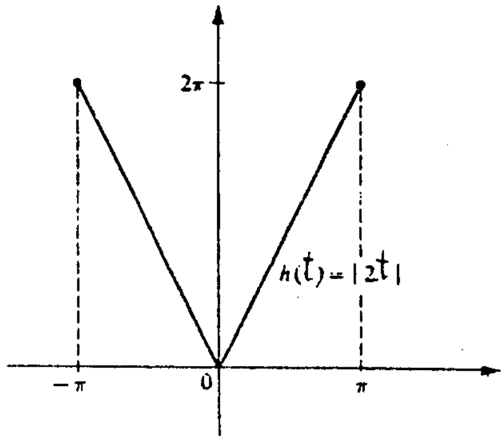
$$h(t) = |2t| \ , \ -\pi \le t \le \pi$$

บนช่วง $-\pi \le t \le \pi$ (ดูรูป 1.6.9)



รูป 1.6.9

<u>การลู่เข้าของอนุกรมฟูริเยร์</u> :

จากบทนิยามข้างต้นเราสามารถหาอนุกรมฟูริเยร์ได้โดยคำนวนหาสัมประสิทธิ์ a_n และ b_n ตามสมการ (1.6.2) แล้วแทนค่าที่ได้ในอนุกรมตามสมการ (1.6.1) โดยที่ไม่ได้สนใจการลู่เข้าของอนุกรมฟูริเยร์เลยดังนั้นปัญหาจึงอยู่ที่

1. อนุกรมฟูริเยร์ของ f ลู่เข้า บางค่าหรือทุกค่า t ในช่วง $-L \le t \le L$ หรือไม่

2. อนุกรมฟูริเยร์ของ f ณ จุด t ลู่เข้าสู่ค่า f(t) หรือไม่

ในที่นี้ เราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทเพื่อที่จะตอบคำถามเหล่านี้ แต่จะไม่พิสูจน์ แต่ก่อนที่จะถึงทฤษฎีบท เราจะพิจารณาคุณสมบัติบางอย่างของอนุกรมฟูริเยร์

เนื่องจากฟังก์ชัน $\sin \frac{n\pi t}{L}$ และ $\cos \frac{n\pi t}{L}$ มีคาบ 2L

(ดูคุณสมบัติฟังก์ชันคาบ) เพราะฉะนั้น ถ้าอนุกรม (1.6.1) ลู่เข้าทุกค่า t แล้ว ฟังก์ชันที่นิยามโดยอนุกรม ต้องมีคาบ 2L ยิ่งกว่านั้น ถ้าสมมุติว่าอนุกรมฟูริเยร์ (1.6.1) ของฟังก์ชัน f(t) ซึ่งนิยามบน $-L \le t \le L$ ลู่เข้าสำหรับทุก t ในช่วงดังกล่าวแล้ว อนุกรมนี้ จะลู่เข้าสำหรับทุกค่า t ($-\infty < t < \infty$) ด้วย และฟังก์ชันที่นิยามโดยอนุกรมจะมีคาบ 2L หมายความว่า อนุกรมฟูริเยร์ (1.6.1) อาจจะใช้แทนฟังก์ชันที่มีคาบ 2L สำหรับทุก ๆ ค่า t

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.6.1

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งคาบ 2L และเรียบเป็นช่วง ๆ บนช่วง $-L \le t \le L$ แล้ว อนุกรมฟูริเยร์ของ f ,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + b_n\sin\frac{n\pi t}{L}\right)$$

โดย

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \qquad (n=0,1,2\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

จะลู่เข้าที่ทุก ๆ จุด t สู่ค่า

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} \qquad (1.6.7)$$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. ถ้า f ต่อเนื่องที่ t , ค่าในสมการ (1.6.7)และอนุกรมฟูริเยร์ของ f ที่ t ลู่เข้าสู่ f(t)
2. ค่าในสมการ (1.6.7) คือค่าเฉลี่ยเลขคณิต(arithmetic mean) ของลิมิตทางขวา และลิมิตทางซ้ายของ f ที่ t

