บทที่ 2
ผลการแปลงฟูริเยร์
(The Fourier Transform)

2.1 บทนิยามและตัวอย่าง

บทนิยาม 2.1.1

กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งนิยามในช่วง $-\infty < t < \infty$ และให้

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad (2.1.1)$$

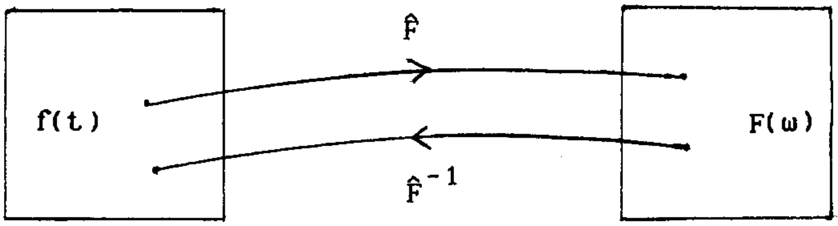
เราจะเรียก $F(\omega)$ นี้ว่า "ผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชัน $f(t)$" ถ้าอินทิกรัลในสมการ (2.1.1) หาค่าได้สำหรับทุกค่า ω และเรียก

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, dt \qquad (2.1.2)$$

ว่า "ผลการแปลงฟูริเยร์ผกผัน (Inverse Fourier Transform) ของ $F(\omega)$" ถ้าอินทิกรัลในสมการ (2.1.2) หาค่าได้

นอกจากนี้ยังเรียกฟังก์ชัน $f(t)$ และ $F(\omega)$ ซึ่งเป็นตาม (2.1.1) และ (2.1.2) ว่าเป็น "คู่ของผลการแปลงฟูริเยร์" (Fourier Transform Pair)

จากนิยามข้างต้น สามารถเขียนแผนภาพได้ดังนี้



รูป 2.1.1

โดยให้ $\hat{F}$ แทนการแปลงหรือการกระทำซึ่งส่งทุก ๆ ค่าของ $f(t)$ ไปยัง $F(\omega)$ เขียนแทนด้วย

$$\hat{F}\,[f(t)] = F(\omega)$$

หรือเขียนย่อ ๆ

$$\hat{F}\,[f] = F$$

และให้ $\hat{F}^{-1}$ แทนการแปลงผกผัน (ถ้ามีได้) ซึ่งส่ง $F(\omega)$ กลับไปยัง $f(t)$ เขียนแทนด้วย

$$\hat{F}^{-1}\,[F(\omega)] = f(t)$$

หรือ

$$\hat{F}^{-1}\,[F] = f$$

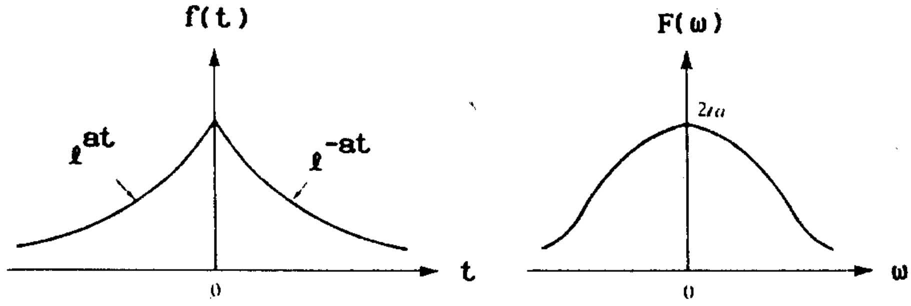
<u>ข้อสังเกต</u>

อินทิกรัลใน (2.1.1) และ (2.1.2) เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ การคำนวณค่าอินทิกรัลดังกล่าวเป็นไปตามหัวข้อ 1.3 และ 1.4

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.1

ให้ $f(t) = e^{-a|t|} \quad , \quad a>0$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$



ก) ฟังก์ชัน $\ell^{-a|t|}$ ข) ผลการแปลงฟูริเยร์

รูป 2.1.2

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

ดังนั้น

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-a|t|}\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{0} \ell^{(a-i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} \ell^{-(a+i\omega)t}\, dt$$

