ทำนองเดียวกัน สำหรับ $I = \int_0^\infty \ell^{-at} \sin bt\, dt$ จะได้

$$I = \mathrm{Im}\left[\int_0^\infty \ell^{-at}\, \ell^{ibt} dt\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{a-ib}\right]$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.4.3

$$I = \int_0^\infty \ell^{-\alpha t} t \cos \beta t dt$$

ให้ $I(\alpha) = \int_0^\infty \ell^{-\alpha t} \cos \beta t dt$

และจากตัวอย่างที่แล้ว จะได้ $I(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$

ดังนั้นจากกฎของไลบ์นิตซ์

$$I = -\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.4.4

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

ให้ $I(\alpha)= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt$

ดังนั้น $I = I(0)$, ใช้กฎของไลบ์นิตซ์

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -\int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin t dt$$

$$= \frac{-1}{\alpha^2+1} \qquad \text{(จากตัวอย่าง 1.4.2)}$$

โดยการอินทิเกรต จะได้

$$I(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = C-\tan^{-1}\alpha$$

แต่ $\alpha = \infty$, $I(\alpha) = 0$ เพราะฉะนั้น $c = \frac{\pi}{2}$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\alpha$$

และ

$$I = I(0) = \frac{\pi}{2}$$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงแสดงว่า

1.1 $$\int \ell^{at} \sin bt \, dt = \frac{\ell^{at}}{a^2+b^2}(a \sin bt - b\cos bt) + C$$

1.2 $$\int \ell^{at} \cos bt \, dt = \frac{\ell^{at}}{a^2+b^2}(b \sin bt - a\cos bt) + C$$

2. จงแสดงว่า

2.1 $$\int_0^\infty \ell^{-\alpha t^2} \, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

2.2 $$\int_0^\infty \ell^{-\alpha t^2} t \, dt = \frac{1}{2\alpha}$$

3. จงหาค่าของ

$$\int_0^\infty t^2 \, \ell^{-t^2} \, dt$$

4. จงหาค่าของ

$$\int_0^\infty \sin bt \, dt$$

(แนะนำ : ให้ $I(\alpha) = \int_0^\infty \ell^{-\alpha t} \sin bt \, dt$)

คำตอบ

3. $$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

1.5 ฟังก์ชันพิเศษ (Special Functions)

1.5.1 ฟังก์ชันแกมม่า (The Gamma Function)

ฟังก์ชันแกมม่า นิยามโดย

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \ , \ x>0 \qquad (1.5.1)$$

สำหรับ $x \leq 0$ อินทิกรัลลู่ออก

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$u = t^{x-1},\ dv = e^{-t}\, dt$$

$$du = (x-1)t^{x-2}dt,\ v = -e^{-t}$$

จะได้

$$\Gamma(x) = -t^{x-1}e^{-t} \Big|_0^\infty + (x-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{x-2}dt \qquad (1.5.2)$$

อินทิกรัลทางขวามือของ (1.5.2) หาค่าได้ (คือ $\Gamma(x-1)$ ถ้า $x>1$) ในขณะที่พจน์แรกทางขวามือของ (1.5.2) เป็นศูนย์ ฉะนั้น

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)\ ,\ x>1 \qquad (1.5.3)$$

ถ้าเราจัดทำตารางค่าของ $\Gamma(x)$ โดยที่ $0<x\leq 1$ เราจะสามารถคำนวนค่า $\Gamma(x)$ สำหรับทุกค่า $x>1$ โดยใช้สูตรหมุนเวียนในสมการ (1.5.3) เช่น

$$\Gamma(3.4)=2.4\Gamma(2.4)=(2.4)(1.4)\Gamma(1.4)$$

$$=(2.4)(1.4)(0.4)\Gamma(0.4)$$

และถ้า x เป็นจำนวนเต็มบวก n แล้ว

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=(n-1)(n-2)\ldots(1)\Gamma(1)=(n-1)! \qquad (1.5.4)$$

เนื่องจาก

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$$

สำหรับค่า x อื่น ๆ ที่น่าสนใจ และสามารถอินทิเกรตโดยตรงได้คือ

เมื่อ $x = \frac{1}{2}$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้ $t=u^2$ จะได้

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du \qquad (1.5.5)$$

และจากตัวอย่าง 1.4.1 ทำให้ได้ว่า

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad (1.5.6)$$

สรุปได้ว่า ฟังก์ชันแกมมาตามสมการ (1.5.1) นิยามสำหรับ $x>0$, สำหรับ $x\leq 0$ ซึ่งเราไม่สามารถใช้สมการ (1.5.1) แต่เราก็มีวิธีที่จะนิยาม $\Gamma(x)$ สำหรับ $x<0$ ดังนี้

