โดย

$$f_1(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| < 2 \\ \frac{1}{2} & , \quad \omega = \pm 2 \\ 0 & , \quad |\omega| > 2 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.3.8

ถ้า $\hat{F}[f] = F(\omega)$ แล้ว

$$\hat{F}[f(t)\cos ct] = \frac{1}{2} F(\omega - c) + \frac{1}{2} F(\omega + c)$$

ข้อพิสูจน์

เนื่องจาก

$$\cos ct = \frac{1}{2}(\ell^{ict} + \ell^{-ict})$$

ดังนั้น

$$\hat{F}[f(t)\cos ct] = \hat{F}[\frac{1}{2} f(t)\ell^{ict} + \frac{1}{2} f(t)\ell^{-ict}]$$

จากคุณสมบัติเชิงเส้น ตามทฤษฎีบท 2.3.2
จะได้

$$\hat{F}[f(t)\cos ct] = \frac{1}{2}\hat{F}[f(t)\ell^{ict}] + \frac{1}{2}\hat{F}[f(t)\ell^{-ict}]$$

และจากคุณสมบัติ ตามทฤษฎีบท 2.3.3
ทำให้ได้ว่า

$$\hat{F}\,[f(t)\cos ct] = \frac{1}{2}\,F(\omega-c) + \frac{1}{2}\,F(\omega+c)$$

บทแทรก 2.3.1

ถ้า $\hat{F}\,[f] = F(\omega)$ แล้ว

$$\hat{F}\,[f(t)\sin ct] = \frac{1}{2i}\,[F(\omega-c) - F(\omega+c)]$$

ตัวอย่าง 2.3.7

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชัน $f(t)\cos ct$

กำหนด

$$f(t) = \begin{cases} 1 \;, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 \;, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ผลเฉลย

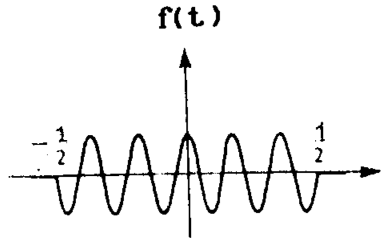
เนื่องจาก

$$\hat{F}\,[f(t)] = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

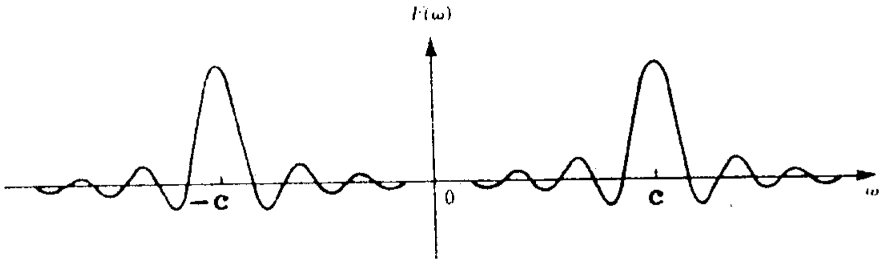
โดยทฤษฎีบท 2.3.8 จะได้

$$\hat{F}\,[f(t)\cos ct] = \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega-c)}{\omega-c} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega+c)}{\omega+c}$$

ดูรูป 2.3.1



ก)



ข)

รูป 2.3.1

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.8

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t) = \dfrac{\sin t \sin 5t}{\pi t}$

<u>ผลเฉลย</u>

จากตัวอย่าง 2.2.4

$$\hat{F}\left[\frac{\sin t}{\pi t}\right] = F(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad \omega = \pm 1 \\ 0 & , \quad |\omega| > 1 \end{cases}$$

โดยบทแทรก 2.3.1 จะได้

$$\hat{F}\left[\frac{\sin t \sin 5t}{\pi t}\right] = \frac{1}{2i}\begin{cases} 1 & , \ |\omega-5|<1 \\ \frac{1}{2} & , \ \omega-5=\pm 1 \\ 0 & , \ |\omega-5|>1 \end{cases} - \frac{1}{2i}\begin{cases} 1 & , |\omega+5|<1 \\ \frac{1}{2} & , \ \omega+5=\pm 1 \\ 0 & , \ |\omega+5|>1 \end{cases}$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 2.3.9

