<u>คำตอบ</u>

1.

1.1. $\dfrac{2}{(1+i\omega)^3}$

1.2 $\dfrac{1}{(1+i\omega)^2+1}$

1.3. $\dfrac{3}{2+\omega^2+i\omega}$

1.4 $\begin{cases} \dfrac{i(\ell^{-ib\omega}-\ell^{-ia\omega})}{\omega} & , \omega \neq 0 \\ b - a & , \omega = 0 \end{cases}$

1.5 $\dfrac{2\sin 2\omega}{\omega}$

1.6 $\dfrac{8}{i\omega}(1-\cos\omega)$

1.7 $\dfrac{1}{2-i\omega} + \dfrac{1}{3+i\omega}$

1.8 $\dfrac{4\omega}{i(1+\omega^2)^2}$

1.9 $\dfrac{1}{1+(2+\omega)^2} + \dfrac{1}{1+(2-\omega)^2}$

1.10 $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2}{1+\omega^2} + \dfrac{1}{1+(\omega-2)^2} + \dfrac{1}{1+(\omega+2)^2}\right]$

3.

3.1 $F_c(\omega) = \dfrac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$, $F_s(\omega) = \dfrac{2\omega}{(1+\omega^2)^2}$

3.3 $F_c(\omega) = \dfrac{\cos\frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2}$, $F_s(\omega) = \dfrac{\omega-\sin\frac{\pi\omega}{2}}{\omega^2-1}$

2.2 ทฤษฎีบทของผลการแปลงฟูริเยร์ (Theory of Fourier Transform)

ที่แล้วมาเรานิยามผลการแปลงฟูริเยร์ว่าเป็นการกระทำชนิดหนึ่งซึ่งกระทำให้ฟังก์ชัน $f(t)$ กลายเป็นฟังก์ชัน $F(\omega)$ ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาความเป็นมาของ $F(\omega)$ โดยเริ่มจากอนุกรมฟูริเยร์ กล่าวโดยคร่าว ๆ คือ อนุกรมฟูริเยร์บนช่วง $[-L,L]$ สามารถแทนฟังก์ชันบนช่วง $[-L,L]$ และใช้แทนส่วนขยายที่เป็นคาบของฟังก์ชัน(the periodic extension of function) ภายนอกช่วงนี้ แต่ถ้าโดเมนของฟังก์ชัน คือ $(-\infty,\infty)$ แล้ว เป็นไปไม่ได้ที่จะแทนฟังก์ชันตลอดโดเมนด้วยอนุกรมฟูริเยร์ นอกเสียจากฟังก์ชันเป็นคาบ แต่อย่างไรก็ตามกรณีเช่นนี้ จะสามารถแทนได้ด้วยอินทิกรัล โดยเราศึกษาจากการขยายช่วงของอนุกรมฟูริเยร์ ดังนี้

<u>อินทิกรัลฟูริเยร์</u> : (The Fourier integral)

จากสูตรของอนุกรมฟูริเยร์ ในรูปเชิงซ้อน

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\pi t/L} \quad , -L \le t \le L \qquad (2.2.1)$$

โดย

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-in\pi t/L}\, dt \qquad (2.2.2)$$

สมมุติตัวแปรใหม่

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \qquad , n = 0, \pm 1, \ldots$$

ทำให้ได้ว่า

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}$$

ดังนั้น จากสมการ (2.2.1) และ (2.2.2) เขียนได้เป็น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\omega_n)\, e^{i\omega_n t}\, \Delta\omega_n$$

โดย

$$F_L(\omega) = \int_{-L}^{L} f(t)\, \ell^{-i\omega t}\, dt \;,\; c_n = \frac{1}{2\pi} F_L(\omega_n)\, \Delta\omega_n$$

ถ้าขยายช่วงให้ $L\to\infty$ ($\Delta\omega_n \to 0$) จะได้ว่า

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, \ell^{i\omega t}\, d\omega \qquad (2.2.3)$$

โดย

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \ell^{-i\omega t}\, dt \qquad (2.2.4)$$