จากสมการ(1.5.3) สามารถเขียนได้เป็น

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

ดังนั้น เรานิยาม

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad x<0 \qquad (1.5.7)$$

เช่น

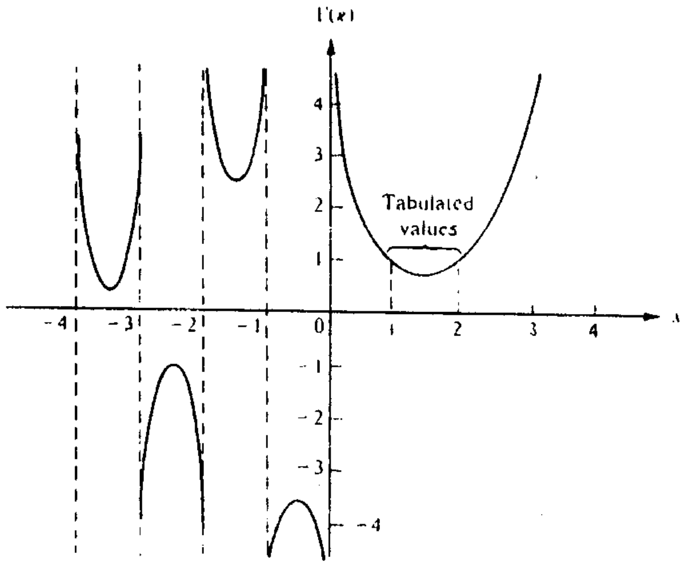
$$\Gamma(-0.5) = \frac{\Gamma(0.5)}{-0.5} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-1.7) = \frac{\Gamma(-0.7)}{-1.7} = \frac{\Gamma(0.3)}{(-1.7)(-0.7)}$$

$$\Gamma(-2.4) = \frac{\Gamma(-1.4)}{-2.4} = \frac{\Gamma(-0.4)}{(-2.4)(-1.4)} = \frac{\Gamma(0.6)}{(-2.4)(-1.4)(-0.4)}$$

จะพบว่า $\Gamma(x)$ หาค่าได้สำหรับทุก $x<0$ (ยกเว้นจำนวนเต็มลบ) โดยเขียนได้ในรูปของ $\Gamma(x)$ เมื่อ $0<x<1$

สำหรับกรณี $x=0$, $\Gamma(x) \to \infty$ เมื่อ $x \to 0^+$



รูป 1.5.1 ฟังก์ชันแกมม่า

ตัวอย่าง 1.5.1

จงหาค่าของ $\dfrac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$

ผลเฉลย

จาก $\Gamma(n) = (n-1)!$

ดังนั้น

$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{5!}{2.2!} = \frac{5.4.3.2}{2.2} = 30$$

ตัวอย่าง 1.5.2

จงหาค่าของ $\int_0^\infty x^6 e^{-2x}dx$

ผลเฉลย

โดยเปลี่ยนตัวแปรให้ $2x = t$ จะได้

$$\int_0^\infty x^6 \ell^{-2x}\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{t}{2}\right)^6 \ell^{-t} \frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{2^7}\int_0^\infty \ell^{-t} t^6\, dt = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$$

ตัวอย่าง 1.5.3

จงหาค่าของ $\int_0^\infty \ell^{-x^4}\, dx$

ผลเฉลย

โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้ $x^4 = t$ จะได้

$$\int_0^\infty \ell^{-x^4}\, dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty \ell^{-t}\, t^{-3/4}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

ข้อสังเกต

โดยวิธีการเช่นเดียวกับตัวอย่างที่แล้ว จะพบว่า

$$\int_0^\infty \ell^{-x^a}\, dx = \frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)$$

คุณสมบัติของ $\Gamma(x)$

1. $\Gamma(x) = \int_0^\infty \ell^{-t}\, t^{x-1}\, dt$

2. $\Gamma(x) = 2\int_0^\infty \ell^{-t^2}\, t^{2x-1}\, dt$

3. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

4. $\Gamma(n+1) = n! \quad ; n=0,1,2,\ldots$

5. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

6. $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)} \; ; k=1,2,3\ldots$

7. $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\,\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$

8. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} \quad , n=0,1,2,\ldots$

1.5.2 ฟังก์ชันค่าผิดพลาด (The Error Function)

ฟังก์ชันค่าผิดพลาด นิยามโดยอินทิกรัล

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \ell^{-t^2}\, dt \tag{1.5.8}$$

จากเรื่องอนุกรมกำลัง (power series) เราทราบว่า $\ell^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

ดังนั้น

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\, dt$$

ซึ่งอนุกรมกำลังสามารถอินทิเกรตทีละพจน์ได้
นั่นคือ

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \qquad (1.5.9)$$

จากสมการ (1.5.8) เราจะได้อนุพันธ์ของ erf(x) ดังนี้

$$\frac{d}{dx}\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \ell^{-x^2} \qquad (1.5.10)$$