ตัวอย่าง 1.6.5

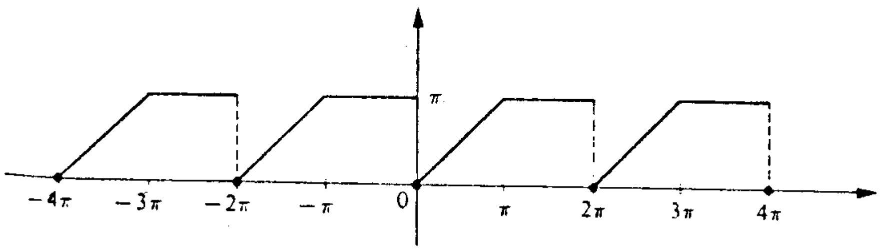
พิจารณาฟังก์ชัน f ที่นิยามสำหรับ t ในช่วง $-\pi \le t \le \pi$ โดย

$$f(t) = \begin{cases} \pi & , -\pi \le t < 0 \\ t & , \ 0 \le t \le \pi \end{cases} \qquad (1.6.8)$$

และสำหรับค่า t อื่น ๆ โดยเงื่อนไขการมีคาบ

$$f(t+2\pi) = f(t) \quad \text{สำหรับทุก } t \qquad (1.6.9)$$

(ดูรูป 1.6.10)



รูป 1.6.10

จากสมการ (1.6.9) แสดงว่า f มีคาบ 2π และ f เป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ บนช่วง $-\pi \le t \le \pi$ ดังนั้น t สอดคล้องทฤษฎีบท (โดย $L = \pi$) ซึ่งฟังก์ชัน f นี้เหมือนกับตัวอย่าง 1.6.3 อนุกรมฟูริเยร์ของ f คือ

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nt - \frac{1}{n}\sin nt\right] \qquad (1.6.10)$$

จากทฤษฎีบท 1.6.1 อนุกรม(1.6.10) ลู่เข้าสู่

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

ที่ทุก ๆ จุด t, $-\infty < t < \infty$ ยิ่งกว่านั้น เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน - ต่อเนื่องที่จุด ๆ t ยกเว้น $t = \pm 2n\pi$ $(n=0,1,2,\ldots)$ อนุกรม (1.6.10) ลู่เข้าสู่ $f(t)$ ที่ทุดจุด t ยกเว้น $t = \pm 2n\pi (n=0,1,2,\ldots)$ เช่นที่ $t = \pi$, อนุกรม (1.6.10) คือ

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n - 1}{\pi n^2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right]$$

และลู่เข้าสู่ $f(\pi) = \pi$ นั่นคือ เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\pi = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right]$$

จากสมการข้างต้นนี้ จะได้ผลที่น่าสนใจคือ

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots \tag{1.6.11}$$

ที่ $t = \pm 2n\pi$ $(n=0,1,2\ldots)$ ซึ่ง f ไม่ต่อเนื่อง เราพบว่า

$f(t+) = f(0+) = 0$, $f(t) = f(0-) = \pi$ ดังนั้น

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

เพราะฉะนั้นที่ $t = \pm 2n\pi(n=0,1,2\ldots)$ อนุกรม(1.6.10) ลู่เข้าสู่ค่า $\frac{\pi}{2}$

เช่นที่ $t = 0$, อนุกรม (1.6.10) คือ

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

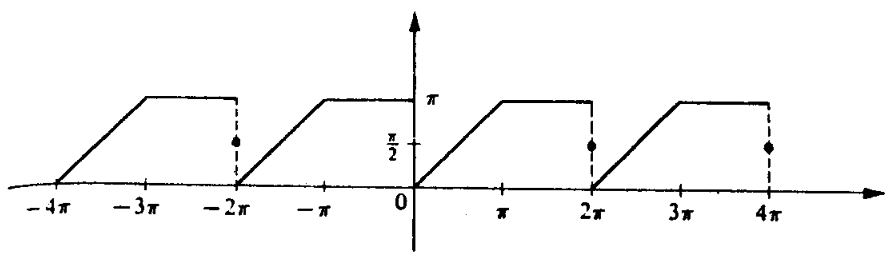
และลู่เข้าสู่ $\frac{\pi}{2}$ นั่นคือ เราเขียนได้ว่า