สมการ (2.2.3) และ (2.2.4) ที่ได้นี้ เป็นผลมาจากการขยายช่วงในอนุกรมฟูริเยร์จาก (2.2.1) และ (2.2.2) ดังนั้น ถ้าเราเขียนสมการ (2.2.3) และ (2.2.4) เข้าด้วยกัน จะได้

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \ell^{i\omega(t-\tau)}\, d\tau\, d\omega \qquad (2.2.5)$$

ซึ่งเรียกสมการ (2.2.5) นี้ว่า "อินทิกรัลฟูริเยร์"

<u>ข้อสังเกต</u>

1. สมการ (2.2.3) และ (2.2.4) ก็คือคู่ของผลการแปลงฟูริเยร์นั่นเอง

2. ถ้าให้ $c_n = F_L(\omega_n)\Delta\omega_n$ โดย $F_L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(t)\ell^{-i\omega t}\, dt$

แล้วจะได้

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\omega_n)\, \ell^{i\omega_n t}\, \Delta\omega_n \qquad (2.2.6)$$

โดย

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}\,dt \qquad (2.2.7)$$

หรือถ้าให้ $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_L(\omega_n)$ โดย $F_L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L} f(t)\ell^{-i\omega t}\,dt$

แล้วจะได้

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\omega_n)\,\ell^{i\omega_n t}\,\Delta\omega_n$$

เมื่อให้ $L \to \infty$ จะได้ว่า

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ell^{i\omega t}\,d\omega \qquad (2.2.8)$$

โดย

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}\,dt \qquad (2.2.9)$$

ด้วยเหตุนี้ อาจจะใช้คู่ของผลการแปลงฟูริเยร์ตามสมการ (2.2.6), (2.2.7) หรือ (2.2.8) ,(2.2.9) ก็ได้

ทฤษฎีบท 2.2.1

ถ้าฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ สำหรับ $-\infty<t<\infty$ และให้

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ (นั่นคือ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ หาค่าได้) แล้ว

ผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$,

$$\hat{F}\ [f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}dt \qquad (2.2.10)$$

จะหาค่าได้สำหรับ $-\infty < \omega < \infty$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

เพราะว่า $|f(t)\ell^{-i\omega t}| = |f(t)|$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\ell^{-i\omega t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$

เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ หาค่าได้

เพราะฉะนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\ell^{-i\omega t}|\ dt$ หาค่าได้

นั่นคือ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}\ dt$ หาค่าได้

<u>ข้อสังเกต</u>

เงื่อนไขข้างต้น เป็นแค่เงื่อนไขพอเพียงเท่านั้น นั่นคือสำหรับ ฟังก์ชันที่ไม่สอดคล้องเงื่อนไขดังทฤษฎีบท 2.2.1 ก็อาจหาผลการแปลงฟูริเยร์ได้

ทฤษฎีบท 2.2.2

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ สำหรับ $-\infty < t < \infty$ และให้

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ แล้วฟังก์ชัน $F(\omega)$ ตามสมการ (2.2.10)

จะต่อเนื่องสำหรับทุกค่า ω และยิ่งกว่านั้น อินทิกรัล

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, \ell^{i\omega t} d\omega$$

จะลู่เข้าสู่ $\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$ สำหรับทุกค่า t นั่นคือ

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} F(\omega)\ell^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\ PV\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ell^{i\omega t} d\omega = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$$

ก่อนจะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ เพื่อช่วยให้การพิสูจน์ดังกล่าวกระทัดรัดขึ้น

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2.1

ถ้า $g(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ สำหรับ $a \le t \le b$ แล้ว

$$\lim_{u\to\infty} \int_{a}^{b} g(t) \sin ut\, dt = 0$$

ข้อพิสูจน์

แบ่งช่วงการอินทิเกรตออกเป็น N ช่วง ณ จุด t_k และกำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดในรูปค่าคงที่ A_k นั่นคือ

$$f(t) = \begin{cases} A_1 & , t_1 = a \le t < t_2 \\ A_2 & , t_2 < t < t_3 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ A_N & , t_N < t \le t_{N+1} = b \end{cases}$$

