<u>ตัวอย่าง</u> 2.2.2

ให้

$$f(t) = \begin{cases} a \cos at \;, & -\frac{\pi}{2a} \leq t \quad \frac{\pi}{2a} \\ 0 \;, & t \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก ฟังก์ชันนี้ สามารถหาผลการแปลงฟูริเยร์ได้ โดย

$$F(\omega) = \int_{-\pi/2a}^{\pi/2a} a \cos at \; \ell^{-i\omega t} \, dt$$

$$= \frac{2a^2}{a^2-\omega^2} \cos \frac{\pi\omega}{2a}$$

ดังนั้น ผลการแปลงผกผัน

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \, PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a^2}{a^2-\omega^2} \cos \frac{\pi\omega}{2a} \, \ell^{i\omega t} \, d\omega$$

ซึ่งอินทิกรัลนี้ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ เนื่องจาก สำหรับ $\omega > a$

$$\left| \frac{2a^2}{a^2-\omega^2} \cos \frac{\pi\omega}{2a} \, \ell^{i\omega t} \right| \leq \frac{2a^2}{\omega^2-a^2}$$

เพราะว่า $F(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคู่ ในที่สุดจะได้

$$f(t) = \frac{2a^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{a^2-\omega^2} \cos \frac{\pi\omega}{2a} \, d\omega$$

การที่จะหาค่าอินทิกรัลนี้ออกมานั้น เป็นการยุ่งยากพอควร จะต้องใช้ความรู้การอินทิเกรตในเรื่องฟังก์ชันเชิงซ้อนมาช่วย ซึ่งจะขอละไว้

<u>ตัวอย่าง</u> 2.2.3

$$\text{ให้}\quad f(t)=\begin{cases} \ell^{-at} & , \quad t>0 \\ \frac{1}{2} & , \quad t=0 \quad ; a>0 \\ 0 & , \quad t<0 \end{cases}$$

<u>ผลเฉลย</u>

สามารถใช้ทฤษฎีบท 2.2.2 หาผลการแปลงฟูริเยร์ได้

$$F(\omega) = \int_0^\infty \ell^{-at}\,\ell^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{a+i\omega}$$

และผลการแปลงผกผันคือ

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\,PV\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell^{i\omega t}}{a+i\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,PV\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2} + i\frac{a\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{a^2+\omega^2}\right]d\omega$$

ซึ่งจะพบว่า ส่วนจินตภาพ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}\,d\omega$$

ทำนองเดียวกับตัวอย่าง 2.2.2 เราจะไม่หาค่าอินทิกรัลนี้แต่เราจะพิจารณาฟังก์ชันตามสมการข้างบนนี้ เมื่อ $t = 0$ จะทำให้ได้ว่า

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\,d\omega}{a^2+\omega^2}$$

หรือ

$$\int_0^\infty \frac{a\,d\omega}{a^2+\omega^2} = \pi f(0) = \frac{\pi}{2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.2.4

ให้ $\quad f(t) = \dfrac{\sin t}{\pi t}$

<u>ผลเฉลย</u>

โดยการหาผลการแปลงฟูริเยร์ จะพบว่า

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{\pi t}\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{\pi t} \cos \omega t \, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{\pi t} \sin \omega t \, dt$$

ซึ่งอินทิกรัลที่สองทางขวามือเป็นศูนย์ (ตัวถูกอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันคี่) ดังนั้น

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{\pi t} \cos \omega t \, dt$$

ทำนองเดียวกับตัวอย่าง 2.2.1 สามารถหาค่าอินทิกรัลได้เป็น

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| < 1 \\ \dfrac{1}{2} & , \quad \omega = \pm 1 \\ 0 & , \quad |\omega| > 1 \end{cases}$$

และจากสูตรการแปลงผกผัน จะพบว่า

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ell^{i\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \ell^{i\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \ell^{i\omega t} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\sin t}{\pi t}$$

<u>หมายเหตุ</u>

สำหรับฟังก์ชันในตัวอย่าง 2.2.4 นี้ ไม่สอดคล้องทฤษฎีบท 2.2.2 แต่สามารถหาผลการแปลงฟูริเยร์และผลการแปลงผกผันได้ เพราะดังได้กล่าวแล้วว่าเงื่อนไขในทฤษฎีบทนั้นเป็นแค่เงื่อนไขพอเพียงเท่านั้น ยังมีฟังก์ชันอีก 2 แบบ ซึ่งสามารถหาผลการแปลงฟูริเยร์ได้คือ (ดูได้จากหนังสือของ E. Oran Brigham)

