อินทิกรัลของฟังก์ชันเดลต้า :

จากนิยามของฟังก์ชันอินทิกรัลไม่จำกัดเขต ของฟังก์ชันธรรมดา

$$\int f(t)dt = F(t)+C$$

โดยที่ $F'(t) = f(t)$
ถ้าเราใช้นิยามนี้กับฟังก์ชันเจนเนอรัลไลซ์ เราจะได้อินทิกรัลของฟังก์ชันดังกล่าว ดังต่อไปนี้

$$\int \delta(t)dt = u(t)+C$$

$$\int [u(t)+2i\delta'(t)]dt = tu(t)+2i\delta(t)+C$$

ดังนั้น

$$\int_a^b \delta(t-c)dt = \int_a^b u'(t-c)dt = u(b-c) - u(a-c)$$

$$= u(c-a) - u(c-b)$$

$$\int_a^b \delta'(t-c)dt = \delta(b-c) - \delta(a-c) = 0 \qquad (1.5.29)$$

$$\int_a^b \delta^{(k)}(t-c)dt = 0 \quad (a\neq c, b\neq c, k=1,2\ldots)$$

และถ้า $g(t)$ เป็นฟังก์ชันธรรมดา $, a<c<b$

$$\int_a^b g(t)\delta(t-c)dt = g(c)$$

$$\int_a^b g(t)\delta'(t-c)dt = -\int_a^b \delta(t-c)g'(t)dt = -g'(c)$$

$$\int_a^b g(t)\delta''(t-c)dt = -\int_a^b g'(t)\delta'(t-c)dt = g''(c)$$

จากคุณสมบัติอนุพันธ์ข้อ 7 และคุณสมบัติตามสมการ (1.5.29) จะได้รูปทั่วไป

$$\int_a^b g(t)\delta^{(n)}(t-c)dt = (-1)^n g^{(n)}(c) \qquad (1.5.30)$$

ตัวอย่าง 1.5.6

จงหาค่าของ $\int_{-1}^{1} \ell^{2t} \left(u(t)+2\delta(t)-\delta'(t)\right) dt$

ผลเฉลย

$$\int_{-1}^{1} \ell^{2t} \left(u(t)+2\delta(t)-3\delta'(t)\right) dt$$

$$= \int_{-1}^{1}\ell^{2t} u(t)dt+2\int_{-1}^{1}\ell^{2t} \delta(t)dt-3\int_{-1}^{1}\ell^{2t}\delta'(t)dt$$

$$= \frac{\ell^2-1}{2} + 2 + 6$$

$$= \int_0^1 \ell^{2t} dt + 2 \ell^{2t} \Big|_{t=0} - 3(-2\ell^{2t})\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\ell^2-1}{2} + 2 + 6$$

ในสมการ (1.5.29) ลิมิตการอินทิเกรตอาจเป็นอนันต์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> 1.5.7

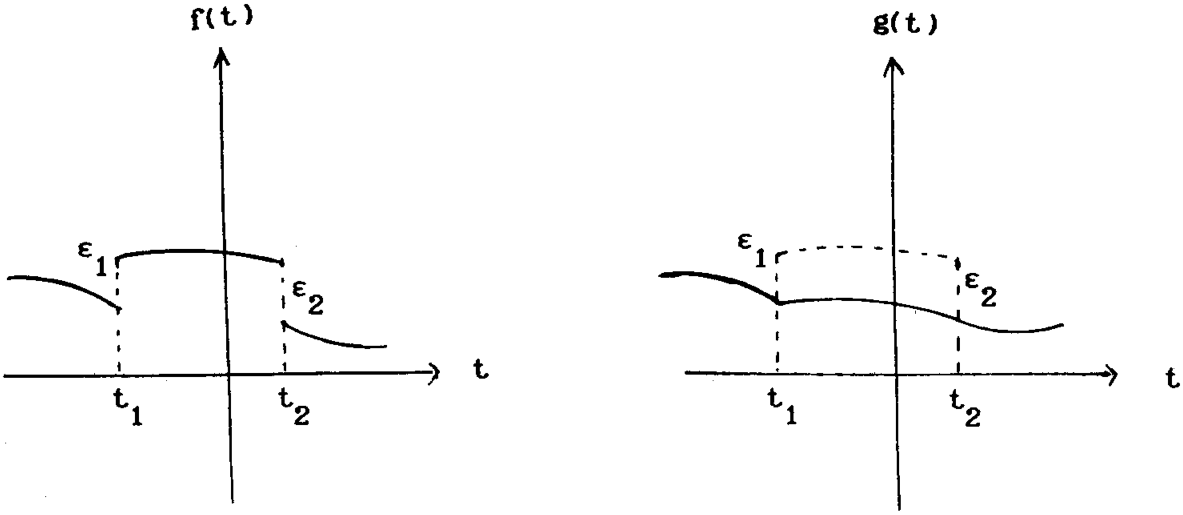
จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{\infty} \sin 3t\ \delta'(t-\pi)\ dt$