จากสมการ (1.5.9) จะพบว่าฟังก์ชันค่าผิดพลาดเป็นฟังก์ชันคี่ นั่นคือ

$$\mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x) \qquad (1.5.11)$$

และเมื่อ $x=0$ จะได้

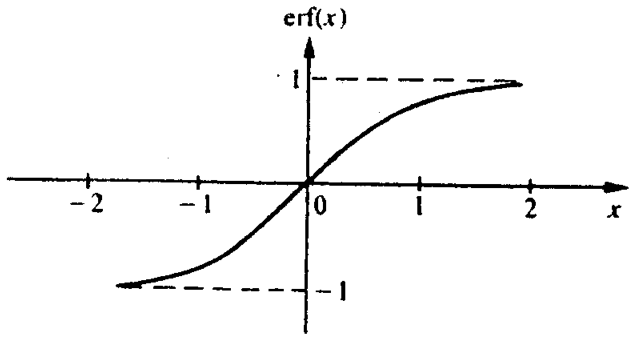
$$\mathrm{erf}(0) = 0$$

ขณะที่เมื่อ $x\to\infty$ จะได้

$$\mathrm{erf}(\infty) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \ell^{-t^2}\, dt$$

$$= \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1 \qquad (1.5.12)$$

กราฟของ erf(x) เมื่อ x เป็นจำนวนจริง เป็นดังรูป 1.5.2



รูป 1.5.2 ฟังก์ชันค่าผิดพลาด

ฟังก์ชันค่าผิดพลาดเติมเต็ม (Complementary Error Function)

ในการประยุกต์บางครั้งจะพบฟังก์ชันซึ่งอยู่ในรูป

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\, dt \qquad (1.5.13)$$

ซึ่งเรียกว่าเป็นฟังก์ชันค่าผิดพลาดเติมเต็ม โดยใช้คุณสมบัติอินทิกรัล จะได้

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-t^2}\, dt$$

นั่นคือ

$$\text{erfc}(x) = 1-\text{erf}(x) \qquad (1.5.14)$$

ดังนั้นคุณสมบัติของ erfc(x) สามารถหาจาก erf(x)

1.5.3 ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel Function)

ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง นิยามโดยอนุกรม

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\frac{1}{2}x)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \qquad (1.5.15)$$

โดยตัวแปรเสริม ν เป็นอันดับของฟังก์ชันเบสเซล

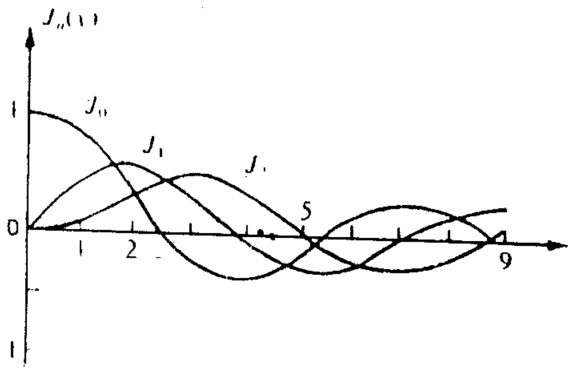
เมื่อ $\nu = n(n=0,1,2,\ldots)$ สมการ (1.5.15) จะเป็นฟังก์ชันเบสเซล
ที่มีอันดับเป็นจำนวนเต็ม

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\frac{1}{2}x)^{2k+n}}{k!\Gamma(k+n)!} \quad ;n=0,1,2\ldots(1.5.16)$$

ซึ่งมีรูปแบบที่ง่าย ก็คือ $n=0$

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\frac{1}{2}x)^{2k}}{(k!)^2} \qquad (1.5.17)$$

กราฟของ $J_0(x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง $n=0,1,2$
แสดงดังรูป (1.5.3)



รูป 1.5.3 ฟังก์ชันเบสเซล

1.5.4 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (Unit step function or Heaviside unit function)

บ่อยครั้งที่การประยุกต์ต้องเกี่ยวข้องกับสภาพที่จะมีการเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด ในเวลาที่กำหนด เราจึงต้องการฟังก์ชันที่จะมาทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดไว้ขาดหายไปในบางช่วง ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวจะมีประโยชน์ในการสร้างผลการแปลงผกผันด้วย