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

และสมการนี้นำไปสู่ผลเช่นเดียวกับสมการ (1.6.11)
โดยสรุป เราพบว่าอนุกรมฟูริเยร์ (1.6.10) ของฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย (1.6.8) และ (1.6.9) ลู่เข้าสู่ (ทุกค่า t) สู่ฟังก์ชัน g ซึ่งนิยามโดย

$$g(t) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le t < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & t = 0 \\ t, & 0 < t \le \pi \end{cases} \qquad (1.6.12)$$

ดูรูป 1.6.11) และเปรียบเทียบกับ รูป 1.6.10



รูป 1.6.11

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.6.2

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งเรียบเป็นช่วง ๆ บนช่วง $0 \le t \le L$ แล้ว อนุกรมฟูริเยร์ซายน์ของ f

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$$

โดย

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) \sin\frac{n\pi t}{L}\, dt \quad (n=1,2,3\ldots)$$

ลู่เข้าสู่ค่า

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

สำหรับทุกค่า t ซึ่ง $0 < t < L$

ข้อสังเกต

1. ถ้า f ต่อเนื่องที่ t ด้วย , $0 < t < L$ แล้ว อนุกรมฟูริเยร์ซายน์ของ f ที่ t ลู่เข้าสู่ f(t)
2. อนุกรมฟูริเยร์ซายน์ของ f ลู่เข้าสู่ศูนย์ ที่ t = 0 และ t = L
3. อนุกรมฟูริเยร์ซายน์ของ t ลู่เข้าที่ทุกจุด t สู่ค่า

$$\frac{g(t+) + g(t-)}{2},$$

โดย g เป็นฟังก์ชันคี่ ซึ่งมีคาบ 2L ซึ่งมีค่าเช่นเดียวกับ f ในช่วง $0 < t < L$ และ $g(0) = g(L) = 0$

ทฤษฎีบท 1.6.3

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งเรียบเป็นช่วง ๆ บนช่วง $0 \le t \le L$ แล้วอนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ ของ f

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L}$$

โดย

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \qquad (n=0,1,2\ldots)$$

ลู่เข้าสู่ค่า

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$$

สำหรับทุกค่า t ซึ่ง $0 < t < L$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. ถ้า f ต่อเนื่องที่ t ด้วย , $0 < t < L$ แล้วอนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ของ f ที่ t ลู่เข้าสู่ $f(t)$
2. อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ของ f ลู่เข้าสู่ $f(0+)$ ที่ $t = 0$ และลู่เข้าสู่ $f(L-)$ ที่ $t = L$
3. อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ของ f ลู่เข้าที่ทุกจุด t สู่ค่า

$$\frac{h(t+)+h(t-)}{2},$$

โดย h เป็นฟังก์ชันคู่ที่มีคาบ $2L$ ซึ่งมีค่าเช่นเดียวกับ f ในช่วง $0 < t < L$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.6.6

พิจารณาฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย

$$f(t) = t\ , \quad 0 \le t \le \pi$$

อนุกรมฟูริเยร์ซายน์และโคซายน์ของ f บน $0 \le t \le \pi$ คือ(จากตัวอย่าง)

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nt}{n} \qquad (1.6.13)$$

และ

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1) t}{(2n-1)^2} \qquad (1.6.14)$$