ซึ่งฟังก์ชัน $f(t)$ จะเป็นค่าโดยประมาณของ $g(t)$, ให้ ε เป็นเลขจำนวนบวกใด ๆ จะได้ว่า

$$\int_a^b \left|g(t)-f(t)\right| dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

สำหรับทุกค่าของ u จะพบว่า

$$\left|\int_a^b g(t)\sin ut\, dt\right| - \left|\int_a^b f(t)\sin ut\, dt\right|$$

$$\leq \left|\int_a^b [g(t)-f(t)]\sin ut\, dt\right| \leq \int_a^b \left|g(t)-f(t)\right| dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

ดังนั้น

$$\left|\int_a^b g(t)\sin ut\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b f(t)\sin ut\, dt\right|$$

แต่อินทิกรัลทางขวามือ สามารถแทนได้ด้วย

$$\left|\int_a^b f(t)\sin ut\, dt\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} A_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin ut\, dt\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{N} A_k \frac{\cos ut_k - \cos ut_{k+1}}{u}\right| < \frac{2NM}{|u|}$$

โดยที่ M เป็นขอบเขตบน (upper bound) ของเซต A_k , จำนวน N และ M มีค่าแน่นอน และถ้า

$$|u| > \frac{4NM}{\varepsilon}$$

จะได้

$$\frac{2NM}{|u|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\left| \int_a^b g(t) \sin ut \, dt \right| < \varepsilon$$

นั่นคือ

$$\lim_{u \to \infty} \int_a^b g(t) \sin ut \, dt = 0$$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. ทฤษฎีบทนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับอินทิกรัล $\int_a^b g(t) \cos ut \, dt$

2. เราอาจจะสังเกตง่าย ๆ ว่า ถ้า u มีค่าเพิ่มขึ้น พื้นที่ของ sin ut และ cos ut บนช่วงจำกัด จะมีค่าน้อยลง (เพราะคาบของฟังก์ชันสั้นลง) จึงทำให้อินทิกรัลมีค่าเข้าใกล้ศูนย์

<u>ทฤษฎีบทประกอบ 2.2.2</u>

ถ้า g(t) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ สำหรับ $a \leq t < \infty$ และ

$\int_a^\infty |g(t)| dt$ หาค่าได้ แล้ว

$$\lim_{u \to \infty} \int_a^\infty g(t) \sin ut \, dt = 0$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\int_a^\infty |g(t)|dt$ หาค่าได้ ดังนั้น เราสามารถเลือก b ให้ใหญ่

พอที่

$$\int_a^\infty |g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.2.1 สำหรับ u ที่ใหญ่พอ จะได้ว่า

$$\left| \int_a^b g(t) \sin ut \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ดังนั้น เมื่อ u มีค่าใหญ่พอ แล้ว

$$\left| \int_a^\infty g(t) \sin ut \, dt \right| \leq \left| \int_a^b g(t) \sin ut \, dt \right| +$$

$$\left| \int_b^\infty g(t) \sin ut \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \int_b^\infty \left|g(t)\right| dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

นั่นคือ

$$\lim_{u\to\infty} \int_a^\infty g(t) \sin ut \, dt = 0$$

<u>ทฤษฎีบทประกอบ 2.2.3</u>

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt = \pi$$

ข้อพิสูจน์

เนื่องจาก (ดูแบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 1)

$$1+2\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$$

โดยการอินทิเกรตสมการข้างบน จาก 0 ถึง π จะได้

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = \pi$$

ทฤษฎีประกอบ 2.2.4

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

ข้อพิสูจน์

เนื่องจาก

$$f(t) = \frac{1}{\frac{t}{2}} - \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีขอบเขตบนช่วง $(0, \pi)$

ดังนั้นจากทฤษฎีบทประกอบ 2.2.1 จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left[\sin(n+\frac{1}{2})t\right] \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right] dt = 0$$

โดยการขยายข้าง จะได้

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{2}{t}\sin(n+\frac{1}{2})t\ dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\ dt$$

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.2.3 , อินทิกรัลทางขวามือ มีค่า π
ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{2}{t}\sin(n+\frac{1}{2})t\ dt = \pi$$

นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{(n+\frac{1}{2})t}(n+\frac{1}{2})\ dt = \frac{\pi}{2}$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้ $u = (n+\frac{1}{2})t$ จะได้

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}\ du = \frac{\pi}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\ du = \frac{\pi}{2}$$

ถึงตอนนี้ เราจะกลับไปพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.2

<u>ข้อพิสูจน์</u>

ตอนแรกจะพิสูจน์ว่า ผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$ คือ $F(\omega)$ ต่อเนื่องสำหรับทุกค่าของ ω

เนื่องจาก $\left|f(t)\,\ell^{i\omega t}\right| = \left|f(t)\right|$

โดยเลือกให้ $\left|f(t)\right| = M(t)$

และเนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|\,dt$ หาค่าได้

นั่นคือ $\int_{-\infty}^{\infty} M(t)\,dt$ หาค่าได้

จากทฤษฎีบท 1.3.2

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\ell^{-i\omega t}dt$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอไปยัง $F(\omega)$

และจากทฤษฎีบท 1.3.2

$F(\omega)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ต่อไปนี้เราจะแสดงว่า

$$\frac{1}{2\pi}\,PV\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ell^{i\omega t}d\omega = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

ให้

$$I_b = \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} F(\omega)\ell^{i\omega t}d\omega$$

โดย

$$F(\omega) = \hat{F}\,[f]$$

ดังนั้น

$$I_b = \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\ell^{-i\omega t}\, du\right)\ell^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\ell^{-i\omega(u-t)}\, du\, d\omega$$

โดยการแทนค่า $v = u-t$

$$I_b = \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+v)\ell^{-i\omega v}\, dv\, d\omega$$

เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty} f(t+v)dv$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} f(t+v)\ell^{-i\omega v}dv$

ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ จึงทำให้สลับที่การอินทิเกรตได้

$$I_b(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-b}^{b} f(t+v)\ell^{-i\omega v}\, d\omega\, dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+v)\left(\frac{1}{2}\int_{-b}^{b} \ell^{-i\omega v}\, d\omega\right) dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+v)\left(\frac{1}{2}\ \frac{\ell^{-i\omega v}}{-iv}\right)\Bigg|_{-b}^{b} dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+v)\,\frac{\sin bv}{v}\, dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t+v)\frac{\sin bv}{v}\, dv + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(t+v)\frac{\sin bv}{v}\, dv$$

เนื่องจาก

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin bv}{v}\,dv = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du = \frac{1}{2}$$

และ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin bv}{v}\,dv = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin u}{u}\,du = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t+\ )\,\frac{\sin bv}{v}\,dv = \frac{1}{\pi}\,f(t+\ )$$

และ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(t-\ )\,\frac{\sin bv}{v}\,dv = \frac{1}{\pi}\,f(t-\ )$$

ถ้าพิจารณาผลต่าง $I_b(t) - \frac{1}{2}\left[f(t+\ ) + f(t-\ )\right]$ จะได้

$$I_b(t) - \frac{1}{2}\left[f(t+\ ) + f(t-\ )\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[f(t+v)-f(t+)\right]\frac{\sin bv}{v}\,dv + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\left[(t+v)-ft-)\right]\frac{\sin bv}{v}\,dv$$

อินทิกรัลแรกทางขวามือของสมการ เขียนใหม่ได้เป็น

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{f(t+v)-f(t+)}{v}\sin bv\,dv = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{f(t+v)-ft+)}{v}\sin bv\,dv$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{f(t+v)}{v} \sin bv\, dv - \frac{f(t+)}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin bv}{v}\, dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 g(v)\sin bv\, dv + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{f(t+v)}{v}\sin bv\, dv - \frac{f(t+)}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin bv}{v}\, dv \qquad (2.2.11)$$

โดย

$$g(v) = \frac{f(t+v) - f(t+)}{v}, \quad v > 0$$

ซึ่ง $\lim_{v\to 0} g(v) = \lim_{v\to 0} \frac{f(t+v) - f(t+)}{v} = f'(t+)$

ถ้าให้ $g(v) = f'_+(t)$ เมื่อ $v = 0$ แล้ว $g(v)$ จะเป็นฟังก์ชัน

ต่อเนื่องที่ $v = 0$ และต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ สำหรับ $v \geq 0$ ดังนั้น