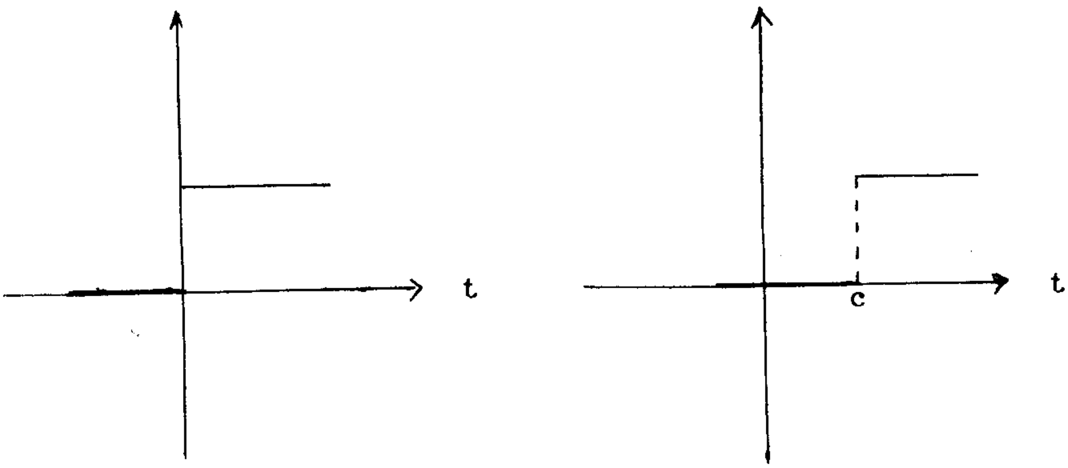
<u>บทนิยาม</u> 1.5.1

เรานิยามฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยโดย

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t<0 \\ 1 & , t>0 \end{cases}$$

จากนิยามเราพบว่า $u(t)$ เป็นศูนย์ เมื่อ $t<0$ และเป็น 1 เมื่อ $t>0$ โดยการเลื่อนตำแหน่ง จะได้

$$u(t-c) = \begin{cases} 0 & , t<c \\ 1 & , t>c \end{cases}$$



ก) $u(t)$　　ข) $u(t-c)$

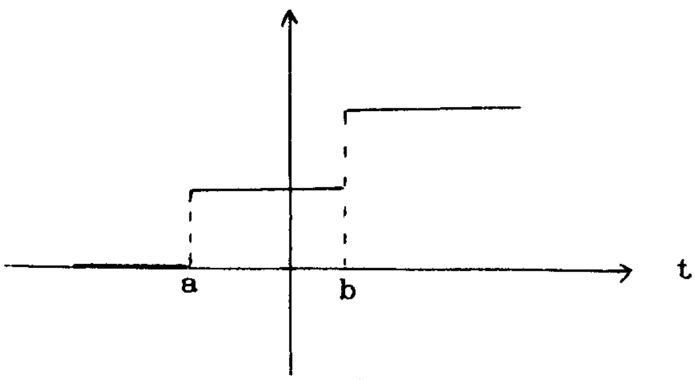
รูป 1.5.4 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย $u(t), u(t-c)$

ฟังก์ชัน u(t) และ u(t-c) สามารถใช้สร้างฟังก์ชันอื่น ๆ ซึ่งต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ได้ดังนี้

ผลบวก :

$$u(t-a)+u(t-b) = \begin{cases} 2, & t>b \\ 1, & a<t<b \quad ; \quad a<b \\ 0, & t<a \end{cases}$$

ดูรูป 1.5.5



รูป 1.5.5

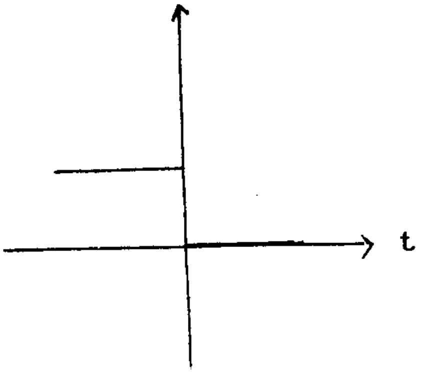
ผลต่าง :

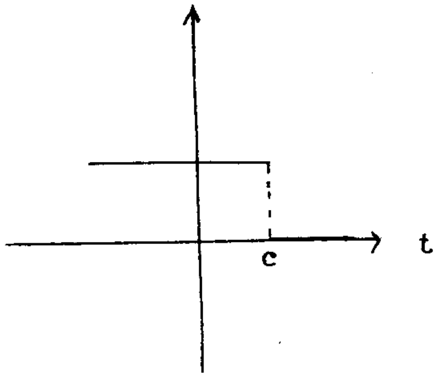
$$1-u(t) = \begin{cases} 1, & t<0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$$

$$1-u(t-c) = \begin{cases} 1, & t<c \\ 0, & t>c \end{cases}$$

$$u(t-a)-u(t-b) = \begin{cases} 1, & a<t<b \\ 0, & t \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases} \quad ; \quad a<b$$

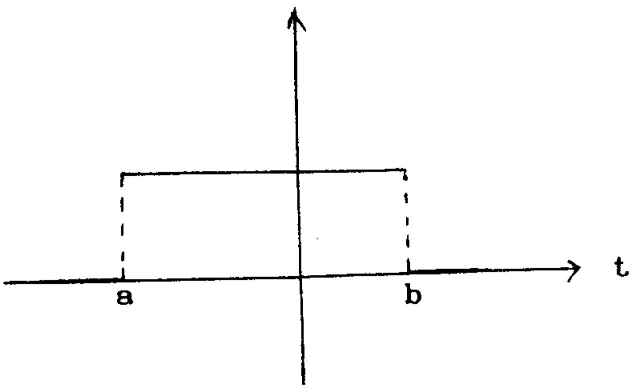
ดูรูป 1.5.6





ก) 1-u(t)