ตามลำดับ

ฟังก์ชัน f เรียบเป็นช่วง ๆ บน $0 \leq t \leq \pi$ และต่อเนื่องบนช่วงดังกล่าว เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 1.6.2 และทฤษฎีบท 1.6.3 เราพบว่าทั้งอนุกรมฟูริเยร์ซายน์ (1.6.13) และโคซายน์ (1.6.14) ของ f ลู่เข้าสู่ f(t) ที่ทุก ๆ ค่า t ซึ่ง $0 < t < \pi$ ยิ่งกว่านั้นอนุกรมฟูริเยร์ซายน์ (1.6.13) ลู่เข้าสู่ศูนย์ที่ $t = 0$ และ $t = \pi$ และอนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ (1.6.14) ลู่เข้าสู่ $f(0+) = 0$ ที่ $t = 0$ และลู่ $f(\pi-) = \pi$ ที่ $t = \pi$ อนุกรมฟูริเยร์ซายน์ (1.6.13) ลู่เข้าที่ทุดจุด t สู่ค่า

$$\frac{g(t+) + g(t-)}{2}$$

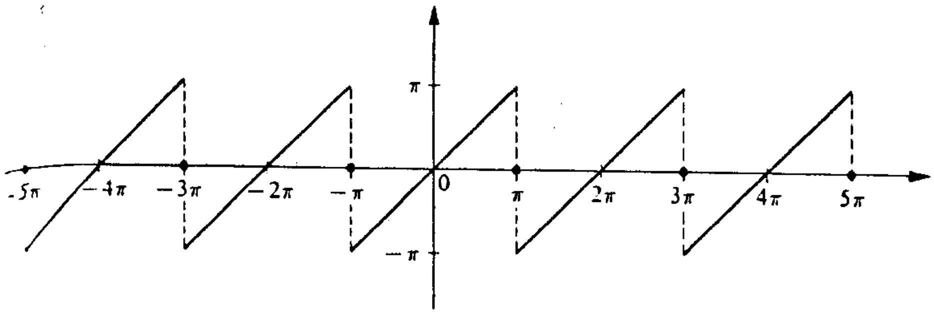
โดย g เป็นฟังก์ชันคี่ ที่มีคาบ 2π ซึ่งมีค่าเดียวกับ f ในช่วง $0 < t < \pi$ และ $g(0) = g(\pi) = 0$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} g(t) &= t \quad , \quad 0 \leq t < \pi \\ g(t) &= 0 \quad , \quad t = \pi \qquad\qquad (1.6.15) \\ g(-t) &= -g(t) \quad \text{สำหรับทุก } t \\ g(t+2\pi) &= g(t) \quad \text{สำหรับทุก } t \end{aligned}$$

ซึ่งกราฟแสดงดังรูป (1.6.12) สำหรับฟังก์ชัน g นี้เราพบว่า

$$\frac{g(t+) + g(t-)}{2} = g(t)$$

สำหรับทุกค่า t ดังนั้น อนุกรมฟูริเยร์ซายน์ (1.6.13) ลู่เข้าสู่ค่า g(t) ดังสมการ (1.6.15) ที่ทุก ๆ จุด t



รูป 1.6.12

อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ (1.6.14) ลู่เข้าที่ทุก ๆ จุด t สู่ค่า

$$\frac{h(t+) + h(t-)}{2}$$

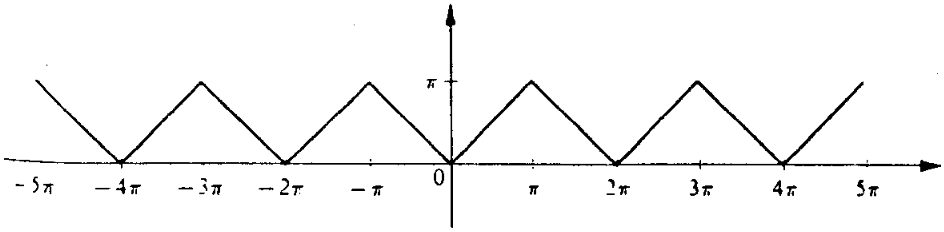
โดย h เป็นฟังก์ชันคู่ ที่มีคาบ 2π ซึ่งมีค่าเช่นเดียวกับ f ในช่วง $0 \le t \le \pi$ นั่นคือ

$$h(t) = t \quad , \quad 0 \le t \le \pi$$
$$h(-t) = h(t) \quad \text{สำหรับทุก } t \qquad (1.6.16)$$
$$h(t+2\pi) = h(t) \quad \text{สำหรับทุก } t$$