<u>ผลเฉลย</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin 3t\ \delta'(t-\pi)\ dt = -3\cos 3\pi = 3$$

1.5.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ

กำหนดให้ฟังก์ชัน f(t) เป็นดังรูป



รูป 1.5.12

มีจุดไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดที่ $t_1, t_2, \ldots$ และค่าที่กระโดดเป็น $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$

โดย $\varepsilon_k = f(t_j+) - f(t_j-)$

ฟังก์ชัน f(t) สามารถเขียนในรูป ฟังก์ชันต่อเนื่อง g(t) บวกกับพจน์ของ

$\varepsilon_k\ u\ (t-t_k)$ ดูรูป 1.5.12

$$f(t) = g(t) + \varepsilon_1\ u(t-t_1) + \varepsilon_2\ u(t-t_2)$$

ดังนั้น

$$f'(t) = g'(t) + \varepsilon_1\ \delta(t-t_1) + \varepsilon_2\ \delta(t-t_2)$$

ในรูปทั่วไป ถ้ามีจุดที่กระโดด n จุด

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\ u(t-t_k)$$

ดังนั้น

$$f'(t) = g'(t) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\ \delta(t-t_k)$$

$g'(t)$ เป็นอนุพันธ์ของ $f(t)$ ยกเว้นที่จุด t_k

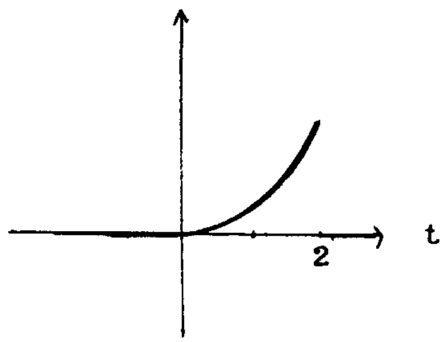
ตัวอย่าง 1.5.8

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันถึงอันดับที่สาม

$$f(t) = t^2\ \left[\, u(t) - u(t-2)\right]$$

ผลเฉลย

จากฟังก์ชันที่กำหนด เขียนรูปได้ดังนี้



รูป 1.5.13

ซึ่งมีจุดไม่ต่อเนื่องที่ $t = 2$
ดังนั้นจาก

$$f(t) = g(t) + \varepsilon_1 u(t-t_1)$$

จะได้

$$f(t) = t^2 \left[u(t) - u(t-2) \right] + 4 u(t-2)$$

$$f'(t) = 2t \left[u(t) - u(t-2) \right] + 4 \delta(t-2)$$

ทำนองเดียวกันจะได้

$$f''(t) = 2 \left[u(t) - u(t-2) \right] - 4 \delta(t-2) - 4 \delta'(t-2)$$

และ

$$f'''(t) = 2 \delta(t) - 2\delta(t-2) - 4 \delta'(t-2) - 4 \delta''(t-2)$$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหาค่าของ

1.1 $\Gamma(6)$ 1.2 $\Gamma(3/2)$

1.3 $\Gamma(-1/2)$ 1.4 $\Gamma(-5/2)$

1.5 $\dfrac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)}$ 1.6 $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)}$

2. จงหาค่าของ

2.1 $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx$ 2.2 $\int_0^\infty x^6\, e^{-3x} dx$

3. จงแสดงว่า

3.1 $\int_{-a}^{a} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}\ \mathrm{erf}\ (a)$

3.2 $\int_{a}^{b} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\mathrm{erf}(b)-\mathrm{erf}(a)\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\mathrm{erfc}(a)-\mathrm{erfc}(b)\right]$

3.3 $\frac{d}{dx}\,\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ e^{-x^2}$

3.4 $\int erf(x)dx = x\, erf(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} + c$, c เป็นค่าคงที่