1. ถ้า $f(t) = g(t)\sin(at+b)$ โดย a และ b เป็นค่าคงที่ โดย $g(t+c) < g(t)$ และถ้าสำหรับ $|t| > \lambda > 0$ ฟังก์ชัน $\frac{f(t)}{t}$ อินทิเกรตได้อย่างสัมบูรณ์ แล้ว $f(t)$ มีผลการแปลงฟูริเยร์ และสามารถหาผลการแปลงผกผันได้ด้วย

2. ได้แก่ฟังก์ชัน พวกฟังก์ชันอิมพัลซ์

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงแสดงว่า

$$1+2\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}\, t}$$

(แนะนำ : ใช้ $\cos t = \dfrac{\ell^{it}+\ell^{-it}}{2}$, $\sin t = \dfrac{\ell^{it}-\ell^{-it}}{2}$

และ $1+r+r^2+\ldots+r^n = \dfrac{r^{n+1}-1}{r-1}$, $r \neq 1$)

2. กำหนดให้ $f(t) = (1-|t|)\, u(1-|t|)$ จากแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 2. เราได้ว่า

$$\hat{F}\left[f(t) \right] = \frac{4\sin^2 \omega/2}{\omega^2}$$

จงใช้ผลที่ได้แสดงว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi$$

3.

ก) จงหาผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์ของ ℓ^{-mt} , $m > 0$

ข) ใช้ผลจากข้อ ก) หาค่าของ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos at}{m^2+t^2}\, dt$$

4.

ก) จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ซายน์ของ $e^{-|t|}$

ข) ใช้ผลจากข้อ ก) หาค่าของ

$$\int_0^{\infty} t \frac{\sin mt}{1+t^2} dt$$

2.3 คุณสมบัติของผลการแปลงฟูริเยร์

ในการคำนวณหาผลการแปลงโดยตรง บ่อยครั้งจะพบว่าการอินทิเกรตค่อนข้างยุ่งยาก และบางครั้งก็เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน อย่างไรก็ตามสามารถทำให้สะดวกขึ้นเมื่อทราบผลการแปลงของฟังก์ชันเบื้องต้น โดยใช้คุณสมบัติต่าง ๆ ซึ่งจะได้กล่าวต่อไปนี้ แต่ขอให้ระมัดระวังการใช้สัญลักษณ์ด้วย เมื่อเขียน $\hat{F}[f] = F(\omega)$ หมายความว่า f ต้องมีคุณสมบัติตามทฤษฎีบท 2.2.1 นั่นคือต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และอินทิเกรตได้อย่างสัมบูรณ์

<u>ทฤษฎีบท</u> 2.3.1

ถ้า $\hat{F}[f] = F(\omega)$ โดยที่ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง แล้วส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ $F(\omega)$ คือ

$$\mathrm{Re}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$$

และ

$$\mathrm{Im}(F) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$$

ยิ่งกว่านั้น ยังได้ความสัมพันธ์ของค่าสังยุค (conjugate) ของฟังก์ชัน $F(\omega)$ เป็น

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

เนื่องจาก

$$\hat{F}\,[f] = f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

ดังนั้น

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$$

นั่นคือ

$$Re(F) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$$

และ

$$Im(F) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$$

ซึ่งจะเห็นว่า $Re(F(\omega)) = Re(F(-\omega))$ นั่นคือ เป็นฟังก์ชันคู่

และ $Im(F(\omega)) = -Im(F(-\omega))$ นั่นคือ เป็นฟังก์ชันคี่

เพราะฉะนั้น ถ้าเราเขียน $F(\omega)$ ใหม่เป็น

$$F(\omega) = Re(F(\omega)) + i\, Im(F(\omega))$$

จะพบว่า

$$F(-\omega) = Re\, F(\omega) - i\, Im\, F(\omega)$$

$$= \overline{F(\omega)}$$

ข้อสังเกต

1. ถ้าฟังก์ชัน f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ แล้ว

$$\mathrm{Re}(F(\omega)) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$\mathrm{Im}(F(\omega)) = 0$$

ดังนั้น $F(\omega)$ ที่ได้จะเป็นฟังก์ชันจริง (ดูตัวอย่าง 2.1.1) แต่ถ้าฟังก์ชัน f(t) เป็นฟังก์ชันคี่ แล้ว

$$\mathrm{Re}(F(\omega)) = 0$$

$$\mathrm{Im}(F(\omega)) = -2\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$$

ดังนั้น $F(\omega)$ จะอยู่ในรูปจินตภาพ (ดูตัวอย่าง 2.1.2)

2 ถ้าเราให้

$$f(t) = f_{\ell}(t) + f_{o}(t)$$

โดย

$$f_{\ell}(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}$$

$$f_{o}(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

แล้ว

$$\mathrm{Re}\,(F(\omega)) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f_{\ell}(t)\cos\omega t\,dt$$

$$\mathrm{Im}\,(F(\omega)) = -2\int_{-\infty}^{\infty} f_{o}(t)\sin\omega t\,dt$$