ข) 1-u(t-c)



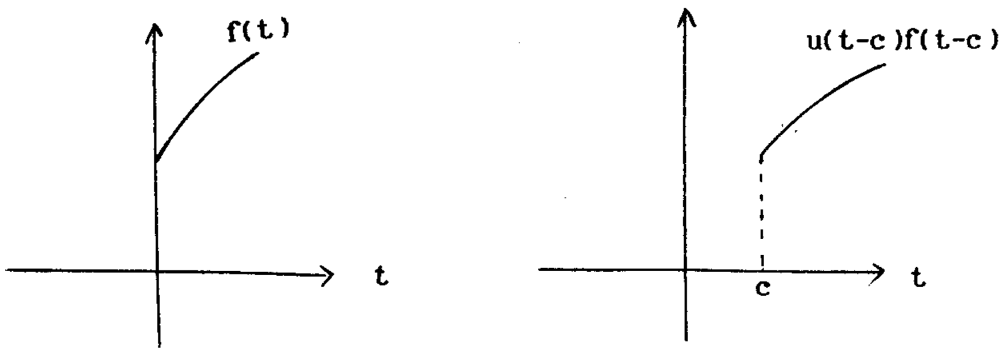
ค) u(t-a) - u(t-b)

รูป 1.5.6

ผลคูณ:

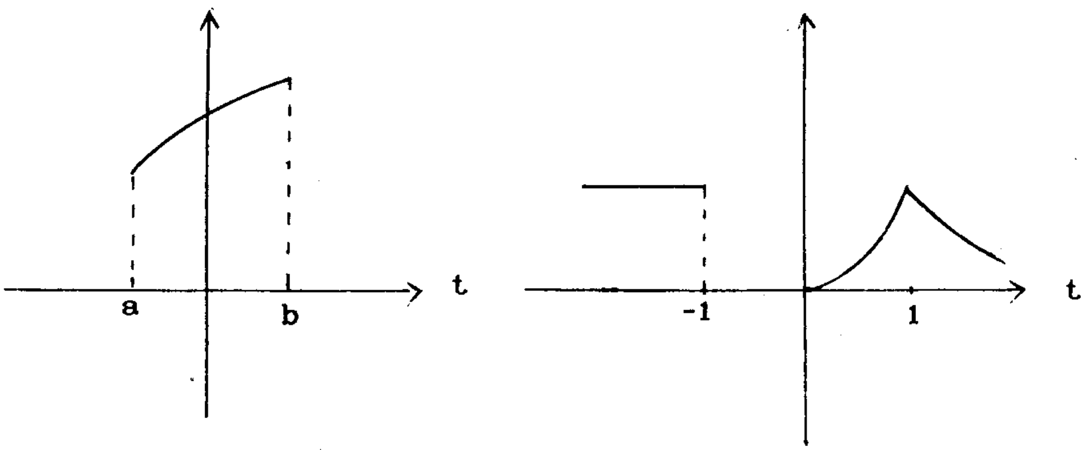
ในการคูณฟังก์ชัน u(t-c) ด้วย f(t-c) จะได้ผลเท่ากับฟังก์ชัน f(t) ในช่วงของ u(t-c) ที่ไม่เป็นศูนย์ และเท่ากับศูนย์ในช่วงของ u(t-c) ที่เป็นศูนย์

ดูรูป 1.5.7



รูป 1.5.7

นอกจากนี้ยังมีลักษณะการคูณแบบอื่นอีก ดังรูป 1.5.8



ก) $f(t)[u(t-a)-u(t-b)]$ ข) $1-u(t+1)+t^2[u(t)-u(t-1)] + e^{1-t}u(t-1)$

รูป 1.5.8

ตัวอย่าง 1.5.4

จงเขียนรูปกราฟของฟังก์ชัน $u(1-|t|)$

ผลเฉลย

เนื่องจาก $|t| = \pm t$

ดังนั้น

$u(1-|t|) = u_1(t)+u_2(t)$

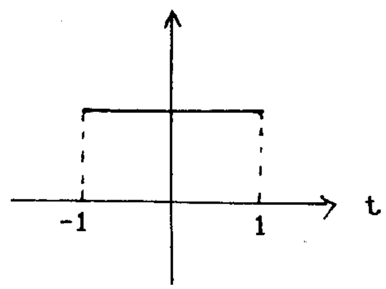
โดยให้

$$u_1(t) = u(1-t) = \begin{cases} 1 & , t<1 \\ 0 & , t>1 \end{cases}$$

และ

$$u_2(t) = u(1+t) = \begin{cases} 1 & , t>-1 \\ 0 & , t<-1 \end{cases}$$

ทำให้ได้รูปดังนี้



รูป 1.5.8

ข้อสังเกต

ซึ่งเหมือนกับ $u(t+1)-u(t-1)$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 1.5.5

จงเขียนฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & , \ t<0 \\ \ell^t & , \ t>0 \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} a\ell^{-t} & , \ t\le 0 \\ a\ell^{-t}+\frac{1}{2}(\ell^t-\ell^{-t}) & , \ t>0 \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 0 & , \ t<0 \\ 1 & , \ 0<t<\pi \\ 0 & , \ t>\pi \end{cases}$$

$$f_4(t) = \begin{cases} \sin t & , \ t<0 \\ 1+\sin t-\cos t & , \ 0<t<\pi \\ \sin t-2\cos t & , \ t>\pi \end{cases}$$

ผลเฉลย

$$f_1(t) = \ell^t u(t)$$

$$f_2(t) = a\ell^{-t}\left[1-u(t)\right]+\left[a\ell^{-t}+\frac{1}{2}(\ell^t-\ell^{-t})\right]u(t)$$

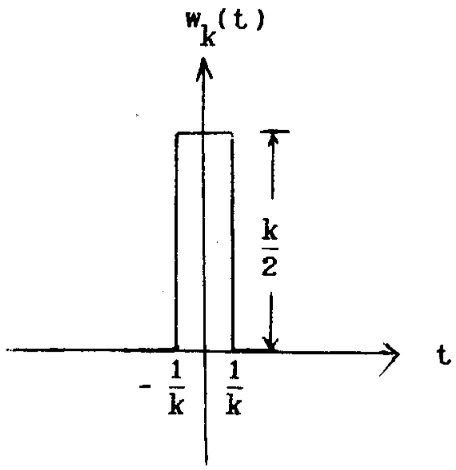
$$f_3(t) = u(t)-u(t-\pi)$$

$$f_4(t) = \left[1-u(t)\right]\sin t+(1+\sin t-\cos t)\left[u(t)-u(t-\pi)\right]$$

$$+(\sin t-2\cos t)u(t-\pi)$$

1.5.5 ฟังก์ชันเดลต้าหรืออิมพัลซ (Delta or Impulse Function)

ฟังก์ชันเดลต้า บางครั้งเรียกว่า ฟังก์ชันดิแรกเดลต้า (Dirac delta function) เพื่อเป็นเกียรติแก่นักฟิสิกส์ ชื่อ P.A.M. Dirac, ซึ่งเป็นผู้แนะนำฟังก์ชันนี้ โดยพิจารณากราฟที่มีลักษณะเหมือน "ตะปู" หรือ - "เดือยแหลม" ซึ่งมีพื้นที่หนึ่งหน่วย เช่น ลักษณะรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็ก ๆ เหมือนการเต้น หรือสั่นสะเทือน (pluse)



รูป 1.5.9

$$w_k = \begin{cases} \frac{k}{2} , & |t| \leq \frac{1}{k} \\ 0 , & |t| > \frac{1}{k} \end{cases} \qquad (1.5.18)$$

เมื่อ $k \to \infty$, $w_k(t)$ จะสูงขึ้นเรื่อย ๆ แต่ พื้นที่ยังคงเป็นหนึ่งหน่วย

สำหรับฟังก์ชัน $g(t)$ ใด ๆ ที่ต่อเนื่อง ณ $t=0$ จะพบว่า

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_k(t) g(t)dt = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2} \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} g(t)dt \qquad (1.5.19)$$

จากทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยของอินทิกรัล ซึ่งกล่าวว่า

ถ้า $m \le f(t) \le M$ บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$m(b-a) \le \int_a^b f(t)dt \le M(b-a)$$

ถ้า m และ M เป็นค่าต่ำสุดและสูงสุดของ f บน $[a,b]$ และ f ต่อเนื่อง แล้ว จะมีบางจุด ξ ใน$[a,b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b-a)$$

ดังนั้นจาก (1.5.9) จะมี ξ อยู่ระหว่าง $\frac{-1}{k}$ และ $\frac{1}{k}$ ซึ่งเมื่อ $k \to \infty, \xi$

จะถูกบังคับให้เป็นศูนย์ ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_k(t)g(t)dt = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2} g(\xi) \frac{2}{k}$$

$$= g(0) \qquad (1.5.20)$$

เราจะใช้สมการ (1.5.20) เพื่อที่จะนิยามฟังก์ชันเดลต้า โดยนิยามด้วยความสัมพันธ์

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t)dt = g(0) \qquad (1.5.21)$$

นั่นคือ การกระทำของ $\delta(t)$ บน $g(t)$ จะแยกค่าของ $g(t)$ ที่ $t=0$ ออกมา ซึ่ง $g(t)$ ต่อเนื่อง ณ จุด $t=0$

