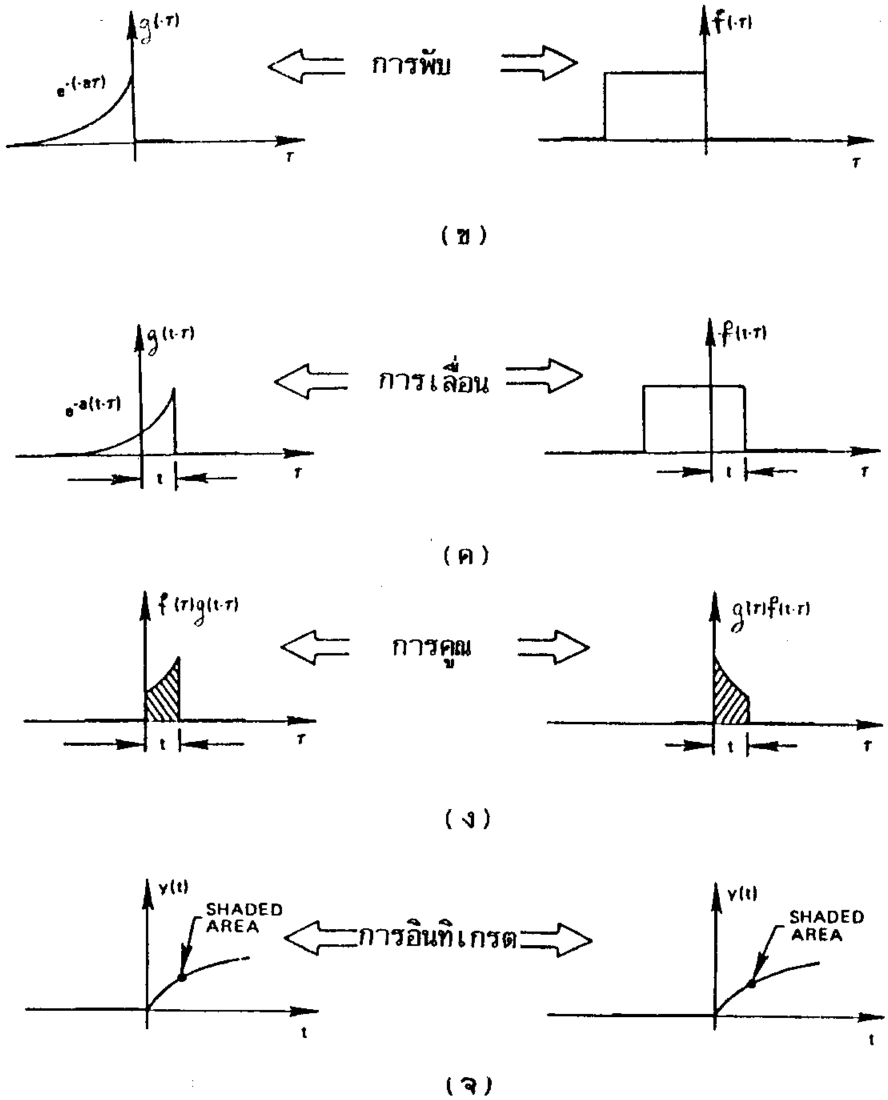
$$= g(t) * f(t)$$

ดูรูป (2.4.5)




(ก)




รูป 2.4.5 $y(t) = f * g = g * f$

<u>ทฤษฎีบท</u> 2.4.1

ถ้า $\hat{F}\,[f_1(t)] = F_1(\omega)$ และ $\hat{F}\,[f_2(t)] = F_2(\omega)$ แล้ว

$$\hat{F}\,[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

เนื่องจาก

$$\hat{F}[f_1(t)*f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\ ]\ \ell^{-i\omega t}\ dt$$

สลับอันดับการอินทิเกรต

$$\hat{F}\ [f_1(t)*f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\ [\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)\ \ell^{-i\omega t}\ dt\ ]d\tau$$

จากคุณสมบัติตามทฤษฎีบท 2.3.3

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)\ell^{-i\omega t}\ dt = F_2(\omega)\ell^{-i\omega\tau}$$

ดังนั้น

$$\hat{F}\ [f_1(t)*f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)F_2(\omega)\ell^{-i\omega t}d\tau$$

$$= [\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\ell^{-i\omega t}d\tau\ ]F_2(\omega)$$

$$= F_1(\omega)\ F_2(\omega)$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 2.4.2