ถ้า $\hat{F}[f] = F(\omega)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ และ

$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt$ หาค่าได้แล้ว

$$\hat{F}[f'] = i\omega \hat{F}[f] = i\omega F(\omega)$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

ก่อนอื่นต้องสังเกตก่อนว่า $f(t) \to 0$ เมื่อ $t \to \pm\infty$ เพราะว่า

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\, du$$

เนื่องจาก $\int_0^{\infty} f'(u)\, du$ หาค่าได้ ดังนั้น $f(t)$ ต้องหาค่าได้ เมื่อ

$t \to \infty$; ถ้าให้ $f(t) \to c \neq 0$ เมื่อ $t \to \infty$ แล้ว $\int_0^{\infty} f(t)\, dt$

หาค่าไม่ได้(ซึ่งขัดแย้งกับ $\int_0^{\infty} f(t)\, dt$ หาค่าได้) ฉะนั้น $f(t) \to 0$ เมื่อ

$t \to \infty$ ทำนองเดียวกัน $f(t) \to 0$ เมื่อ $t \to -\infty$ ก็พิจารณาคล้ายกัน

จาก

$$\hat{F}[f'] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

โดยอินทิเกรตทีละส่วน

$$u = \ell^{-i\omega t} \quad , \quad dv = f'(t)\, dt$$

$$du = -i\omega \ell^{-i\omega t}\, dt \quad , \quad v = f(t)$$

จะพบว่า

$$\hat{F}[f'] = f(t)\ell^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}\, dt$$

นั่นคือ

$$\hat{F}[f'] = i\omega\, \hat{F}[f] \qquad (2.3.1)$$

โดยการใช้ผลที่ได้ในสมการ (2.3.1) ซ้ำ ๆ กัน จะพบว่า

$$\hat{F}[f^{(k)}(t)] = (i\omega)^k\, \hat{F}[f] \; ; \quad k = 1,2,\ldots \qquad (2.3.2)$$

ทั้งนี้ สมการ (2.3.2) ไม่ได้เป็นการรับประกันว่า ผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f^{(k)}(t)$ จะต้องหาค่าได้ แต่เป็นการบ่งชี้ว่า ถ้าหาค่าได้ จะเท่ากับ $(i\omega)^k\, \hat{F}[f]$

ข้อสังเกต

1. กรณี $f(t)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $t = t_k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ จะพบว่า

$$\hat{F}[f'] = i\omega \hat{F}[f] - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \, \ell^{-i\omega t_k}$$

โดย

$$\varepsilon_k = f(t_k+) - f(t_k-)$$

ซึ่งแสดงได้ดังนี้

จากหัวข้อ 1.5.6

$$f'(t) = g'(t) - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \, \delta(t-t_k)$$

ดังนั้น

$$\hat{F}[f'] = \hat{F}[g'(t)] - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \, \hat{F}[\delta(t-t_k)]$$

เนื่องจาก $\hat{F}[\delta(t-t_k)] = \ell^{-i\omega t_k}$ (ซึ่งจะได้กล่าวถึงในหัวข้อ 2.6.1)

เพราะฉะนั้น

$$\hat{F}[f'] = i\omega \hat{F}[f] - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \, \ell^{-i\omega t_k}$$

2. สำหรับผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์ และซายน์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน สามารถหาได้โดยวิธีเดียวกัน ดังนี้

$$\hat{F}_c\ [f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)\cos \omega t\ dt$$

$$= -\ f(0) + \omega \int_0^\infty f(t)\cos \omega t\ dt$$

$$= \omega\ F_s(\omega) - f(0)$$

ทำนองเดียวกัน

$$\hat{F}_s\ [f'(t)] = \omega\ F_c(\omega)$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 2.3.10

ถ้า $\hat{F}\ [f] = F(\omega)$ แล้ว

$$\hat{F}\ [-itf(t)] = \frac{dF}{d\omega}(\omega)$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

เนื่องจาก

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ dt$$

ดังนั้น

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ dt$$

เนื่องจาก $f(t)\ell^{-i\omega t}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ จึงสลับอันดับการหาอนุพันธ์ และการอินทิเกรต ได้

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} [-itf(t)]\ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \hat{F}\,[-itf(t)]$$