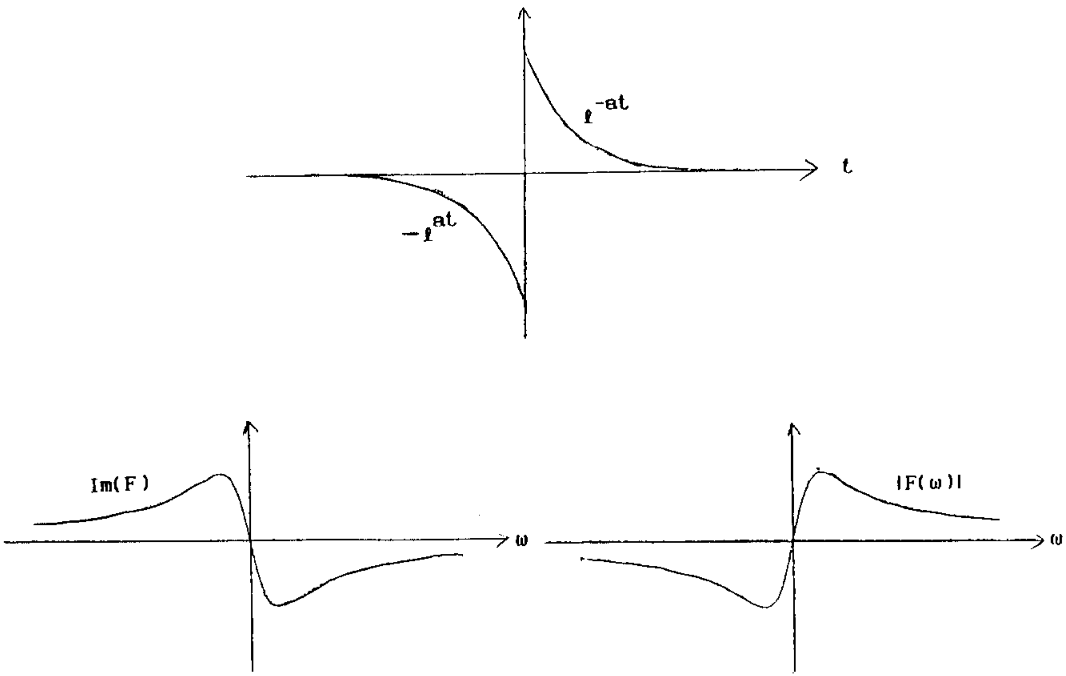
$$= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}$$

$$= \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.2

ให้
$$f(t) = \begin{cases} -\ell^{at} & , \quad t<0 \\ \ell^{-at} & , \quad t>0 \end{cases}$$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ f(t)



รูป 2.1.3

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}\, dt$$

ดังนั้น

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{0} -\ell^{(a-i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} \ell^{-(a+i\omega)t}\, dt$$

$$= \frac{-1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}$$

$$= \frac{-2\omega i}{a^2+\omega^2}$$

ซึ่งเป็นเชิงซ้อนที่มีแต่ส่วนจินตภาพ นั่นคือ

$$\mathrm{Im}\,(F) = \frac{-2\omega}{a^2+\omega^2}$$

และ $$|F(\omega)| = \frac{2\omega}{a^2+\omega^2}$$

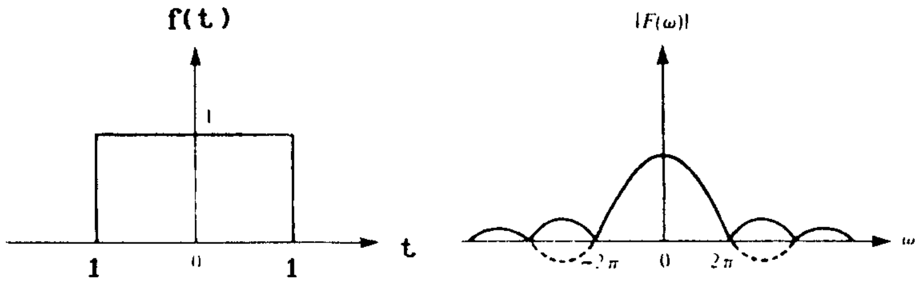
<u>ข้อสังเกต</u>

ตัวอย่าง 2.1.1 $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ ผลการแปลง $F(\omega)$ เป็นฟังก์ชันจริง และเป็นฟังก์ชันคู่ ส่วนตัวอย่าง 2.1.2 $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ ทำให้ได้ผลการแปลง $F(\omega)$ เป็นฟังก์ชันในรูปส่วนจินตภาพและเป็นฟังก์ชันคี่