ถ้า $\hat{F}\ [f_1(t)] = F_1(\omega)$ และ $\hat{F}\ [f_2(t)] = F_2(\omega)$ แล้ว

$$\hat{F}\ [f_1(t)\ f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\ F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

ข้อพิสูจน์

จากทฤษฎีบทที่แล้ว

$$\hat{F}\,[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(\omega)\,F_2(\omega)$$

นั่นคือ

$$\hat{F}\,\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)d\tau\right] = F_1(\omega)\,F_2(\omega) \qquad (2.4.1)$$

จากทฤษฎีบท 2.3.7 ที่ว่า ถ้า $\hat{F}\,[f(t)] = F(\omega)$ แล้ว

$\hat{F}\,[F(t)] = 2\pi\, f(\omega)$ ดังนั้น

$$\hat{F}\,[F_1(t)F_2(t)] = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\,f_2(-\omega-\tau)\,d\tau$$

เปลี่ยนตัวแปร $\tau = -x$

$$\hat{F}\,[F_1(t)F_2(t)] = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(-x)\,f_2(-\omega+x)\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(-x)\,f_2(-(\omega-x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [2\pi\, f_1(-x)]2\pi\, f_2(-(\omega-x))\,dx$$

เนื่องจาก $2\pi f_1(-\omega) = \hat{F}\,[F_1(t)]$ และ $2\pi f_2(-\omega) = \hat{F}\,[F_2(t)]$ ถ้าเราเปลี่ยน $F_1(t)$ และ $F_2(t)$ มาเป็น $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ ตามลำดับ ผลที่ตามมาคือ เราสามารถเปลี่ยน $2\pi f_1(-\omega)$ และ

$2\pi f_2(-\omega)$ มาเป็น $F_1(\omega)$ และ $F_2(\omega)$ ได้โดยตามลำดับ ดังนั้น จากสมการข้างต้นจึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\hat{F}\,[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)F_2(\omega-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

<u>ความสัมพันธ์ของปาร์เซอวาล</u> : (Parseval's relation)

เนื่องจากเราทราบแล้วว่า

$$\hat{F}\,[f*g] = F(\omega)\,G(\omega)$$

นั่นคือ

$$\hat{F}^{-1}\,[F(\omega)\,G(\omega)] = f*g \qquad (2.4.2)$$

เรียกสมการนี้ว่า ทฤษฎีบทผลการประสาน (Fourier convolution theorem) หรือ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}F(\omega)\,G(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.4.3)$$

กรณีที่น่าสนใจคือ ให้ $t = 0$ ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,G(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(-\tau)\,d\tau \qquad (2.4.4)$$

สำหรับกรณีพิเศษที่ $g(-\tau) = \overline{f(\tau)}$ (ส่วนมากเราสนใจกรณีที่ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง นั่นคือ $\overline{f(t)} = f(t)$) จะได้

$$G(\omega) = \hat{F}\,[g(\omega)] = \hat{F}\,[\overline{f(-\tau)}] = \overline{F(\omega)}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\overline{F(\omega)}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\overline{f(\tau)}\,d\tau$$

หรือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt \qquad (2.4.5)$$

ซึ่งเรียกว่า "ความสัมพันธ์ของ ปาร์เซอวาล"

ตัวอย่าง 2.4.3

กำหนดให้

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & , \; t \geq 0 \\ 0 & , \; t < 0 \end{cases}$$

และ

$$g(t) = \begin{cases} \sin t & , \; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \; t \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $f * g$ และ $g * f$

ผลเฉลย

พิจารณา

$$f*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

เนื่องจากค่าของ $f(\tau)$ ที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ในช่วง $(0 , \infty)$ และค่าของ $g(t-\tau)$ ที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ในช่วง $(t-\pi/2,t)$ เพราะว่า $0\le t-\tau\le\pi/2$ดังนั้น ลิมิตล่างในการอินทิเกรตคือ $\max(0,t-\pi/2)$ และลิมิตบนในการอินทิเกรต $\min(\infty, t)$ ซึ่งค่า $t$ ที่เป็นไปได้คือ $0 < t < \pi/2$ , $t \ge \pi/2$,และ $t < 0$ นั่นคือ

$$
f*g = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \ell^{-\tau} \sin(t-\tau)d\tau , & 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ \displaystyle\int_{t-\frac{\pi}{2}}^t \ell^{-\tau} \sin(t-\tau)d\tau , & t \ge \dfrac{\pi}{2} \\ 0 , & t < 0 \end{cases} \quad (2.4.6)
$$