อินทิกรัลแรกทางขวามือของ (2.2.11) $\frac{1}{\pi}\int_0^1 g(v) \sin bv\, dv \to 0$

เมื่อ $b \to \infty$ (จากทฤษฎีบทประกอบ 2.2.1)

เนื่องจาก

$$\left| \frac{f(t+v)}{v} \right| \leq \left| f(t+v) \right|$$

ดังนั้น $\frac{f(t+v)}{v}$ อินทิเกรตได้อย่างสัมบูรณ์ จาก 1 ถึง ∞ ทำให้อินทิกรัล

ที่สอง $\to 0$ เมื่อ $b \to \infty$ (จากทฤษฎีบทประกอบ 2.2.2)

คราวนี้มาพิจารณาอินทิกรัลที่สาม ทางขวามือของ (2.2.11)

โดยให้ $u = bv$ จะได้ว่า

$$- \frac{f(t+)}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin bv}{v}\, dv = - \frac{f(t+)}{\pi}\int_b^\infty \frac{\sin u}{u}\, du$$

$$= -\frac{f(t+)}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du - \int_0^b \frac{\sin u}{u}\,du\right]$$

ถ้าให้ $b \to \infty$,

$$\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du - \int_0^b \frac{\sin u}{u}\,du\right] = 0$$

จึงสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[f(t+0)-f(t+)\right]\frac{\sin bv}{u}\,dv \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad b \to \infty$$

ทำนองเดียวกัน อินทิกรัล

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[f(t+v)-f(t-)\right]\frac{\sin bv}{u}\,dv \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad b \to \infty$$

ดังนั้น

$$\lim_{b\to\infty} I_b(t) = \frac{1}{2\pi}\,PV\int_{-\infty}^\infty F(\omega)\ell^{i\omega t}\,d\omega = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

ในทฤษฎีบท 2.2.1 และ 2.2.2 จะสังเกตพบว่า เราเขียน

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\ell^{i\omega t}\,dt$$

และ

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\,PV\int_{-\infty}^\infty F(\omega)\ell^{i\omega t}\,d\omega$$

ทั้งนี้เพราะ

ถ้า $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ หาค่าได้แล้ว $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}\,dt$ จะหาค่าได้แน่นอน

จึงไม่ต้องพิจารณาค่า $PV\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}\,dt$ แต่เมื่อเราคำนวณค่า $F(\omega)$

ได้แล้ว จะหา $f(t)$ เราไม่ทราบว่าอินทิกรัลจะหาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้ ก็ไม่ต้องคำนึงถึงค่าหลัก แต่ถ้าไม่ได้ เราจึงจะคำนึงถึง

<u>ตัวอย่าง 2.2.1</u>

$$\text{ให้ } f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = \pm 1 \\ 0 & , \quad |t| > 1 \end{cases}$$

จงแสดงว่าฟังก์ชันนี้เป็นไปตามทฤษฎีบท 2.2.2

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ หาค่าได้ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันเรียบ ซึ่ง

สอดคล้องทฤษฎีบท ทำให้สามารถหา $F(\omega)$ ได้
จากตัวอย่างที่ 2.1.3 ในหัวข้อ 2.1 เราได้ว่า

$$F(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

ดังนั้น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} PV\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ell^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} PV \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin \omega}{\omega} \cos \omega t \, d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin \omega}{\omega} \sin \omega t \, d\omega \right]$$

โดยที่ส่วนจินตภาพเป็นฟังก์ชันคี่ อินทิกรัลของฟังก์ชันคี่จึงเป็นศูนย์

$$f(t) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} \, d\omega$$

ซึ่งเราสามารถหาค่าอินทิกรัลนี้ได้ จึงไม่ต้องคำนึงค่าหลัก PV

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} \, d\omega \qquad 2.2.12$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \left[\sin(x+y) + \sin(x-y) \right]$$