(แนะนำ : โดยอินทิเกรตทีละส่วน)

4. จงแสดงว่า

$$u(-t) = \begin{cases} 1 , & t<0 \\ 0 , & t>0 \end{cases}$$

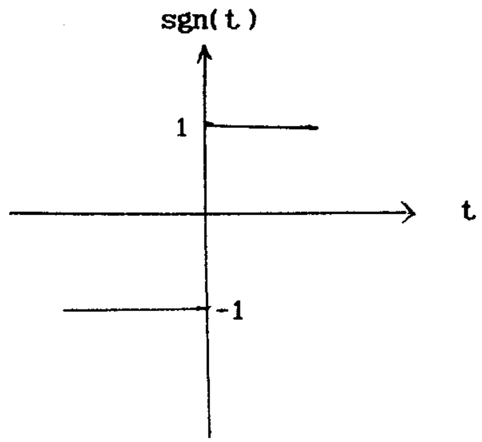
นั่นคือ $u(-t) = -u(t)$

พร้อมทั้งวาดรูปด้วย

5. ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชันซิกนัม (signum function) นิยามโดย

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 , & t>0 \\ -1 , & t<0 \end{cases}$$

ดูรูป 1.5.14



รูป 1.5.14

จงแสดงว่า

$$sgn(t) = u(t) - u(-t)$$

นั่นคือ $u(t) = \frac{1}{2}[1 + sgn(t)]$

6. จงเขียนรูปของฟังก์ชันต่อไปนี้

6.1 $u(t-2)$

6.2 $2\,[u(t-3) - u(t-6)]$

6.3 $2u(t) + 3u(t-1) - 4u(t-2)$

6.4 $[u(t+\pi) - u(t-\pi)] \sin t$

6.5 $\ell^{-at} u(t)$, $a>0$

6.6 $(1-|t|)\, u(1-|t|)$

7. จงเขียนรูปและหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

7.1 $u(t) + 2u(t-1) - 3u(t-2)$

7.2 $u(t-1) - u(t-2)$

7.3 $3[u(t) - u(t-1)] + 5[u(t-2) - u(t-3)]$

7.4 $\ell^{t}\,[1-u(t)]$

8. จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

8.1 $\int_{-\infty}^{\infty} \ell^{t}\, \delta(t)\, dt$

8.2 $\int_{-\infty}^{\infty} t^{2}\, \delta(t-1)\, dt$

8.3 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \delta(t-2)}{1+t^{2}}\, dt$

8.4 $\int_{-\infty}^{\infty} [\ell^{t}\, u(-t) + \ell^{-t}\, u(t)]\, dt$

8.5 $\int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-t}\, \delta'(t)\, dt$

8.6 $\int_{-\infty}^{\infty} t^{2}[2\delta'(t-1) + 3\delta''(t-2)]\, dt$

คำตอบ

1.

1.3) $-2\sqrt{\pi}$ 1.4) $\frac{-8}{15}\sqrt{\pi}$

1.5) $\frac{3}{4}$ 1.6) $\frac{16}{315}$

2.

2.1) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$

7.

7.1) $\delta(t) + 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2)$

7.2) $\delta(t-1) - \delta(t-2)$

7.3) $3[\delta(t) - \delta(t-1)] + 5[\delta(t-2) - \delta(t-3)]$

7.4) $\ell^{t}[1 - u(t)] - \delta(t)$

8.

8.1) 1 8.2) 1

8.3) $\pi + \frac{1}{5}$ 8.4) 2

8.5) 1 8.6) 2

1.6 อนุกรมฟูริเยร์ (Fourier Series)

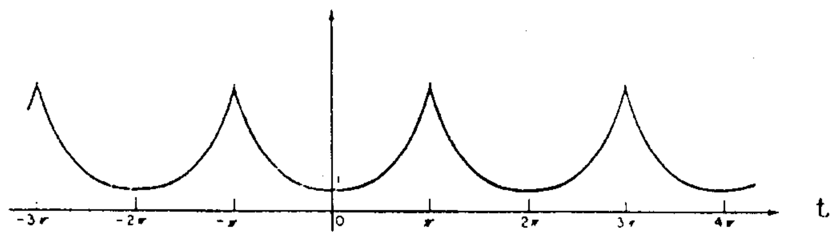
ก่อนที่จะให้นิยามของอนุกรมฟูริเยร์ เราจะแนะนำให้รู้จักกับฟังก์ชันคาบ , ฟังก์ชันคู่, ฟังก์ชันคี่ พร้อมทั้งคุณสมบัติที่จำเป็นดังนี้

