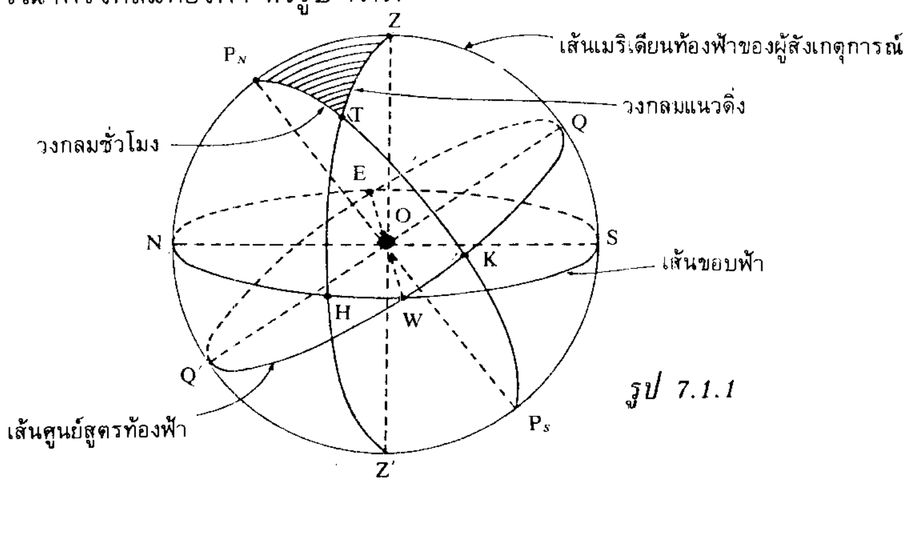
บทที่ 7
บทประยุกต์เกี่ยวกับทรงกลมท้องฟ้า

7.1 ลักษณะของทรงกลมท้องฟ้า

เมื่อเราสังเกตท้องฟ้าในเวลากลางคืน จะเห็นดวงดาวปรากฏกระจัดกระจายกันอยู่ทั่วไปในท้องฟ้า ซึ่งมีลักษณะคล้ายครึ่งทรงกลมกลวง เราเรียกทรงกลมกลวงที่เปรียบเสมือนว่ามีดาวติดอยู่ที่ผิวใน นี้ว่า **ทรงกลมท้องฟ้า** (celestial sphere) ซึ่งมีตัวเราหรือโลกเป็นจุดศูนย์กลาง ดวงดาวต่าง ๆ ที่เราเห็นนั้น อยู่ห่างจากเรามาก ยากที่จะคาดคะเนได้ และมองดูคล้าย ๆ กับว่าอยู่ห่างจากตัวเราเท่ากันหมด คือ มีระยะอยู่ห่างจากตัวเราเป็นระยะอนันต์ (infinity) ระยะดังกล่าวนี้ ก็คือ รัศมีของทรงกลมท้องฟ้านั่นเอง เพื่อความสะดวกโดยทั่ว ๆ ไปมักนิยมกำหนดให้มีระยะเท่ากับ 1 หน่วย สิ่งที่เราสนใจก็คือ ตำแหน่งที่ดาวปรากฏอยู่ หรือตำแหน่งของวัตถุใด ณ. ผิวในของทรงกลมท้องฟ้านั่นเอง ซึ่งมีวิธีบอกตำแหน่งอยู่หลายวิธี (ดังจะได้กล่าวต่อไป) และแต่ละวิธีนั้นก็มักจะเกี่ยวข้องกับระยะทางเชิงมุม (angular distance) ณ. จุดศูนย์กลางเช่นเดียวกับการบอกตำแหน่งบนผิวโลก