กราฟแสดงดังรูป (1.6.13) สำหรับฟังก์ชัน h นี้เราพบว่า

$$\frac{h(t+) + h(t-)}{2} = h(t)$$

สำหรับทุกค่า t ดังนั้นอนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ (1.6.14) ลู่เข้าสู่ค่า h(t) ดังสมการ(1.6.16) ที่ทุก ๆ จุด t



รูป 1.6.13

<u>อนุกรมฟูริเยร์ในรูปเชิงซ้อน</u> : (Complex Fourier Series)

จาก $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \sin\frac{n\pi t}{L}\right)$$

และเพราะว่า

$$\sin t = \frac{\ell^{it} - \ell^{-it}}{2i} \quad , \qquad \cos t = \frac{\ell^{it} - \ell^{-it}}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{\ell^{\frac{in\pi t}{L}} + \ell^{\frac{-in\pi t}{L}}}{2}\right) \right.$$

$$\left. + \; b_n \left(\frac{\ell^{\frac{in\pi t}{L}} + \ell^{\frac{-in\pi t}{L}}}{2i}\right) \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) \ell^{\frac{in\pi t}{L}} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) \ell^{\frac{-in\pi t}{L}} \right]$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} + d_n e^{\frac{-in\pi t}{L}} \right]$$

โดย

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)dt$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\left[\cos\frac{n\pi t}{L} - i\sin\frac{n\pi t}{L} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, e^{\frac{-in\pi t}{L}} dt$$

$$d_n = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\left[\cos\frac{n\pi t}{L} + i\sin\frac{n\pi t}{L} \right]dt$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, e^{\frac{in\pi t}{L}} dt$$

$$= c_{-n}$$

ซึ่งสามารถเขียนอนุกรมได้เป็น

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \qquad -\pi \leq t \leq \pi$$

โดย

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(t)\, e^{\frac{-in\pi t}{L}} dt$$

ตัวอย่าง 1.6.7

จงหาค่าอนุกรมฟูริเยร์ในรูปเชิงซ้อนของ $f(t) = \ell^{at}$, $-\pi < t < \pi$ โดย a เป็นจำนวนจริง

ผลเฉลย

จากสูตรสัมประสิทธิ์ ในที่นี้ $L = \pi$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ell^{at} \ell^{-int} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ell^{(a-in)t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a-in} \left[\ell^{(a-in)\pi} - \ell^{(a-in)(-\pi)} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a-in} (-1)^n (\ell^{a\pi} - \ell^{-a\pi})$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin h\ a\pi \frac{(-1)^n (a+in)}{a^2 + n^2}$$

ดังนั้นอนุกรมฟูริเยร์ของ $f(t) = \ell^{at}$, $-\pi < t < \pi$ คือ

$$\frac{1}{\pi} \sinh a\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{(a+in)}{a^2+n^2} \ell^{int}$$

<u>แบบฝึกหัด</u> 1.6

1. จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ในช่วงที่กำหนด

1.1 $f(t) = t \quad , \quad -\pi \le t \le \pi$

1.2 $f(t) = t^2 \quad , \quad -\pi \le t \le \pi$

1.3 $f(t) = \begin{cases} -2 & , \quad -\pi \le t \le 0 \\ 2 & , \quad 0 \le t \le \pi \end{cases}$

1.4 $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \quad \frac{-\pi}{2} \le t \le 0 \\ 2 & , \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 3 & , \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \end{cases}$

1.5 $f(t) = t|t| \quad , \quad -\pi \le t \le \pi$

1.6 $f(t) = |t| \quad , \quad -6 \le t \le 6$

1.7 $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad -3 \le t \le 0 \\ 1 & , \quad 0 \le t \le 3 \end{cases}$ บนช่วง $-3 \le t \le 3$