บทนิยาม 1.6.1

เราเรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ว่า ฟังก์ชันเป็นคาบ (Periodic function) ถ้ามีจำนวนจริงบวก p ซึ่งทำให้

$$f(t+p) = f(t)$$

สำหรับทุก ๆ ค่า t ในโดเมน และเรียกค่า p นี้ว่า คาบ (period)ของฟังก์ชัน $f(t)$ ดังแสดงในรูป 1.6.1



รูป 1.6.1

พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

เนื่องจาก $\sin(t+2\pi) = \sin t$ ดังนั้น $\sin t$ มีคาบ $p = 2\pi$

เนื่องจาก $\cos(t+2\pi) = \cos t$ ดังนั้น $\cos t$ มีคาบ $p = 2\pi$

เนื่องจาก $\tan(t+\pi) = \tan t$ ดังนั้น $\tan t$ มีคาบ $p = \pi$

เนื่องจาก $\sin 2(t+\frac{2\pi}{2}) = \sin(2t+2\pi) = \sin 2t$

ดังนั้น $\sin 2t$ มีคาบ $\frac{2\pi}{2} = \pi$

คุณสมบัติของฟังก์เป็นคาบ

1. ถ้า p เป็นคาบของฟังก์ชัน $f(t)$ แล้ว np จะเป็นคาบของฟังก์ชัน $f(t)$ โดย ที่ n เป็นจำนวนเต็ม

2. ถ้า $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ต่างก็มีคาบ p แล้ว $c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_kf_k$ จะเป็นฟังกชัน ที่มีคาบ p โดยที่ $c_1, c_2, \ldots c_k$ เป็นค่าคงตัว

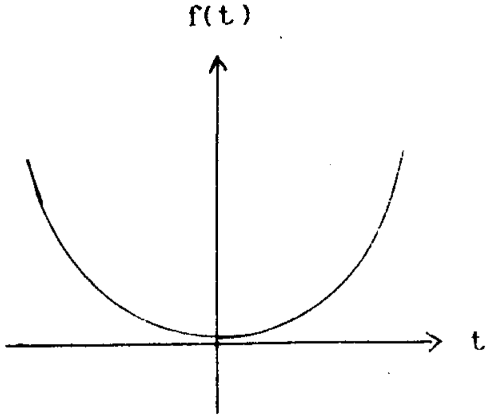
นิยาม 1.6.2

เราเรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ว่าเป็นฟังก์ชันคู่ (Even function) ถ้า

$$f(-t) = f(t)$$

สำหรับทุก ๆ t

จากนิยามหมายความว่ากราฟของฟังก์ชันคู่สมมาตรกับแกนดิ่ง (ดูรูป 1.6.2)



รูป 1.6.2

บทนิยาม 1.6.3

เราเรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ว่าเป็นฟังก์ชันคี่ (Odd function) ถ้า

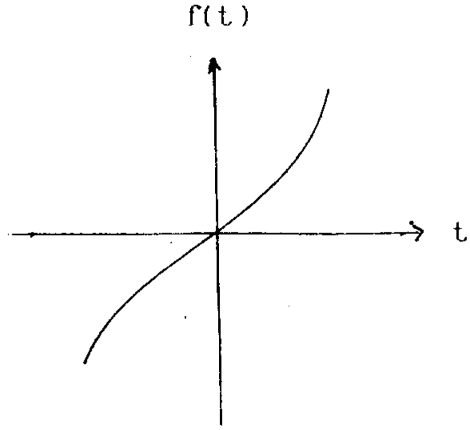
$$f(-t) = -f(t)$$

สำหรับทุก ๆ t , ซึ่งกรณี $t = 0$ จะได้ว่า

$$f(-0) = -f(0)$$

นั่นคือ $f(0) = 0$ นั่นเอง ดังนั้น กราฟของฟังก์ชันคี่สมมาตร เทียบกับจุด จุดกำเนิด (ดูรูป 1.6.3)

MA 343 บทที่ ๑



รูป 1.6.3 .

พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ จะพบว่า

$f(t) = t^2$, cos t เป็นฟังก์ชัน คู่

$f(t) = t$, sin t เป็นฟังก์ชัน คี่

$f(t) = e^t$ ไม่เป็นฟังก์ชันคู่และไม่เป็นฟังก์ชันคี่

คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่ และคี่

1. ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่แล้ว

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

2. ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันคี่แล้ว

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$

3. ผลคูณของฟังก์ชัน คู่ จะเป็นฟังก์ชัน คู่
4. ผลคูณของฟังก์ชัน คี่ จะเป็นฟังก์ชัน คู่
5. ผลคูณของฟังก์ชัน คู่ และฟังก์ชัน คี่ จะเป็นฟังก์ชัน คี่

<u>บทนิยาม</u> 1.6.4

ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามบนช่วง $-L < t < L$ และถ้าอินทิกรัล

$$\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \quad \text{และ} \quad \int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

(n=0,1,2...) หาค่าได้ แล้ว เราเรียกอนุกรม

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \sin\frac{n\pi t}{L}\right) \qquad (1.6.1)$$

โดยที่

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \quad (n=1,2\ldots) \quad (1.6.2)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt \quad (n=1,2\ldots)$$

นี้ว่า อนุกรมฟูริเยร์ในรูปตรีโกณมิติ หรือเรียกสั้น ๆ ว่า อนุกรมฟูริเยร์ของ f บนช่วง $-L \le t \le L$ เขียนแทน ด้วย

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \sin\frac{n\pi t}{L}\right), \; L \le t \le L$$

และเรียกจำนวน a_n และ b_n ตามสมการ (1.6.2) ว่าสัมประสิทธิฟูริเยร์ของ f

<u>ข้อสังเกต</u> :

1. ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ จากคุณสมบัติของฟังก์ชันคู่ จะพบว่า

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \qquad (1.6.1)$$

$$b_n = 0$$

ดังนั้น อนุกรมฟูริเยร์ จะเหลือเพียง

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L}$$

2. ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันคี่ จากคุณสมบัติของฟังก์ชันคี่ จะพบว่า

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

ดังนั้น อนุกรมฟูริเยร์ จะเหลือเพียง

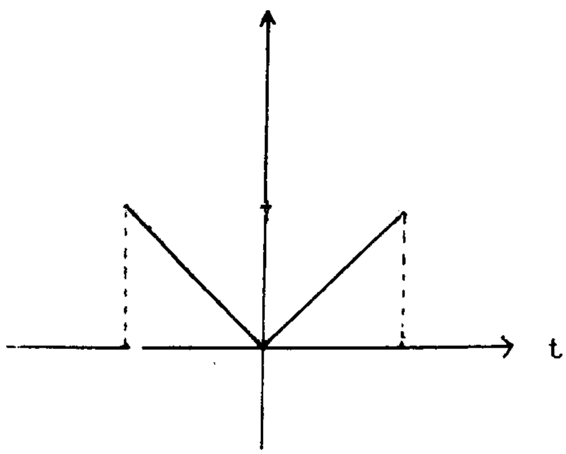
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.6.1

จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย

$$f(t) = |t| = -\pi \le t \le \pi$$

บนช่วง $-\pi \le t \le \pi$ (ดูรูป 1.6.4)



รูป 1.6.4

<u>ผลเฉลย</u>

ในที่นี้ $L = \pi$

เนื่องจาก f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ เพราะฉะนั้นอนุกรมฟูริเยร์ ของ f บน $-\pi \le t \le \pi$ กำหนดโดย

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

นั่นคือ

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\,dt \quad = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos nt\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{n^2} + t\,\frac{\sin nt}{n}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi n^2} & ,\ n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 0 & ,\ n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases} \qquad n = 1,2,3\ldots$$

เพราะฉะนั้นอนุกรมที่ต้องการ คือ

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$$

(n เป็นจำนวนคี่)

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \ldots\right]$$

เขียนแทนโดย

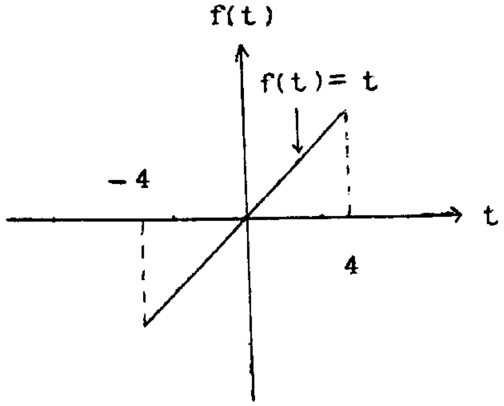
$$|t| \sim = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} \quad , -\pi \le t \le \pi$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.6.2

จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย

$$f(t) = t \ , \ -4 \le t \le 4$$

บนช่วง $-4 \le t \le 4$ (ดูรูป 1.6.5)



รูป 1.6.5

<u>ผลเฉลย</u>

ในที่นี้ L = 4

เนื่องจาก f(t) เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้นอนุกรมฟูริเยร์ของ f บน $-4 \le t \le 4$ กำหนดโดย

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

นั่นคือ

$$b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 t \sin\frac{n\pi t}{4}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi t}{4} - \frac{4t}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{-8}{n\pi}\cos n\pi = -8\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

$$= \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad ; \quad n = 1,2,3\ldots$$

อนุกรมที่ต้องการคือ

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi t}{4} = \frac{8}{\pi}\left[\sin\frac{\pi t}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{4} - \ldots\right]$$

เขียนแทนโดย

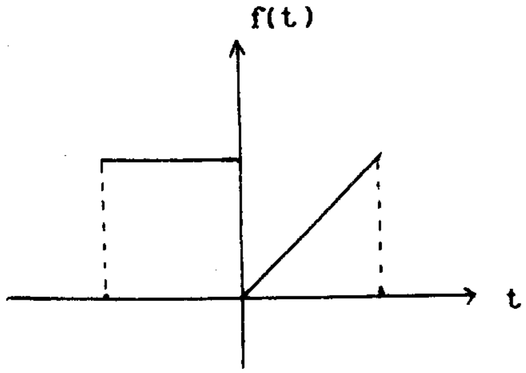
$$t \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi t}{4} \quad ; \quad -4 \le t \le 4$$

ตัวอย่าง 1.6.3

จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย

$$f(t) = \begin{cases} \pi & , -\pi \le t < 0 \\ t & , 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

บนช่วง $-\pi \le t \le \pi$ (ดูรูป 1.6.6)



รูป 1.6.6

<u>ผลเฉลย</u>

ในที่นี้ $L = \pi$ และ f ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ดังนั้น อนุกรมฟูริเยร์บน $-\pi \le t \le \pi$ คือ สมการ (1.6.1) และ (1.6.2) นั่นคือ

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi\, dt + \int_{0}^{\pi} t\, dt\right] = \frac{3\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi\cos nt\, dt + \int_{0}^{\pi} t\cos nt\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left([\pi\frac{\sin nt}{n}]_{-\pi}^{0} + [\frac{\cos nt}{n^2} + t\frac{\sin nt}{n}]_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right] = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-2}{\pi n^2}, & n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 0, & n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

และ

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi \sin nt \, dt + \int_{0}^{\pi} t \sin nt \, dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi \frac{\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\sin nt}{n^2} - t\frac{\cos nt}{n}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}\right) = \frac{-1}{n} \qquad ; \quad n = 1,2,3,\ldots$$

อนุกรมที่ต้องการคือ

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2} \cos nt - \frac{1}{n} \sin nt\right]$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \left(\frac{2}{\pi}\cos t + \sin t\right) - \frac{1}{2}\sin 2t - \left(\frac{2}{9\pi}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)$$

$$- \frac{1}{4}\sin 4t - \ldots$$

ข้อสังเกต

สมมุติว่าให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยาม และอินทิเกรตได้บนช่วง $a \leq t \leq b$ และให้ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $g(t) = f(t)$ สำหรับทุกจุด ยกเว้นบางจุด (เป็นจำนวนจำกัด) บนช่วง $a \leq t \leq b$ ดังนั้นจากแคลคูลัสชั้นสูงเรารู้ว่า

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

ดังนั้นถ้า f มีอนุกรมฟูริเยร์ได้ตามสมการ (1.6.1) และ $g(t) = f(t)$ (ยกเว้นบางจุด) แล้ว

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \qquad (n=0,1,2\ldots)$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt \qquad (n=1,2\ldots.)$$

ซึ่งทางซ้ายมือ ของสมการทั้งสอง ก็คือสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูริเยร์ของ g และ ขวามือก็คือ สัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูริเยร์ของ f เพราะฉะนั้น f และ g มีอนุกรมฟูริเยร์เหมือนกัน