จากซ้ายมือของสมการ (1.5.20) เมื่อเปรียบเทียบกับซ้ายมือของสมการ (1.5.21) จะพบว่า $\delta(t)$ ก็คือ $\lim_{k\to\infty} w_k(t)$ ถ้าเราเลื่อนลิมิตผ่านเข้าไปในเครื่องหมายอินทิกรัล แต่จริง ๆ แล้วทำไม่ได้ และอีกอย่าง $\lim_{k\to\infty} w_k(t) = \infty$ ซึ่งหาค่าไม่ได้ด้วย ดังนั้นความหมายที่ถูกต้องคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_k(t)g(t)dt$$

และเรียก $w_k(t)$ ใน (1.5.18) ว่าลำดับเดลต้า (δ seguence) ซึ่งมีได้มากมาย

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.5.1

ถ้า $w(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ค่าไม่เป็นลบ และสอดคล้องกับ $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt=1$ แล้ว

$kw(kt) = w_k(t)$ คือลำดับเดลต้า

ดูการพิสูจน์ได้จากหนังสือของ D. Greenberg

<u>ตัวอย่าง</u> 1.5.5

$$w(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

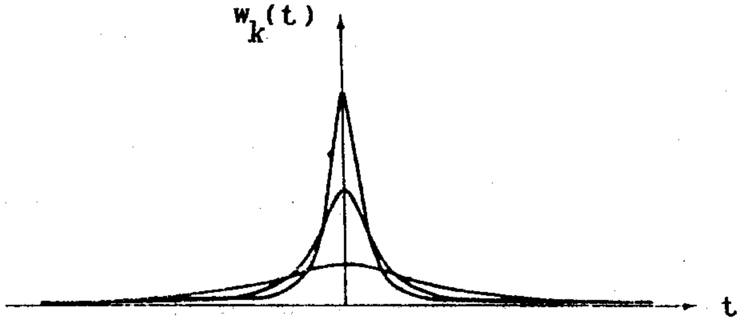
เนื่องจากฟังก์ชันนี้ไม่เป็นลบ และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1-t^2)}dt = 1$$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท จะได้ว่า

$$w_k(t) = kw(kt) = \frac{k}{\pi(1+k^2t^2)}$$

เป็นลำดับเดลต้า ดูรูป



รูป 1.5.10 ลำดับเดลต้า

ข้อสังเกต

1. ขอเน้นว่า $\delta(t)$ นิยามโดยกระทำบนฟังก์ชัน $g(t)$ ตามสมการ (1.5.21) เท่านั้น เราจะไม่พูดถึงค่าของฟังก์ชัน $\delta(t)$
2. เนื่องจากฟังก์ชันนี้มีพื้นฐานมาจากลักษณะการเต้นหรือกระตุ้นของอะไรสักอย่างดังนั้นจึงอาจเรียกว่าฟังก์ชันอิมพัลซ์ (Impulse function)
3. ฟังก์ชันเดลต้าเป็นฟังก์ชันในอุดมคติ (ideal function) ประเภทหนึ่ง เรียกว่า ฟังก์ชันเจนเนอรัลไลซ์ (generalized function) หรือฟังก์ชันแจกแจง (distribution function) นอกจากนี้อนุพันธ์ฟังก์เดลต้า $\delta'(t), \delta''(t)\ldots$ ก็ถือว่าเป็นฟังก์ชันเจนเนอรัลไลซ์ด้วย เช่น

   $3\cos t+2\delta(t-1)$, $3u(t)-\delta''(t+3)$ เป็นต้น

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเดลต้า :

เป็นไปได้ที่เราจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\delta(x)$ ซึ่งแน่นอนเราก็จะนิยามอนุพันธ์ในรูปที่กระทำบนฟังก์ชัน $g(t)$ นั่นคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)g(t)dt$$

โดยอินทิเกรตทีละส่วน

$$u = g(t)\ ,\ dv = \delta'(t)dt$$
$$du = g'(t)dt, v = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)g(t)dt = \delta(t)g(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g'(t)dt$$

$$= \delta(t)g(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - g'(0)$$

เนื่องจาก $\delta(t)$ จะเป็นศูนย์สำหรับ $t\neq 0$ ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)g(t)dt = -g'(0) \tag{1.5.22}$$

ทำนองเดียวกัน อนุพันธ์ครั้งที่ j คือ $\delta^{(j)}(t)$ นิยามโดย

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(j)}(t)g(t)dt = (-1)^j g^{(j)}(0) \tag{1.5.23}$$

เป็นการเห็นได้ชัด เมื่อ $\delta(t)$ กระทำที่ $t=0$ ดังนั้น $\delta(t-c)$ ก็จะกระทำที่ $t-c=0$ หรือที่ $t-c$ นั่นคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c)g(t)dt = g(c) \tag{1.5.24}$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(j)}(t-c)g(t)dt = (-1)^j g^{(j)}(c) \tag{1.5.25}$$