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.3

ให้ $$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = \pm 1 \\ 0 & , \quad |t| > 1 \end{cases}$$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$



รูป 2.1.4

<u>ผลเฉลย</u>

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}\,dt$$

ดังนั้น

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} \ell^{-i\omega t}\,dt$$

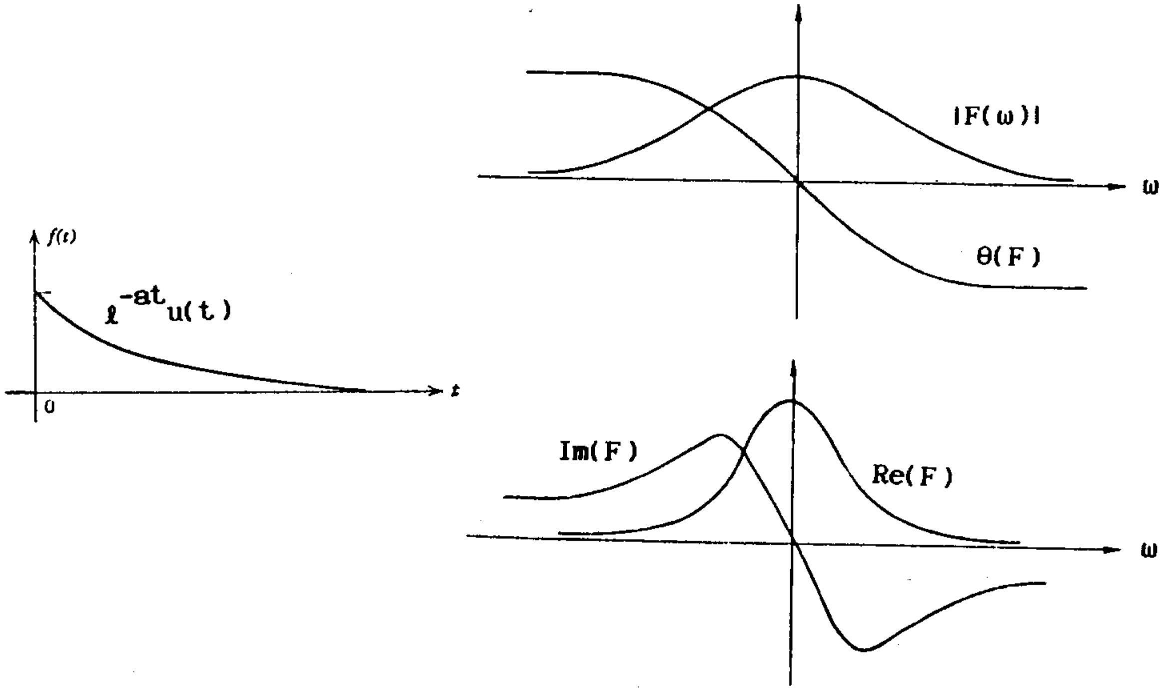
$$= \frac{\ell^{-i\omega} - \ell^{i\omega}}{-i\omega}$$

$$= \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.4

ให้
$$f(t) = \begin{cases} \ell^{-at}, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \quad ; a>0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$



รูป 2.1.5

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}\, dt$$

ดังนั้น

$$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} \ell^{-(a+i\omega)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{a+i\omega}$$

$$= \frac{a}{a^2+\omega^2} - \frac{i\omega}{a^2+\omega^2}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน โดยส่วนจริง , ส่วนจินตภาพ และขนาดเป็นดังนี้

$$\mathrm{Re}(F) = \frac{a}{a^2+\omega^2}$$

$$\mathrm{Im}(F) = -\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

และ

$$|F(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(F) + \mathrm{Im}^2(F)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