บทนิยาม 1.6.5

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วง $0 \leq t \leq L$ และถ้าอินทิกรัล

$$\int_0^L f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt \qquad (n=1,2,3..)$$

หาค่าได้ แล้วเราเรียกอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L} \tag{1.6.3}$$

โดยที่

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt \qquad (n=1,2,3..)$$

นี้ว่า อนุกรมฟูริเยร์ซายน์ (Fourier Sine Serie) ของ f บนช่วง $0 \le t \le L$ เขียนแทนด้วย

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}\ ,\ 0 \le t \le L \qquad (1.6.4)$$

<u>บทนิยาม</u> 1.6.6

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วง $0 \le t \le L$ และถ้าอินทิกรัล

$$\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \qquad (n=0,1,2...)$$

หาค่าได้แล้วเราเรียกอนุกรม

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} \qquad (1.6.5)$$

โดยที่

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \qquad (n=0,1,2..)$$

นี้ว่า อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ (Fourier Cosine Serie) ของ f บนช่วง $0 \le t \le L$ เขียนแทนด้วย

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} \qquad (1.6.6)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.6.4

กำหนดให้

$f(t) = 2t\ ,\ \ 0 \le t \le \pi$ (ดูรูป 1.6.7)

1) จงหาอนุกรมฟูริเยร์ชายน์ของ f บน $0 \leq t \leq \pi$

2) จงหาอนุกรมฟูริเยร์โคชายน์ของ f บน $0 \leq t \leq \pi$

ผลเฉลย

1) ในที่นี้ $L = \pi$, อนุกรมฟูริเยร์ชายน์ของ f บน $0 \leq t \leq \pi$ คือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}\, dt$$

นั่นคือ

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2t \sin nt\, dt$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin nt}{n^2} - t\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-4\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}4}{n} \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

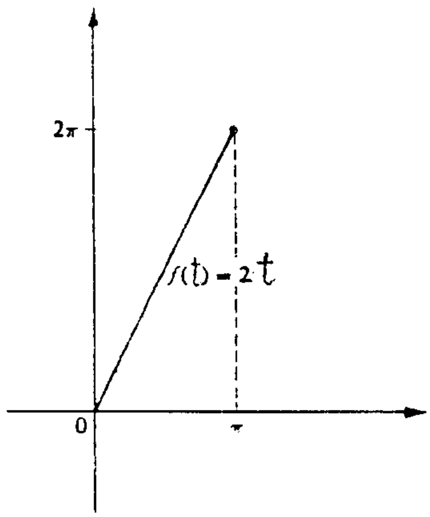
ดังนั้นอนุกรมที่ต้องการคือ

$$4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = 4\left[\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \ldots\right]$$

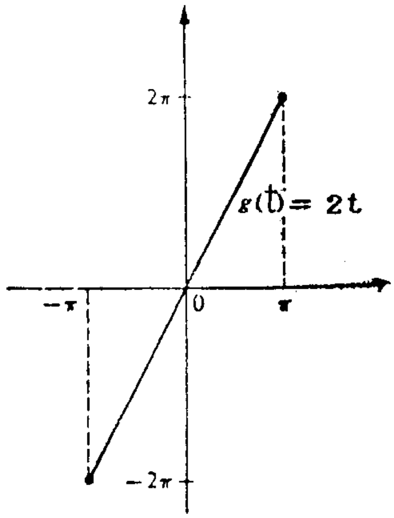
การกระจายนี้เหมือนกับของอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชันคี่ g ซึ่ง

$g(t) = 2t$, $-\pi \leq t \leq \pi$

บนช่วง $-\pi \leq t \leq \pi$ (ดูรูป 1.6.8)



รูป 1.6.7



รูป 1.6.8

2) อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ของ f บน $0 \leq t \leq \pi$ คือ

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}\, dt \qquad (n=0,1,2..)$$

นั่นคือ

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2t\, dt = 2\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\ dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2t\cos nt\ dt$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{n^2} + t\ \frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - 1\right)$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-8}{\pi n^2} & ,\ n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 0 & ,\ n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

ดังนั้นอนุกรมที่ต้องการคือ

$$\pi - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2} = \pi - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$$

(n เป็นจำนวนคี่)

$$= \pi - \frac{8}{\pi}\left[\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \ldots\right]$$

การกระจายนี้ เหมือนกับของอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชันคู่ h ซึ่ง