ซึ่งสมการ (1.5.24) สามารถแสดงได้โดยเปลี่ยนตัวแปร ให้ $T=t-c$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c)g(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(T)g(T+c)dT \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t+c)dt \\ &= g(t+c)\Big|_{t=0} \\ &= g(c)\end{aligned}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเดลต้ากับฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย :

เนื่องจาก

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)g(t)dt = u(t)g(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)g'(t)dt$$

$$= g(\infty) - \int_{0}^{\infty} g'(t)dt$$

$$= g(\infty)-g(\infty)+g(0)$$

$$= g(0) \qquad (1.5.26)$$

เปรียบเทียบกับสมการ (1.5.4) จะได้ว่า

$$u'(t) = \delta(t) \qquad (1.5.27)$$

ขอให้สังเกตว่า สมการ (1.5.27) เราไม่ได้หมายความว่า สำหรับแต่ละ t ค่าของฟังก์ชันทางซ้ายมือ เท่ากับค่าของฟังก์ชันทางขวามือ เนื่องจากเราไม่ได้พูดถึงค่าของ $\delta(t)$ แต่เราจะหมายถึง $u'(t)$ กระทำบน $g(t)$ (ซึ่งมีขอบเขตและต่อเนื่องที่ $t=0$) ซึ่งให้ผลเหมือนกับ $\delta(t)$ กระทำบน $g(t)$ นั่นคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t)dt \qquad (1.5.28)$$

โดยทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$u'(t-c) = \delta(t-c)$$

คุณสมบัติอื่น ๆ :

1. $t\delta(t) = 0$
2. $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$
3. $f(t)\delta(t-c) = f(c)\delta(t-c)$

4. $\left[f(t)\delta(t)\right]' = f(t)\delta'(t)+f'(t)\delta(t)$

5. $f(t)\delta'(t-c)= f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

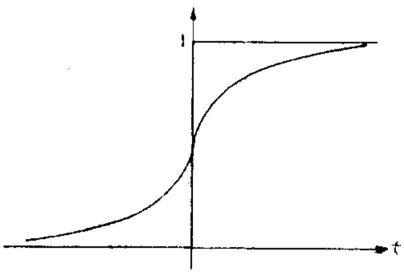
6. $f(t)\delta'(t-c)= f(c)\delta'(t-c)-f'(c)\delta(t-c)$

7. $f(f)\delta^{(k)}(t-c) = (-1)^k \sum_{r=0}^{k}(-1)^r \binom{k}{r} f^{(k-r)}(c)\delta^{(r)}(t-c)$

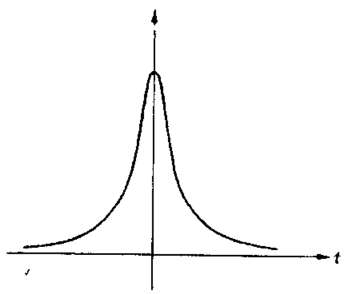
การพิสูจน์ ดูได้จากหนังสือของ Hwei P. Hsu และ Wilfred Kaplan

ข้อสังเกต

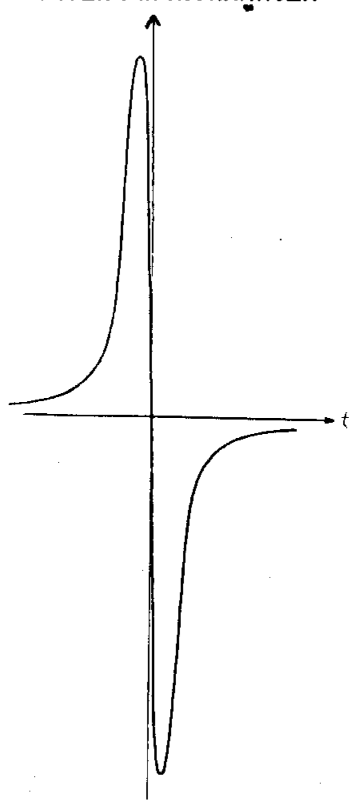
$\delta(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ $\delta'(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ , $\delta''(t)$เป็นฟังก์ชันคู่,และต่อ ๆ ไป นั่นคือ $\delta(-t)=\delta(t)$, $\delta'(-t)=-\delta'(t)$, ... นั่นคือ $\delta^{(n)}(t)$ **เป็นฟังก์ชั่นคู่หรือคี่ ขึ้นอยู่กับจำนวนเต็ม n ว่าเป็นจำนวนเต็มคู่หรือคี่**



ก) u(t)โดยประมาณว่าฟังก์ชันเรียบ



ข)δ(t)โดยประมาณว่าฟังก์ชันเรียบ



ค)δ'(t)โดยประมาณว่าฟังก์ชันเรียบ

รูป 1.5.11