1.8 $f(t) = \begin{cases} -2 & , \quad -\varphi \leq t \leq 0 \\ 0 & \quad t = 0 \\ 2 & , \quad 0 \leq t \leq 4 \end{cases}$ บนช่วง $-\varphi \leq t \leq \varphi$

1.9 $f(t) = at + b \quad , \quad -L \leq t \leq L$ (โดย a และ b เป็นค่าคงตัว)

1.10 $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad -L \leq t \leq L \\ L-t & , \quad 0 \leq t \leq L \end{cases}$ บนช่วง $-L \leq t \leq L$

2. สำหรับแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหา

ก) อนุกรมฟูริเยร์ซายน์ของ f บนช่วง $0 \leq t \leq \pi$

ข) อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ของ f บนช่วง $0 \leq t \leq \pi$

2.1 $f(t) = 1 \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi$

2.2 $f(t) = t \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi$

2.3 $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 & , \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$

2.4 $f(t) = \begin{cases} t , & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - t , & \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \end{cases}$

2.5 $f(t) = \sin t , \quad 0 \le t \le \pi$

2.6 $f(t) = e^{t} , \quad 0 \le t \le \pi$

3. สำหรับแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหา

ก) อนุกรมฟูริเยร์ซายน์ของ f บนช่วง $0 \le t \le L$

ข) อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ของ f บนช่วง $0 \le t \le L$

3.1 $f(t) = 2L , \quad 0 \le t \le L$

3.2 $f(t) = 4t , \quad 0 \le t \le L$

3.3 $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{10} , & 0 \le t \le \frac{L}{2} \\ L^2 , & \frac{L}{2} \le t \le L \end{cases}$

$$3.4 \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{10}, & 0 \le t \le \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{L-t}{10}, & \dfrac{L}{2} \le t \le L \end{cases}$$

$$3.5 \quad f(t) = Lt-t^2, \qquad 0 \le t \le L$$

$$3.6 \quad f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le \dfrac{3L}{4} \\[2ex] \dfrac{9L^2}{4} - \dfrac{9Lt}{4}, & \dfrac{3L}{4} \le t \le L \end{cases}$$

4.

4.1 กำหนดฟังก์ชัน f นิยามบนช่วง $-\pi \le t \le \pi$ โดย

$$4.1 \quad f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \le t \le 0 \\ t+1, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] 2t, & \dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi \end{cases}$$

และสำหรับทุกค่า t ของฟังก์ชันนี้ สอดคล้องเงื่อนไข

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

จงพิจารณาว่าอนุกรมฟูริเยร์ของ f ลู่เข้าหรือไม่ โดยเฉพาะที่จุด $t = 0, \frac{\pi}{2}$ และ π อนุกรมลู่เข้าสู่ค่าอะไร

4.2 กำหนดฟังก์ชัน f นิยามบนช่วง $-\pi \le t \le \pi$ โดย

$$f(t) = \begin{cases} (t+\pi)^2 , & -\pi \le t < 0 \\ \pi^2 , & 0 \le t < \frac{\pi}{3} \\ 8 , & \frac{\pi}{3} \le t < \frac{2\pi}{3} \\ 5 , & \frac{2\pi}{3} \le t < \pi \end{cases}$$

และสำหรับทุกค่า t ฟังก์ชันนี้สอดคล้องเงื่อนไข

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

จงพิจารณาว่าอนุกรมฟูริเยร์ของ f ลู่เข้าหรือไม่

5. จงหาอนุกรมฟูริเยร์ในรูปเชิงซ้อนของ $f(t) = e^t , -L < t < L$

<u>คำตอบ</u>

1.

1.1 $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nt}{n} = 2[\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \ldots]$

1.3 $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n}\sin nt = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$

1.5 $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n - \frac{2}{n^3}\right]\sin nt$

1.7 $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin\frac{n\pi t}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi t}{3}$

1.9 $b + \frac{2aL}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi t}{L}$

2.

2.1 ก) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nt = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$

ข) 1

2.3 ก) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi}{n} \sin nt$

ข) $1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos nt = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos(2n-1)t$

2.5 ก) $\sin t$

ข) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2-1}$

3.