ทำนองเดียวกัน

$$
g*f = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau
$$

ค่าของ $g(\tau)$ ที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ในช่วง $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ และค่าของ $f(t-\tau)$ ที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ในช่วง $-\infty < \tau < t$ เพราะว่า $t-\tau \ge 0$ ดังนั้นลิมิตล่างในการอินทิเกรตคือ $\max(0, -\infty)$ และลิมิตบนในการอินทิเกรตคือ $\min(\pi/2 , t)$ ซึ่งค่าของ $t$ คือ $0 \le t \le \pi/2$ ,$t \ge \pi/2$ , และ $t \le 0$ นั่นคือ

$$
g*f = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \sin(\tau)\, \ell^{-(t-\tau)}\, d\tau , & 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\tau)\, \ell^{-(t-\tau)}\, d\tau , & t \ge \dfrac{\pi}{2} \\ 0 , & t \le 0 \end{cases} \quad (2.4.7)
$$

จากการคำนวณค่าสมการ (2.4.7) จะได้

$$g*f = \begin{cases} 0 & , \quad t \le 0 \\ \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + \ell^{-t}) & , \quad 0 < t \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\ell^{-t}}{2}(1+\ell^{\pi/2}) & , \quad t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (2.4.8)$$

ถึงแม้ว่าสมการ (2.4.6) จะต่างกันกับสมการ (2.4.7) แต่เมื่อคำนวณค่าออกมาจะได้เท่ากันกับสมการ (2.4.8)

ตัวอย่าง 2.4.4

$$\text{จงหาค่าของ} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} \quad \text{และ} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

ผลเฉลย

ให้ $f(t) = \ell^{-at}\, u(t)$

เราทราบว่า $\hat{F}\,[f(t)] = F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$

ดังนั้น $\left|F(\omega)\right|^2 = \frac{1}{a^2+\omega^2}$

จากความสัมพันธ์ปาร์เซอวาล

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega$$

ทำให้ได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi \int_{0}^{\infty} \ell^{-2at}\, dt$$

นั่นคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{a^2+\omega^2} = 2\pi \int_{0}^{\infty} \ell^{-2at}\, dt$$

$$= 2\pi \frac{\ell^{-2at}}{-2a} \Bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{a}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a}$$

โดยให้ a = 1 จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

**ตัวอย่าง 2.4.5**

จงหาค่าอินทิกรัล

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}$$

**ผลเฉลย**

อินทิกรัลที่กำหนดให้อยู่ในรูป

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, G(x)\, dx$$

โดยให้ $F(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ และ $G(x) = \frac{1}{b^2+x^2}$

ดังนั้นโดยใช้สมการ (2.4.4) จะได้ว่า

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(-t)\, dt$$

โดย $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นผลการแปลงผกผันของ $F(x)$ และ $G(x)$ ตามลำดับ จากตัวอย่าง 2.1.1 เราได้

$$f(t) = \frac{1}{2a}\, \ell^{-a|t|}$$

และ

$$g(t) = \frac{1}{2b}\, \ell^{-b|t|}$$

ซึ่งทั้ง f( t ) และ g( t ) เป็นฟังก์ชันคู่  ดังนั้น

$$I = 4\pi \int_{0}^{\infty} f(t)\, g(-t)\, dt$$

$$= \frac{\pi}{ab} \int_{0}^{\infty} \ell^{-(a+b)t}\, dt$$

หรือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

## แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาผลการประสาน $f*g$ และแสดงว่า $\hat{F}[f*g] = \hat{F}[f]\,\hat{F}[g]$

1.1 $f(t) = \begin{cases} \ell^{-t} &, t>0 \\ 0 &, t<0 \end{cases}$ และ $g(t) = \begin{cases} \ell^{-2t} &, t>0 \\ 0 &, t<0 \end{cases}$