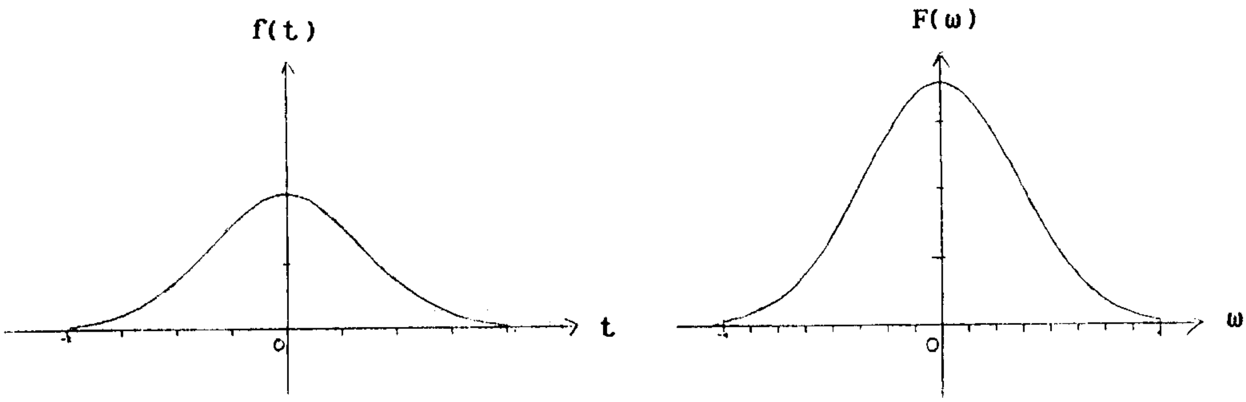
$$\theta(F) = \tan^{-1}\left[\mathrm{Im}(F)/\mathrm{Re}(F)\right] = \tan^{-1}(-\omega/a)$$

$$= -\tan^{-1}(\omega/a)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.5

ให้ $f(t) = e^{-t^2}$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$



รูป 2.1.6

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}dt$$

ดังนั้น

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-t^2}\ \ell^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-(t^2+i\omega t)}dt$$

พิจารณา

$$t^2+i\omega t = t^2 + i\omega t + (\frac{i\omega}{2})^2 - (\frac{i\omega}{2})^2$$

$$= (t+\frac{i\omega}{2})^2 + \frac{\omega 2}{4}$$

เพราะฉะนั้น

$$F(\omega) = \ell^{-\omega^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-(t+i\omega/2)^2}dt$$

จากตัวอย่าง 1.4.1 , $\int_{0}^{\infty} \ell^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ทำให้ได้

$$F(\omega) = \sqrt{\pi}\,\ell^{-\omega^2/4}$$

ผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์และซายน์ (Fourier cosine and sine transforms)

จากบทนิยาม 2.1.1 เราหาผลการแปลงของฟังก์ชัน $f(t)$ ที่นิยามในช่วง $-\infty < t < \infty$ ถ้าต้องการหาผลการแปลงของฟังก์ชันที่นิยามเพียงครึ่งช่วง คือ $t > 0$ เราสามารถทำได้ โดยขยายฟังก์ชัน สำหรับค่า $t < 0$ ซึ่งทำได้ 2 แบบดังนี้

แบบที่ 1 :

$$\text{ให้} \quad f_E(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad t>0 \\ f(-t) & , \quad t<0 \end{cases}$$

ซึ่งจะทำให้ $f_E(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่

เนื่องจาก

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}dt$$

ดังนั้น ผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f_E(t)$, $-\infty < t < \infty$ คือ

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{0} f(-t)\ell^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}dt$$

$$= -\int_{\infty}^{0} f(t)\,\ell^{i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t)(\ell^{i\omega t}+\ell^{-i\omega t})dt$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