3.1 ก) $\frac{4L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1-(-1)^n}{n} \right] \sin \frac{n\pi t}{L} = \frac{8L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{L}$

ข) $2L$

3.3 ก) $\frac{2L^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi}{n} \frac{\sin n\pi t}{L}$

ข) $\frac{L^2}{2} - \frac{2L^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos \frac{n\pi t}{L}$

$$= \frac{L^2}{2} - \frac{2L^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{L}$$

3.5 ก) $\frac{4L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right] \sin\frac{n\pi t}{L} = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\frac{(2n-1)\pi t}{L}$

ข) $\frac{L^2}{6} - \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1+(-1)^n}{n^2}\right] \cos\frac{n\pi t}{L} = \frac{L^2}{6} - \frac{L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2n\pi t}{L}$

4.

4.1 ที่ $t = 0$, อนุกรมลู่เข้าสู่ค่า $\frac{1}{2}$,

ที่ $t = \frac{\pi}{2}$, อนุกรมลู่เข้าสู่ค่า $\frac{3\pi+2}{4}$,

ที่ $t = \pi$, อนุกรมลู่เข้าสู่ค่า π

5. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{L+in\pi}{L^2+n^2\pi^2} (\sinh L)\, \ell^{\frac{in\pi t}{L}}$

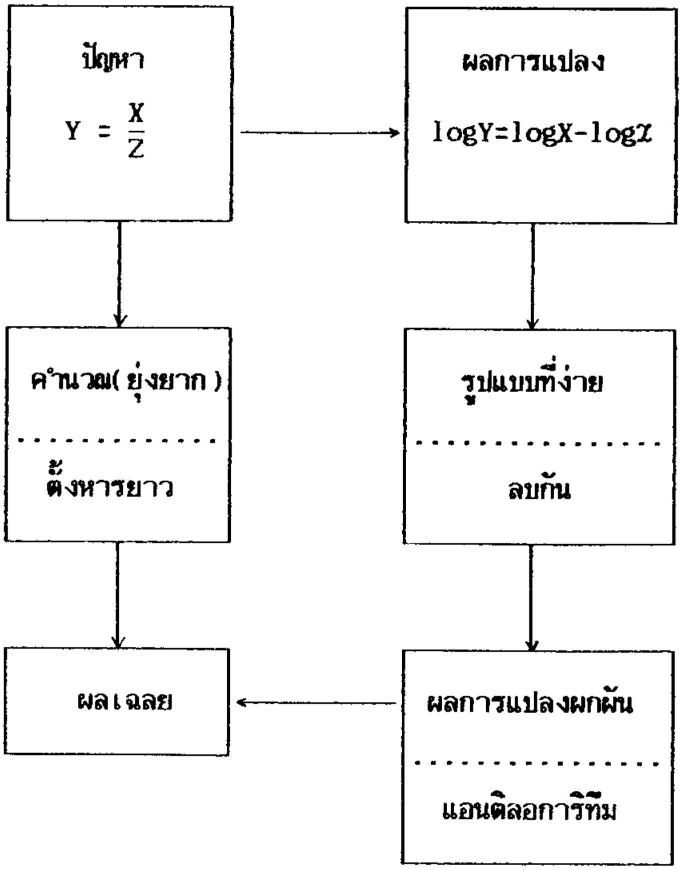
1.7 แนวคิดของผลการแปลง (The concept of transform)

ในหัวข้อนี้เราจะให้แนวคิดพื้นฐานอย่างคร่าวๆ เกี่ยวกับผลการแปลงตลอดจนแนะนำให้รู้จักผลการแปลงอินทิกรัล (integral transform) บางชนิด มีปัญหาบางอย่าง ซึ่งถ้าแก้ปัญหานั้นโดยตรงสามารถทำได้ แต่จะยุ่งยากหรืออาจใช้เวลามาก จึงนำเทคนิคบางอย่างมาช่วยเพื่อทำให้ปัญหาง่ายขึ้น หรือใช้เวลาน้อยลง