โดยการทำซ้ำ ๆ กันจะได้รูปทั่วไป (ถ้า $F(\omega)$ มีอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ n)

$$\hat{F}\,[(-i)^k\, t^k\, f(t)] = \frac{d^kF(\omega)}{d\omega^k} \quad , \quad k \le n$$

หรือ

$$\hat{F}\,[t^k\, f(t)] = \frac{1}{(-i)^k}\,\frac{d^kF(\omega)}{d\omega^k} \quad , \quad k \le n$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.9

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t) = \ell^{-t^2/2}$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-t^2/2}\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

ดังนั้น

$$F'(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-t^2/2}\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$u = \ell^{-i\omega t} \quad , \quad dv = t\ell^{-t^2/2}\, dt$$

$$du = -i\omega\, \ell^{-i\omega t}\, dt \quad , \quad v = -\ell^{-t^2/2}$$

จะได้

$$F'(\omega) = -i\left[-\ell^{-i\omega t}\, \ell^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-t^2/2}\, \ell^{-i\omega t} dt\right]$$

$$= -\omega\int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-t^2/2}\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$= -\omega F(\omega)$$

นั่นคือ

$$F'(\omega) + \omega F(\omega) = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ สามารถแยกตัวแปรได้

$$\frac{F'(\omega)}{F(\omega)} = -\omega$$

อินทิเกรต

$$\ln F(\omega) = \frac{-\omega^2}{2} + c_1$$

$$F(\omega) = c\ell^{-\omega^2/2}$$

จาก

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-t^2/2} \ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-t^2/2}\, dt$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-(t/\sqrt{2})^2}\, d(t/\sqrt{2})$$

$$= \sqrt{2\pi}$$

$$= c$$

เพราะฉะนั้น

$$F(\omega) = \sqrt{2\pi}\, \ell^{-\omega^2/2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.10

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t) = t\ell^{-t^2/2}$

<u>ผลเฉลย</u>

จากตัวอย่าง 2.3.9

$$\hat{F}\,[\ell^{-t^2/2}] = \sqrt{2\pi}\, \ell^{-\omega^2/2}$$

ใช้คุณสมบัติตามทฤษฎีบท 2.3.10

$$\hat{F}\,[t\ell^{-t^2/2}] = -\frac{1}{i}\;\frac{d}{d\omega}\,\ell^{-\omega^2/2}$$

$$= i\;\ell^{-\omega^2/2}(-\omega)$$

$$= -i\omega\;\ell^{-\omega^2/2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.11

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t) = t\ell^{-5t}\,u(t)$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$\hat{F}\,[\ell^{-5t}u(t)] = \frac{1}{5+i\omega}$$

จากคุณสมบัติข้างต้น เราได้ว่า

$$\hat{F}\,[t\ell^{-5t}u(t)] = -\frac{1}{i}\,\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{5+i\omega}\right)$$

$$= -\frac{1}{i}\quad\frac{(-i)}{(5+i\omega)^2}$$

$$= \frac{1}{(5+i\omega)^2}$$

<u>ตัวอย่าง 2.3.12</u>

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t) = t\ell^{-|t|}$

<u>ผลเฉลย</u>

จากตัวอย่าง 2.1.1

$$\hat{F}\,[\ell^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}$$

จากคุณสมบัติข้างต้น เราได้ว่า

$$\hat{F}\,[t\ell^{-|t|}] = -\frac{1}{i}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{i}\quad\frac{(-2\omega)}{(1+\omega^2)^2}$$

$$= -\frac{4\omega i}{(1+\omega^2)^2}$$

<u>ตัวอย่าง 2.3.13</u>

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t) = t^2\,\ell^t\,u(-t)$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$\hat{F}\,[\ell^{t}u(-t)] = \int_{-\infty}^{0} \ell^{t}\,\ell^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{1-i\omega}$$

จากคุณสมบัติข้างต้น

$$\hat{F}\,[t^{2}\,\ell^{t}\,u(-t)] = \frac{1}{(-i)^{2}}\,\frac{d^{2}}{d\omega^{2}}\left(\frac{1}{1-i\omega}\right)$$

แต่

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-i\omega}\right) = \frac{i}{(1-i\omega)^{2}}$$