1.2 $f(t) = \begin{cases} 1 &, -1<t\leq 1 \\ 0 &, t \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$ และ $g(t) = \begin{cases} \ell^{-t} &, t>0 \\ 0 &, \text{มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$

1.3 $f(t) = \begin{cases} \ell^{-t} &, t>0 \\ 0 &, t<0 \end{cases}$ และ $g(t) = \begin{cases} \ell^{t} &, t<0 \\ 0 &, t>0 \end{cases}$

1.4 $f(t) = \begin{cases} 1 &, 1<t<1 \\ 0 &, t \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$ และ $g(t) = \ell^{-|t|}$

1.5 $f(t) = (\ell^{-t} - \ell^{-2t})\,u(t)$ และ $g(t) = u(t) - u(t-1)$

2. จงเขียน $[f.g]$ ในรูปผลการประสาน $[f.g] = \frac{1}{2\pi}\hat{F}[f]*\hat{F}[g]$

2.1 $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ และ $g(t) = \ell^{-|t|}$

2.2 $f(t) = \ell^{-|t|}$ และ $g(t) = \ell^{-t^2}$

3. จงแสดงว่าทฤษฎีบทผลการประสาน เป็นจริง เมื่อกำหนดให้

$$f(t) = g(t) = \begin{cases} 1 &, |t| < 1 \\ 0 &, |t| > 1 \end{cases}$$

4. จงแสดงว่าความสัมพันธ์ของปาร์เซอวาลเป็นจริง เมื่อกำหนดให้

4.1 $f(t) = \ell^{-a|t|}$ , $a > 0$

4.2 $f(t) = \ell^{-a^2t^2}$ , $a > 0$

5. สำหรับ $a$ , $b > 0$ จงแสดงว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{a+b}$$

6. จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชัน

$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2 , & |t| < 1 \\ 0 , & |t| > 1 \end{cases}$$

แล้วหาค่าของ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(x \cos x - \sin x)^2}{x^6}\, dx$$

<u>คำตอบ</u>

1.1 $$f*g = \begin{cases} \ell^{-t} - \ell^{-2t} , & t \geq 0 \\ 0 , & t < 0 \end{cases}$$

1.3 $$f*g = \frac{1}{2}\, \ell^{-t}$$

$$1.5 \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{2} - \ell^{-t} + \frac{1}{2}\,\ell^{-2t} & , \quad 0 \le t \le 1 \\ \ell^{-t}\,(\ell - 1) + \frac{1}{2}\,\ell^{-2t}\,(1-\ell^{2}) & , \quad t \ge 1 \\ 0 & , \quad t \le 0 \end{cases}$$

2.

2.1 $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi\, \ell^{-|\tau|}\, \frac{2}{(\tau-\omega)^{2}+1}\, d\tau$$

6. $$\frac{\pi}{15}$$

## 2.5 **ผลการแปลงฟูริเยร์ผกผัน** (The inverse Fourier transform)

จากนิยามผลการแปลงฟูริเยร์ และผลการแปลงฟูริเยร์ผกผันในหัวข้อ 2.1
ถ้า $\hat{F}[f] = F(\omega)$ แล้ว เราเขียน

$$f = \hat{F}^{-1}[F(\omega)]$$

แทนผลการแปลงผกผัน และเพื่อเป็นการแน่ใจว่ามีฟังก์ชัน $f$ เพียงฟังก์ชันเดียวที่ $\hat{F}[f] = F(\omega)$ นั่นคือ ถ้าผลการแปลงฟูริเยร์เท่ากัน แสดงว่าต้องมาจากฟังก์ชันเดียวกัน จะพิจารณาทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 2.5.1 (Uniqueness theorem)

ให้ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ สำหรับ $-\infty<t<\infty$ ,

โดยที่ $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|dt$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(t)|dt$ หาค่าได้ ให้

$\hat{F}[f_1] = F_1(\omega)$ และ $\hat{F}[f_2] = F_2(\omega)$ ถ้า $F_1(\omega) = F_2(\omega)$ สำหรับ $-\infty < \omega < \infty$ , แล้ว $f_1(t) = f_2(t)$ ยกเว้นจุดที่ไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด

**ข้อพิสูจน์**

เนื่องจาก $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ สอดคล้องคุณสมบัติตามทฤษฎีบท 2.2.2 ดังนั้น

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \, PV \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

และ

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \, PV \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$