ทฤษฎีบท 2.3.2

ถ้า $\hat{F}[f_1] = F_1(\omega)$ และ $\hat{F}[f_2] = F_2(\omega)$ แล้ว

$$\hat{F}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \hat{F}[f_1] + c_2 \hat{F}[f_2]$$
$$= c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่

ข้อพิสูจน์

เนื่องจาก

$$\hat{F}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t))\ell^{-i\omega t}dt$$

$$= c_1\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\ell^{-i\omega t}dt+c_2\int_{-\infty}^{\infty} f_2(f)\ell^{-i\omega t}dt$$

$$= c_1 \hat{F}[f_1] + c_2 \hat{F}[f_2]$$

ตัวอย่าง 2.3.1

ให้ $f(t) = 3\ell^{-|t|} + \ell^{-t^2}$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$

ผลเฉลย

เนื่องจากตัวอย่างที่ 2.1.1

$$\hat{F}[\ell^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}$$

และจากตัวอย่างที่ 2.1.5

$$\hat{F}\,[\ell^{-t^2}] = \sqrt{\pi}\ \ell^{-\omega^2/4}$$

ดังนั้น

$$\hat{F}\,[3\ell^{-|t|}+\ell^{-t^2}] = \frac{6}{1+\omega^2} + \sqrt{\pi}\ \ell^{-\omega^2/4}$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 2.3.3

ถ้า $\hat{F}\,[f] = F(\omega)$ แล้ว

$$\hat{F}\,[f(t-c)] = \ell^{-i\omega c}\,\hat{F}\,[f(t)]$$

สำหรับค่าคงที่ c ใด ๆ

<u>ข้อพิสูจน์</u>

เนื่องจาก $f(t)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และ

$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt$ หาค่าได้ ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} \left| (f-c) \right| dt$ หาค่าได้ด้วย

$$\hat{F}\,[f(t-c)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-c)\,\ell^{-i\omega t}\,dt$$

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $x = t-c$ ฉะนั้น

$$\hat{F}\,[f(t-c)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\ell^{-i\omega(x+c)}\,dx$$

$$= \ell^{-i\omega c}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \ell^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \ell^{-i\omega c}\ \hat{F}\,[f]$$

ตัวอย่าง 2.3.2

ให้ $f(t) = \begin{cases} -\ell^{2t-1} & , \ t < 0 \\ \ell^{-2t+1} & , \ t > 0 \end{cases}$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$

ผลเฉลย

จากตัวอย่างที่ 2.1.2

ถ้าให้

$$f_1(t) = \begin{cases} -\ell^{2t} & , \ t < 0 \\ \ell^{-2t} & , \ t > 0 \end{cases}$$

แล้ว

$$\hat{F}\,[f_1(t)] = \frac{-2\omega i}{4+\omega^2}$$

จากทฤษฎีบทข้างต้น จะพบว่า $c = \frac{1}{2}$

ดังนั้น

$$\hat{F}\,[f(t)] = \hat{F}\,[f_1(t-\tfrac{1}{2})] = \ell^{-i\omega/2}\ \frac{(-2\omega i)}{4+\omega^2}$$

ทฤษฎีบท 2.3.4

ถ้า $\hat{F}[f(t)] = F(\omega)$ แล้ว

$$\hat{F}[\ell^{i\alpha t}f(t)] = F(\omega-\alpha)$$

โดย α เป็นค่าคงที่ที่เป็นจำนวนจริง

ข้อพิสูจน์

เนื่องจาก

$$\hat{F}[\ell^{i\alpha t}f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}[\ell^{i\alpha t}f(t)]\ell^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\ell^{-i(\omega-\alpha)t}dt$$

$$= F(\omega-\alpha)$$

ตัวอย่าง 2.3.3

1. ให้ $f(t) = \begin{cases} -\ell^{-t} & , \quad t > 0 \\ \ell^{2t} & , \quad t < 0 \end{cases}$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$

2. ถ้า $g(t) = \ell^{-5it}\, f(t)$ แล้ว

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $g(t)$

ผลเฉลย

1. เนื่องจาก

$$\hat{F}\,[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}\,dt$$

ดังนั้น

$$\hat{F}\,[f(t)] = \int_{-\infty}^{0} \ell^{2t}\,\ell^{-i\omega t}\,dt+\int_{0}^{\infty} \ell^{-t}\,\ell^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \ell^{(2-i\omega)t}\,dt+\int_{0}^{\infty} \ell^{-(1+i\omega)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega}$$

$$= \frac{3}{2+i\omega+\omega^2}$$

2. เนื่องจาก $g(t) = \ell^{-5it}\,f(t)$

จากทฤษฎีบทข้างต้น $\alpha = -5$
ดังนั้น

$$\hat{F}\,[g(t)] = \frac{3}{2+i(\omega+5)+(\omega+5)^2}$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 2.3.5