และ

$$\frac{d^{2}}{d\omega^{2}}\left(\frac{1}{1-i\omega}\right) = \frac{-2}{(1-i\omega)^{3}}$$

ดังนั้น

$$\hat{F}\,[t^{2}\ell^{t}u(-t) = \frac{-2}{(1-i\omega)^{3}}$$

จากคุณสมบัติต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้ว ทำให้สามารถสร้างตารางผลการแปลงฟูริเยร์ได้ ดังตาราง 2.3.1 นี้

ตาราง 2.3.1

ผลการแปลงฟูริเยร์

	$f(t)$	$\hat{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = F(\omega)$
1	$u(t-c_1) - u(t-c_2)$, $c_1 < c_2$	$\dfrac{e^{-i\omega c_1} - e^{-i\omega c_2}}{i\omega}$
2	$u(t+c) - u(t-c)$ $c > 0$	$\dfrac{2 \sin c\omega}{\omega}$
3	$e^{at}[u(t-c_1) - u(t-c_2)]$, $c_1 < c_2$	$\dfrac{e^{(a-i\omega)c_2} - e^{(a-i\omega)c_1}}{a-i\omega}$
4	$e^{at}u(t)$, $Re(a) < 0$	$\dfrac{1}{i\omega - a}$
5	$e^{at}u(t-c)$, $Re(a) < 0$	$\dfrac{e^{(a-i\omega)c}}{i\omega - a}$
6	$e^{-at}u(-t)$, $Re(a) < 0$	$\dfrac{-1}{i\omega + a}$
7	$e^{a\|t\|}$, $Re(a) < 0$	$\dfrac{-2a}{\omega^2 + a^2}$
8	$e^{at}u(t)-e^{-at}u(-t)$, $Re(a) < 0$	$\dfrac{-2i\omega}{\omega^2 + a^2}$
9	$t^k e^{at}u(t), k=1,2,\ldots,$ $Re(a) < 0$	$\dfrac{k!}{(i\omega - a)^{k+1}}$
10	$e^{ibt}[u(t+c) - u(t-c)]$, $c > 0$	$\dfrac{2 \sin c(\omega - b)}{\omega - b}$

ตาราง 2.3.1

ผลการแปลงฟูริเยร์

	$f(t)$	$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = F(\omega)$
11	$\frac{1}{a^2+t^2}$, $Re(a) < 0$	$-\frac{\pi}{a}e^{a\lvert\omega\rvert}$
12	$\frac{t}{(a^2+t^2)^2}$, $Re(a) < 0$	$\frac{i\omega\pi}{2a}e^{a\lvert\omega\rvert}$
13	$\frac{e^{ibt}}{a^2+t^2}$, $Re(a) < 0$, b real	$-\frac{\pi}{a}e^{a\lvert\omega-b\rvert}$
14	$\frac{\cos bt}{a^2+t^2}$, $Re(a) < 0$, b real	$-\frac{\pi}{2a}[e^{a\lvert\omega-b\rvert}+e^{a\lvert\omega+b\rvert}]$
15	$\frac{\sin bt}{a^2+t^2}$, $Re(a) < 0$, b real	$-\frac{\pi}{2ai}[e^{a\lvert\omega-b\rvert}-e^{a\lvert\omega+b\rvert}]$
16	$t[u(t) - u(t-c)]$	$\frac{1 - e^{-i\omega c}(1+i\omega c)}{-\omega^2}$
17	$t^k[u(t) - u(t-c)]$, $k = 1,2,\ldots$	$\frac{k! - e^{-i\omega c}g_k(i\omega c)}{(i\omega)^{k+1}}$ $g_k(x)=x^k+kx^{k-1}+\ldots+k!$
18	$t[u(t) - u(t-c)] + (2c-t)$ $\times [u(t-c) - u(t-2c)]$	$\frac{1 - 2e^{-i\omega c} + e^{-2i\omega c}}{-\omega^2}$
19	e^{-at^2}, $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\omega^2/(4a)}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. ถ้า $\hat{F}\,[f(t)] = F(\omega)$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\hat{F}\,[\ell^{ibt/a} f(t/a)] = a\,F(a\omega+b) \quad , \quad a > 0$$