อนึ่ง ทรงกลมท้องฟ้านี้ หมุนรอบตัวเองครบรอบในเวลา 1 วัน เช่นเดียวกับโลก แต่หมุนในทิศทางที่วนสวนกัน คือ โลกหมุนทวนเข็มนาฬิกา หรือหมุนจากทิศตะวันตกไปสู่ทิศตะวันออก แต่ทรงกลมฟ้าหมุนตามเข็มนาฬิกา หรือหมุนจากทิศตะวันออกไปสู่ทิศตะวันตก

พิจารณาทรงกลมท้องฟ้า ดังรูป 7.1.1



รูป 7.1.1

ในรูป 7.1.1 ให้เป็นทรงกลมท้องฟ้าที่มีโลก (คือ จุด O) เป็นจุดศูนย์กลาง

จุดและวงกลมใหญ่ที่เป็นอิสระจากผู้สังเกตการณ์ (observer) มีดังนี้

1) จุด P_N เรียกว่า ขั้วท้องฟ้าเหนือ (north celestial pole) จุด P_S เรียกว่า ขั้วท้องฟ้าใต้ (south celestial pole) ซึ่งเป็นจุดตัดระหว่างแกนของโลกกับทรงกลมท้องฟ้า

2) วงกลมใหญ่ EQWQ′ เรียกว่า เส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า (celestial equator) ซึ่งเกิดจากการตัดกันของระนาบเส้นศูนย์สูตรโลกกับทรงกลมท้องฟ้า หรืออาจกล่าวได้ว่า เส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า ก็คือ เส้นศูนย์สูตรของโลกที่ขยายออกเป็นวงกว้างจนกระทั่งจรดทรงกลมท้องฟ้า ในทำนองเดียวกัน ระนาบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า ก็คือ ระนาบเส้นศูนย์สูตรของโลกที่ขยายออกไปจนจรดทรงกลมท้องฟ้านั่นเอง

อนึ่ง เส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าจะอยู่ห่างจากจุดขั้วท้องฟ้าเหนือ P_N และจุดขั้วท้องฟ้าใต้ P_S เท่ากับ 90 องศา

3) เมริเดียนท้องฟ้า (celestial meridian) คือ ครึ่งวงกลมใหญ่ใด ๆ ที่ผ่านทั้งขั้วท้องฟ้าเหนือ P_N และขั้วท้องฟ้าใต้ P_S

จาก รูป 7.1.1 จุดและวงกลมใหญ่ที่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของผู้สังเกตการณ์มีดังนี้

1) จุดเหนือศีรษะ (zenith) ของผู้สังเกตการณ์ คือ จุด Z ซึ่งเป็นจุดบนทรงกลมท้องฟ้าที่อยู่ในแนวตรงเหนือศีรษะของผู้สังเกตการณ์

2) จุดใต้เท้า (nadir) ของผู้สังเกตการณ์ คือ จุด Z′ ซึ่งเป็นจุดบนทรงกลมท้องฟ้าที่อยู่ทางอีกซีกหนึ่งและอยู่ในแนวเดียวกันกับจุดเหนือศีรษะ

ข้อสังเกต จุด Z และ Z′ เป็นจุดตัดบนทรงกลมท้องฟ้าของเส้นที่เชื่อมระหว่างตำแหน่งของผู้สังเกตการณ์กับจุดศูนย์กลางของโลกและจุดเหนือศีรษะของคนหนึ่ง ก็คือ จุดใต้เท้าของคนที่อยู่บนโลก ณ ตำแหน่งตรงกันข้าม

3) เส้นขอบฟ้า (celestial horizon) ของผู้สังเกตการณ์ คือ วงกลมใหญ่ที่อยู่ห่างจากจุดเหนือศีรษะ (จุด Z) และจุดใต้เท้า (จุด Z′) เท่ากันและเท่ากับ 90 องศา ในรูป 7.1.1 คือ วงกลมใหญ่ NESW ซึ่งก็คือระนาบที่ตั้งฉากกับวงกลมแนวดิ่งและผ่านผู้สังเกตุการณ์ (คือจุดศูนย์กลางของโลก)

4) เมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตุการณ์ (observer's celestial meridian) คือ เมริเดียนท้องฟ้าที่ผ่านจุดเหนือศีรษะ ในรูป 7.1.1 ได้แก่ เมริเดียน P_NZP_S

จากรูป 7.1.1 สำหรับวัตถุฟ้า T ใด ๆ จะได้ว่า

1) วงกลมแนวดิ่งของ T (vertical circle of T) คือ ครึ่งวงกลมใหญ่ที่อยู่ในแนวดิ่ง (หรือแนวตั้ง) บนทรงกลมท้องฟ้าซึ่งผ่านจุดเหนือศีรษะผ่านจุด T ผ่านจุดใต้เท้าและตั้งได้ฉากกับเส้นขอบ

ฟ้า จากรูป 7.1.1 คือ ครึ่งวงกลมใหญ่ ZTHZ′ โดย H เป็นจุดตัดที่ตัดกับเส้นขอบฟ้า NESW วงกลมดิ่งที่ตั้งฉากกับเมริเดียนท้องฟ้าเรียกว่า วงกลมดิ่งเอก (prime vertical circle) นั่นแสดงว่า เมริเดียนท้องฟ้ากับวงกลมดิ่งเอกอยู่ห่างกัน 90̊ และวงกลมใหญ่ทั้งสองนี้ก็แบ่งทรงกลมท้องฟ้าออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน และจุดตัดของวงกลมดิ่งเอกกับเส้นขอบฟ้าบนทรงกลมท้องฟ้าคือจุดตะวันออก (E) และจุดตะวันตก (W) ซึ่งจุดทั้งสองนี้จะอยู่บนแนวตัดของเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้ากับเส้นท้องฟ้า

2) ระดับความสูงของ T (altitude of T) คือ ระยะเชิงมุม (angular distance) จากเส้นขอบฟ้าของ T จากรูป 7.1.1 ระดับความสูงของ T คือ ส่วนโค้ง HT ระดับความสูงของ T จะมีค่าเป็นบวก (+) เมื่อ T อยู่เหนือเส้นขอบฟ้า และจะมีค่าเป็นลบ (−) เมื่อ T อยู่ใต้เส้นขอบฟ้า ค่าระดับความสูงมีได้ตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศา

3) ระยะเหนือศีรษะของ T (zenith distance of T) ก็คือ 90̊ - ระดับความสูงของ T ระยะเหนือศีรษะของ T มีค่าได้ตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศา

4) แอซิมัทของ T (azimuth of T) คือ มุมระหว่างเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์กับวงกลมแนวดิ่งที่ผ่าน T จากรูป 7.1.1 คือ มุม $P_N ZT$ โดยทั่ว ๆ ไป วัดไปตามเส้นขอบฟ้าจากจุดเหนือ (จุด N) วนไปทางตะวันออก จนกระทั่งถึงวงกลมแนวดิ่งที่ผ่านตำแหน่งที่ต้องการจะบอก (ในที่นี้คือ จุด H) (นั่นคือ วัดวนไปตามเข็มนาฬิกานั่นเอง) สำหรับวัตถุที่อยู่ทางซีกฟ้าตะวันออก ค่าแอซิมัทจะมีค่าน้อยกว่า 180 องศา แต่สำหรับวัตถุที่อยู่ทางซีกฟ้าตะวันตก ค่าแอซิมัทจะมีค่ามากกว่า 180 องศา เนื่องจากการบอกค่าแอซิมัทสามารถวนจนครบรอบ จึงมีค่าได้ตั้งแต่ 0 องศา ถึง 360 องศา โดยไม่จำเป็นต้องกำหนดเครื่องหมายหรือทิศประกอบ