ดังนั้น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \omega(1+t) + \sin \omega(1-t)}{\omega} \right] d\omega \qquad 2.2.13$$

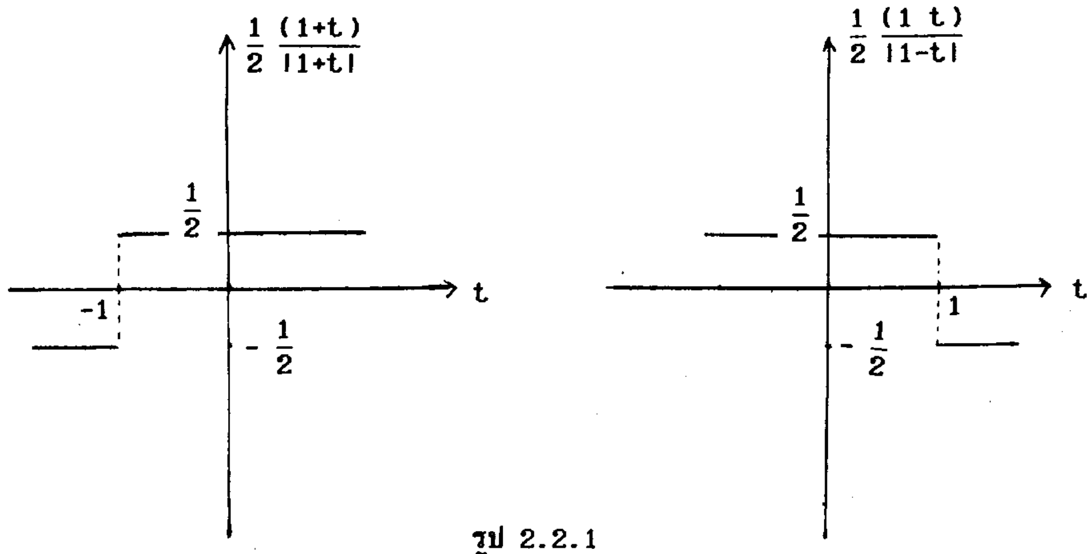
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega(1+t)}{\omega} \, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega(1-t)}{\omega} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}(1+t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega(1+t)}{\omega(1+t)} d\omega + \frac{1}{2\pi}(1-t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega(1-t)}{\omega(1-t)} d\omega$$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Ax}{Ax}\, dx = \frac{\pi}{|A|}$,

$$f(t) = \frac{1}{2}\frac{(1+t)}{|1+t|} + \frac{1}{2}\frac{(1-t)}{|1-t|}$$

ซึ่งจากการพิจารณาค่า t ตามรูป (2.2.1) ทำให้ได้



รูป 2.2.1

$$f(t) = \begin{cases} 1 , & |t|<1 \\ 0 , & |t|>1 \end{cases}$$

สำหรับ t ± 1 , พิจารณาจากอินทิกรัล (2.2.13) จะพบว่า

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{1}{2} , \quad t = \pm 1$$

ดังนั้น

$$f(t)=\begin{cases} 1 & , \quad |t| < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = \pm 1 \\ 0 & , \quad |t| > 1 \end{cases}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. จากตัวอย่างนี้ จะเห็นว่าการคำนวณผลการแปลงฟูริเยร์ผกผันหรือ f(t) โดยตรงนั้น จะยุ่งยากตรงเทคนิคการอินทิเกรต
2. เนื่องจาก f(t) สอดคล้องทฤษฎีบท ทำให้สามารถหาค่าอินทิกรัลบางชนิดได้ดังนี้

   จากสมการ (2.2.12)

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega}\, d\omega$$

   ถ้าให้ $t = 0$, $f(t) = 1$ (จากฟังก์ชันที่กำหนดให้)

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega}\, d\omega$$

   นั่นคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega}\, d\omega = \pi$$

3. ถ้าฟังก์ชันนี้ไม่นิยามที่ $t = \pm 1$

   เราจะเขียนในรูปฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยได้ คือ

$$f(t) = u(t+1) - u(t-1)$$