2. จงแสดงว่า

2.1 $\hat{F}_c\,[f(at)] = \frac{1}{a} F_c\,(\omega/a) \quad , \quad a > 0$

2.2 $\hat{F}_s\,[f(at)] = \frac{1}{s} F_c\,(\omega/a) \quad , \quad a > 0$

3. จงแสดงว่า

3.1 $\hat{F}_c\,[f(t)\cos at] = \frac{1}{2}\,[F_c\,(\omega+a) + F_c(\omega-a)]$

3.2 $\hat{F}_s\,[f(t)\cos at] = \frac{1}{2}\,[F_s\,(\omega+a) + F_s(\omega-a)]$

3.3 $\hat{F}_c\,[f(t)\sin at] = \frac{1}{2}\,[F_s\,(\omega+a) + F_s(\omega-a)]$

3.4 $\hat{F}_s\,[f(t)\sin at] = \frac{1}{2}\,[F_c\,(\omega+a) + F_c(\omega-a)]$

4. จงแสดงว่า

4.1 $\hat{F}_c\,[f''(t)] = -\omega^2\,F_c(\omega) - f'(0)$

4.2 $\hat{F}_s\,[f''(t)] = -\omega^2 F_s(\omega) + \omega f(0)$

4.3 $\hat{F}_c\,[f^{(4)}(t)] = \omega^4 F_c(\omega) + \omega^2 f'(0) - f^{(3)}(0)$

4.4 $\hat{F}_s\,[f^{(4)}(t)] = \omega^4 F_s(\omega) - \omega^3 f(0) + \omega f''(0)$

5. ใช้คุณสมบัติต่าง ๆ เพื่อหาผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

5.1 $f(t) = \ell^{-ct}\, u(t)$

5.2 $f(t) = (1-t)\ell^{-|t|}$

5.3 $f(t) = t\, \ell^{-t}\, u(t)$

5.4 $f(t) = \ell^{bt-t^2}$

5.5 $f(t) = \ell^{t}\, u(-t)$

5.6 $f(t) = t^2\, \ell^{-t^2/2}$

5.7 $f(t) = \ell^{-|t-c|}$

5.8 $f(t) = e^{-t^2/2} \cos st$

5.9 $f(t) = t\, e^{-|t|}$

5.10 $f(t) = \dfrac{1}{1+(t-3)^2}$

5.11 $f(t) = e^{-(t-2)^2/2}$

5.12 $f(t) = e^{-3|t-2|}$

5.13 $f(t) = \begin{cases} e^{-2t} \sin 2t & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$

5.14 $f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$

6. จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ในตาราง 2.3.1 ตามคำแนะนำดังนี้

6.1 หมายเลข 2 จาก หมายเลข 1

6.2 หมายเลข 5 จาก หมายเลข 4

6.3 หมายเลข 6 จาก หมายเลข 4

6.4 หมายเลข 7 จาก หมายเลข 4 และ 6

6.5 หมายเลข 8 จาก หมายเลข 4 และ 6

6.6 หมายเลข 9 จาก หมายเลข 4 โดยหาอนุพันธ์ของทั้ง f และ F เทียบกับตัวแปรเสริม a

6.7 หมายเลข 10 จาก หมายเลข 2

6.8 หมายเลข 11 จาก หมายเลข 7

6.9 หมายเลข 12 จาก หมายเลข 11 , โดยการหาอนุพันธ์

6.10 หมายเลข 13 จาก หมายเลข 11

6.11 หมายเลข 14 และ 15 จาก หมายเลข 13

6.12 หมายเลข 17 โดยคำนวณโดยตรง

6.13 หมายเลข 18 จาก หมายเลข 1

<u>คำตอบ</u>

5

5.1 $\dfrac{1}{c+i\omega}$

5.3 $\dfrac{1}{1+i\omega^2}$

5.5 $\frac{1}{1-i\omega}$

5.7 $\frac{2}{1+\omega^2} \ell^{-ic\omega}$

5.9 $\frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}$

5.10 $\pi \ell^{3i\omega} \ell^{-|\omega|}$

5.11 $\ell^{2i\omega} \ell^{-\omega^2/2}$

5.12 $\frac{6\ell^{2i\omega}}{9+\omega^2}$

5.13 $\frac{2(2-i\omega)}{4+\omega^2}$