ซึ่งจะพบว่าผลการแปลงฟูริเยร์เป็นฟังก์ชันคู่ในตัวแปร ω

จากสมการ (2.1.2)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, \ell^{\,i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} F(-\omega)\, \ell^{\,i\omega t}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} F(\omega)\, \ell^{\,i\omega t}\, d\omega\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{0}^{\infty} F(\omega)\, \ell^{-i\omega t}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} F(\omega)\, \ell^{\,i\omega t}\, d\omega\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)(\ell^{-i\omega t} + \ell^{\,i\omega t})d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\cos\omega t\, d\omega$$

ถ้าเราให้

$$F_c(\omega) = \frac{1}{2} F(\omega)$$

จะได้

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\, d\omega$$

$$F_c(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$$

และเรียก $F_c(\omega)$ ว่า "ผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์ของ $f(t)$"

แบบที่ 2 :

ทำนองเดียวกัน ถ้าให้

$$f_o(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad t>0 \\ -f(-t) & , \quad t<0 \end{cases}$$

ซึ่งจะทำให้ $f_o(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{0} -f(-t)\ell^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{\infty}^{0} f(t)\,\ell^{i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}dt$$

$$= -\int_{0}^{\infty} f(t)\,\ell^{i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\ell^{-i\omega t}dt$$

$$= -\int_{0}^{\infty} f(t)(\ell^{i\omega t} - \ell^{-i\omega t})dt$$

$$= -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$$

ซึ่ง $F(\omega)$ นี้เป็นฟังก์ชันคี่ในตัวแปร ω

จากสมการ (2.1.2)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} -F(-\omega)\,\ell^{i\omega t}\, dw + \int_{0}^{\infty} F(\omega)\,\ell^{i\omega t}\, d\omega\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\infty}^{0} F(\omega)\, \ell^{-i\omega t}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} F(\omega)\, \ell^{i\omega t}\, d\omega\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} F(\omega)(\ell^{i\omega t} - \ell^{-i\omega t})d\omega$$

$$= \frac{i}{\pi} \int_{0}^{\infty} F(\omega) \sin \omega t\, d\omega$$

- ถ้าเราให้

$$F_s(\omega) = \frac{-i}{2i} F(\omega)$$

จะได้ว่า

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega t\, d\omega$$

$$F_s(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t) \sin \omega t\, dt$$

และเรียก $F_s(\omega)$ ว่า ผลการแปลงฟูริเยร์ซายน์ของ $f(t)$

<u>ข้อสังเกต</u>

จาก

$$\hat{F}\ [f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \ell^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t\, dt$$

ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ จะพบว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \omega t \, dt =$

$2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos \omega t \, dt$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \omega t \, dt = 0$ ดังนั้น

$$\hat{F} \; [f(t)] = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos \omega t \, dt = 2F(\omega)$$

ถ้าให้

$$F_c(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega)$$

จะได้

$$\hat{F} \; [f(t)] = F_c(\omega) = \hat{F}_c \; [f(t)]$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันคี่แล้ว

$$\hat{F} \; [f(t)] = F_s(\omega) = \hat{F}_s \; [f(t)]$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.6

ให้ $f(t) = e^{-at}$; $t > 0$, $a > 0$

จงหา $F_c(\omega)$ และ $F_s(\omega)$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$F_c(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

ดังนั้น

$$F_c(\omega) = \int^{\infty} \ell^{-at} \cos \omega t \, dt$$

$$= \frac{a}{a^2+\omega^2} \qquad \text{(จากตัวอย่าง 1.4.2)}$$

ทำนองเดียวกัน จาก

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

ดังนั้น

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} \ell^{-at} \sin \omega t \, dt$$

$$= \frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.7

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \ 0<t<a \\ 0 & , \ t>a \end{cases}$$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์ และซายน์ของ $f(t)$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

ดังนั้น

$$F_c(\omega) = \int_0^{a} \cos \omega t \, dt$$

$$= \frac{\sin \omega a}{\omega}$$

และจาก

$$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$$

ดังนั้น

$$F_s(\omega) = \int_0^a \sin \omega t \, dt$$

$$= \frac{1}{\omega}(1-\cos \omega a)$$

ตัวอย่าง 2.1.8

ให้ $f(t) = t\ell^{-at}$, $a>0$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์ และซายน์ของ f(t)