5) วงกลมชั่วโมงของ T (hour circle of T) คือ วงกลมใหญ่ที่ผ่านขั้วท้องฟ้าทั้งสองผ่านจุด T และตั้งได้ฉากกับเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า ในทางปฏิบัตินิยมคิดเฉพาะครึ่งวงกลม คือ คิดระยะส่วนโค้งของวงกลมจากขั้วท้องฟ้าเหนือผ่านเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าจนถึงขั้วท้องฟ้าใต้ และผ่านจุด T จากรูป 7.1.1 คือ ครึ่งวงกลมใหญ่ $P_N TKP_S$ โดย K เป็นจุดที่วงกลมชั่วโมงตัดกับเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า (อาจกล่าวได้ว่า วงกลมชั่วโมงที่ผ่านจุดเหนือศีรษะ Z ก็คือ เมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์)

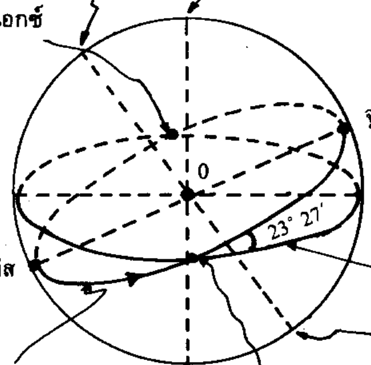
6) ความบ่ายเบนของ T (declination of T) คือ ระยะเชิงมุมที่วัดขึ้นไปทางเหนือหรือลงมาทางใต้ของเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า ตามวงกลมชั่วโมงจนถึง จุด T โดยใช้เครื่องหมาย + หรือ − แทนความหมายว่า T อยู่ทางเหนือหรือทางใต้ของเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าตามลำดับ จากรูป 7.1.1 ความบ่ายเบนของ T ก็คือ ส่วนโค้ง KT

7) ระยะเชิงขั้วของ T (polar distance of T) ก็คือ ค่า 90̊ - ความบ่ายเบนของ T

8) มุมชั่วโมงของ T (hour angle of T) ก็คือ มุมระหว่างเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์กับวงกลมชั่วโมงที่ผ่าน T โดยวัดจากเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์ไปทางทิศตะวันตก (วัดทวนเข็มนาฬิกา) อาจมีค่าตั้งแต่ 0 องศา ถึง 360 องศา ค่ามุมชั่วโมงของ T มีความหมายว่า T ได้เคลื่อนที่ผ่านเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์ไปนานเท่ากับค่านั้นนั่นเอง จึงสามารถบอกได้ว่า วัตถุฟ้า T นั้นจะตกลับขอบฟ้าหรือยัง จากรูป 7.1.1 คือ $\angle ZP_N T$

เนื่องจากการหมุนของโลกจึงทำให้ค่ามุมชั่วโมงเปลี่ยนไปตามเวลาด้วยอัตราชั่วโมงละ 15 องศา ดังนั้น ค่ามุมชั่วโมงจึงอาจวัดเป็นเวลาตั้งแต่ 0 ชั่วโมง ถึง 24 ชั่วโมง

มีลักษณะที่สำคัญบางอย่างบนทรงกลมท้องฟ้าที่เกี่ยวพันกับการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ เนื่องจากการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ทำให้เราสังเกตเห็นว่า ดวงอาทิตย์เคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกาไปครบรอบตามแนวทางบนทรงกลมท้องฟ้า โดยทำมุมกับเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าประมาณ 23° 27′ แนวทางนี้เรียกว่า อิคลิบติก (ecliptic) **ดังนั้น ระนาบอิคลิบติกจึงตัดกับระนาบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า ณ 2 ตำแหน่ง ตำแหน่งทั้งสองนี้เรียกว่า อิควินอกซ์** (equinox) **ดังรูป** 7.1.2



รูป 7.1.2

ตำแหน่งหนึ่งซึ่งตรงกับตำแหน่งของดวงอาทิตย์บนอิควิบติกกำลังเคลื่อนที่ผ่านเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าจากซีกใต้ขึ้นไปซีกเหนือ เราเรียกตำแหน่งนี้ว่า จุดเวอร์นอลอิควินอกซ์ (vernal equinox)