เช่น

การคำนวณหาผลหารของ $Y = \frac{X}{Z}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

วิธีโดยตรงก็คือการหารยาว แต่ถ้าใช้คุณสมบัติของลอการิทึมมาช่วยแปลงสมการให้ไปอยู่ในรูปลอการิทึม จะได้ในรูปผลต่างของลอการิทึม เพียงแต่เปิดตารางของ $\log X$ และ $\log Z$ แล้วนำมาลบกัน จะได้ค่า $\log Y$ จากนั้นก็แปลงกลับคือ หาผลการแปลงผกผัน (inverse transform) โดยเปิดตารางแอนติลอการิทึม ก็จะได้ผลเฉลยที่ต้องการ ดูรูป 1.7.1



รูป 1.7.1

การใช้เทคนิคของลอการิทึม ถือว่าเป็นการกระทำหรือการแปลง (transformation) ชนิดหนึ่ง ซึ่งเราสามารถสร้างการกระทำหรือการแปลงอื่น ๆ ได้มากมาย เช่น

$F(t) = | f(t) |$ (การแปลงแบบค่าสัมบูรณ์)

$F(t) = [f(t)]^2$ (การแปลงแบบยกกำลังสอง)

$F(t) = f'(t)-f(t)$ (การแปลงแบบหาอนุพันธ์)

$$F(t) = \int_0^t f(u)du \text{ (การแปลงแบบหาค่าอินทิกรัล)}$$

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(t)$ ให้ เราสามารถหาการแปลงได้ ผลที่ได้คือ $F(t)$ นี้ เรียกว่าผลการแปลง (Transform) สำหรับผลการแปลงสองตัวอย่างแรก สามารถหาได้เลย ส่วนผลการแปลงของตัวอย่างที่สาม และสี่ จะหาได้ฟังก์ชัน $f(t)$ ต้องหาอนุพันธ์ได้ และอินทิเกรตได้ ตามลำดับ

ผลการแปลงที่มีประโยชน์มากในการนำไปประยุกต์ใช้คือ ผลการแปลงอินทิกรัล ซึ่งกำหนดโดย

$$F(\alpha) = \int_a^b K(\alpha,t)\, f(t)\, dt$$

ฟังก์ชัน $F(\alpha)$ เรียกว่าผลการแปลงของ $f(t)$ และเรียก $K(\alpha,t)$ ว่าเป็นส่วนกลางของการแปลง (kernel of transformation) ถ้า ช่วงการอินทิเกรตเป็นอนันต์ และ

$$K(\alpha,t) = \ell^{-i\alpha t} \quad , \qquad \text{จะได้}$$

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \ell^{-i\alpha t}\, dt$$

ซึ่งเรียก $F(\alpha)$ นี้ว่า ผลการแปลงฟูริเยร์ (Fourier transform) ของ $f(t)$

ถ้า

$$K(\alpha,t) = \ell^{-\alpha t} \quad , \qquad \text{จะได้}$$

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \ell^{-i\alpha t}\, dt$$

ซึ่งเรียก $F(\alpha)$ นี้ว่า ผลการแปลงลาปลาซ(Laplace transform) ของ $f(t)$

ถ้าช่วงการอินทิเกรตเป็นกึ่งอนันต์ และ

$$K(\alpha,t) = t^{\alpha-1} \quad , \qquad \text{จะได้}$$

$$F(\alpha) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, t^{\alpha-1}\, dt$$

ซึ่งเรียก $F(\alpha)$ นี้ว่า ผลการแปลงเมลลิน (Mellin transform) ของ $f(t)$ นอกจากนี้ยังมีผลการแปลงแบบอื่น ๆ อีก

เช่น $\int_{0}^{\infty} rf(r)J_{-\nu}(\alpha r)\, dr = F(\alpha)$ ซึ่งเรียกว่า ผลการแปลงฮันเคิล (Hankel transform)

แต่ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะผลการแปลงฟูริเยร์ และผลการแปลงลาปลาซเท่านั้น