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt$$

ดังนั้น

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty t\ell^{-at} \cos \omega t \, dt$$

โดยใช้เทคนิคเช่นเดียวกับในตัวอย่าง 1.4.3 (นั่นคือ เราทราบว่า

$$\int_0^\infty \ell^{-at} \cos \omega t \, dt = \frac{a}{\omega^2+a^2} \quad , a>0$$ หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง

เทียบกับ a) จะได้ผลลัพธ์ คือ

$$f_c(\omega) = \frac{a^2-\omega^2}{(\omega^2+a^2)^2}$$

และจาก

$$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$$

ดังนั้น

$$F_s(\omega) = \int_0^\infty t\ell^{-at} \sin \omega t \, dt$$

โดยทำนองเดียวกัน (แต่หาอนุพันธ์เทียบกับ ω) จะได้

$$f_s(\omega) = \frac{-2a\omega}{(\omega^2+a^2)^2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.9

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ชายน์ของ $\frac{1}{t}\,\ell^{-at}$, $a>0$

เนื่องจาก

$$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$$

ดังนั้น

$$F_s(\omega) = \int_0^\infty \frac{1}{t}\,\ell^{-at} \sin \omega t \, dt$$

ซึ่งสามารถหาค่าอินทิกรัล โดยใช้เทคนิคดังนี้

เราทราบว่า (จากตัวอย่าง 1.4.2)

$$\int_0^\infty \ell^{-at} \sin \omega t \, dt = \frac{\omega}{\omega^2+a^2} \quad , \quad a>0$$

โดยอินทิเกรตสมการข้างต้น เทียบกับตัวแปรเสริม a จาก a ถึง ∞ จะได้

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-at} \sin \omega t \, dt = \int_a^\infty \frac{\omega}{\omega^2 + a^2} \, da$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{a}{\omega}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

<u>แบบฝึกหัด 2.1</u>

1. จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $$f(t) = \begin{cases} t^2 \ell^{-t} , & t > 0 \\ 0 , & t < 0 \end{cases}$$

1.2 $$f(t) = \begin{cases} \ell^{-t} \sin t , & t > 0 \\ 0 , & t < 0 \end{cases}$$

1.3 $$f(t) = \begin{cases} \ell^{-t} , & t > 0 \\ \ell^{2t} , & t < 0 \end{cases}$$

1.4 $$f(t) = \begin{cases} 0 , & t < a \\ 1 , & a \le t \le b \\ 0 , & t > b \end{cases}$$

1.5 $$f(t) = \begin{cases} 1 , & -2 < t < 2 \\ 0 , & t \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

1.6 $$f(t) = \begin{cases} -4 , & -1 < t < 0 \\ 4 , & 0 < t < 1 \\ 0 , & t \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

1.7 $$f(t) = \begin{cases} \ell^{-3t} , & t > 0 \\ \ell^{2t} , & t < 0 \end{cases}$$

1.8 $$f(t) = \begin{cases} t\ell^{-|t|} , & t > 0 \\ 0 , & t < 0 \end{cases}$$

1.9 $$f(t) = \ell^{-|t|} \cos t$$

1.10 $$f(t) = \ell^{-|t|} \cos^2 t$$

2. กำหนดฟังก์ชัน สามเหลี่ยม (triangle function) $f(t) = (1-|t|)\,u(1-|t|)$ จงแสดงว่า

$$\hat{F}[f(t)] = 4\frac{\sin^2 \omega/2}{\omega^2}$$

3. จงหาผลการแปลงฟูริเยร์โคซายน์ และผลการแปลงฟูริเยร์ซายน์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $f(t) = t\,e^{-t} \quad , \quad t > 0$

3.2 $$f(t) = \begin{cases} 1-t & , \quad 0 < t < 1 \\ 0 & , \quad t > 1 \end{cases}$$

3.3 $$f(t) = \begin{cases} \cos t & , \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$