ถ้า $\hat{F}[f] = F(\omega)$ แล้ว

$$\hat{F}[f(ct)] = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่

<u>ข้อพิสูจน์</u>

สำหรับ $c > 0$

$$\hat{F}[f(ct)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)\ell^{-i\omega t}\, dt$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $x = ct$

$$\hat{F}[f(ct)] = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ell^{-i\frac{\omega}{c}x}\, dx$$

$$= \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

สำหรับ $c < 0$

$$\hat{F}[f(ct)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)\ell^{-i\omega t}\, dt$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $x = ct$

$$\hat{F}[f(ct)] = \frac{1}{c}\int_{\infty}^{-\infty} f(x)\ell^{-i\frac{\omega}{c}x}\, dx$$

$$= \frac{1}{-c}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\frac{\omega}{c}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{|c|}F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 2.3.6

ถ้า $\hat{F}[f(t)] = F(\omega)$ แล้ว

$$\hat{F}[f(-t)] = F(-\omega)$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

เนื่องจาก

$$\hat{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\ell^{-i\omega t}dt$$

โดยการเปลี่ยน -t เป็น t ในอินทิกรัลขวามือ

$$\hat{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)]\ell^{i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)]\ell^{-i(-\omega)t}dt$$

$$= F(-\omega)$$

ตัวอย่าง 2.3.4

ให้ $f(t) = \ell^{-at^2}$, $a > 0$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$

ผลเฉลย

จากตัวอย่าง 2.1.5

$$\hat{F}[\ell^{-t^2}] = \sqrt{\pi}\,\ell^{-\omega^2/4}$$

ดังนั้นจากทฤษฎีบทข้างต้น $c = \sqrt{a}$

$$\hat{F}[\ell^{-at^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,\ell^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

ทฤษฎีบท 2.3.7

ถ้า $\hat{F}[f(t)] = F(\omega)$; $f(t)$ เป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ แล้ว

$$\hat{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

ข้อพิสูจน์

เนื่องจาก $f(t)$ สอดคล้อง ทฤษฎีบท 2.2.1 จึงสามารถหาผลการแปลงผกผันได้

นั่นคือ $2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\ell^{i\omega t}\,d\omega$

โดยการเปลี่ยน t เป็น $-t$

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, \ell^{-i\omega t}\, d\omega$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปร t และ ω จะได้

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \hat{F}\,[F(t)]$$

<u>ข้อสังเกต</u>

จาก $2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, \ell^{-i\omega t}\, d\omega$

นั่นคือ $2\pi f(-t) = \hat{F}\,[F(\omega)] = \hat{F}\left(\hat{F}[f(t)] \right)$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.5

ให้ $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$

<u>ผลเฉลย</u>

จากตัวอย่างที่ 2.1.1

$$\hat{F}\,[\ell^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

จากคุณสมบัติตามทฤษฎีบท 2.3.7 จะได้

$$\hat{F}\left[\frac{2a}{a^2+t^2}\right] = 2\pi\, \ell^{-a|-\omega|} = 2\pi\, \ell^{-a|\omega|}$$

ดังนั้น จากคุณสมบัติเชิงเส้นตามทฤษฎีบทที่ 2.3.2

$$\hat{F}\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right] = \frac{\pi}{a}\, \ell^{-a|\omega|}$$

นั่นคือ

$$\hat{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \pi\, \ell^{-|\omega|}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.6

ให้ $f(t) = \dfrac{\sin 2t}{t}$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$

<u>ผลเฉลย</u>

จากตัวอย่างที่ 2.1.3

$$\hat{F}[f(t)] = 2\,\frac{\sin \omega}{\omega}$$

$$\text{โดย } f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = \pm 1 \\ 0 & , \quad |t| > 1 \end{cases}$$

จากทฤษฎีบท 2.3.7 จะได้

$$\hat{F}\left[\frac{2\sin t}{t}\right] = 2\pi\, f(-\omega)$$

โดย

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad \omega = \pm 1^{*} \\ 0 & , \quad |\omega| > 1 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันคู่ $(f(-\omega) = f(\omega))$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{F}\left[\frac{2\sin t}{t}\right] = 2\pi\, f(\omega)$$

จากทฤษฎีบท 2.3.5 จะได้

$$\hat{F}\left[\frac{2\sin 2t}{2t}\right] = \frac{2\pi}{2}\, f\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\hat{F}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right] = \pi\, f\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} 1 & , \quad \left|\frac{\omega}{2}\right| < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad \frac{\omega}{2} = \pm 1 \\ 0 & , \quad \left|\frac{\omega}{2}\right| > 1 \end{cases}$$

หรือ

$$\hat{F}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right] = \pi\, f_1(\omega)$$