ส่วนอีกตำแหน่งหนึ่งซึ่งตรงกับตำแหน่งของดวงอาทิตย์บนอิคลิบติกกำลังเคลื่อนที่ตัดเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าจากซีกเหนือลงไปสู่ซีกใต้ ซึ่งเราเรียกตำแหน่งนี้ว่า จุดออตัมนอลอิควินอกซ์ (autumnal equinox) มุมแหลมระหว่างระนาบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้ากับอิคลิบติก เรียกว่า มุมเฉของระนาบอิควิบติก (obliquity of ecliptic) สำหรับตำแหน่งบนอิคลิบติกที่อยู่ห่างจากเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้ามากที่สุด เราเรียกว่า โซลสติส (solstice) โดยตำแหน่งที่อยู่ทางเหนือเรียกว่า จุดซัมเมอร์โซลสติส (summer solstice) และตำแหน่งที่อยู่ทางใต้เรียกว่า วินเตอร์โซลสติส (winter solstice)

สมมุติว่า เราแบ่งทรงกลมท้องฟ้าเป็น 2 ส่วน ตามอิคลิบติก ส่วนตัดของทรงกลมท้องฟ้าก็คือ ระนาบอิคลิบติก ในแต่ละผิวของครึ่งทรงกลมย่อมมีจุด ๆ หนึ่งที่อยู่ห่างจากระนาบตัดเท่ากับ 90 องศา จุดทั้งสองของครึ่งทรงกลมทั้งคู่ คือ จุดขั้วอิคลิบติก (ecliptic pole) จุดที่อยู่ทางซีกเหนือเรียกว่า ขั้วอิคลิบติกเหนือ (north ecliptic pole) จุดที่อยู่ทางซีกใต้เรียกว่า ขั้วอิคลิบติกใต้ (south ecliptic pole) ดังนั้น ขั้วอิคลิบติกเหนือและใต้จึงเป็นจุดบนทรงกลมท้องฟ้าที่อยู่ห่างจากอิคลิบติกเท่ากันและเท่ากับ 90 องศา และเนื่องจากระนาบอิคลิบติกทำมุมกับระนาบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าประมาณ $23^\circ\ 27'$ ขั้วอิคลิบติกจึงอยู่ห่างจากขั้วท้องฟ้าที่อยู่ซีกเดียวกันประมาณ $23^\circ\ 27'$ ด้วย ระนาบที่ขนานกับอิคลิบติกตัดทรงกลมท้องฟ้าเป็นแนวขนานอิคลิบติกของละติจูด (ecliptic parallel of latitude) และระนาบซึ่งตั้งฉากกับอิคลิบติกและผ่านจุดขั้วอิคลิบติกตัดทรงกลมท้องฟ้าเป็นวงกลมของอิคลิบติกลองจิจูด (circle of ecliptic longitude)

7.2 สามเหลี่ยมดาราศาสตร์ (astronomical triangle)

สำหรับวัตถุฟ้า T ใด ๆ บนทรงกลมท้องฟ้า เส้นเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์, วงกลมชั่วโมง และวงกลมแนวดิ่งที่ผ่านจุด T จะจัดรูปเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมได้ ซึ่งเรียกสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมนี้ว่า สามเหลี่ยมดาราศาสตร์ของ T โดยจุดยอดของสามเหลี่ยมดาราศาสตร์จะประกอบด้วย จุดเหนือศีรษะ (zenith), จุดขั้วท้องฟ้าเหนือ (north celestial pole) และจุด T

จากรูป 7.1.1 จะได้ว่า สามเหลี่ยมดาราศาสตร์ของ T ก็คือ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม P_NZT ซึ่งเกิดจาก เส้นเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์ P_NZ, เส้นวงกลมชั่วโมง P_NT และเส้นวงกลมแนวดิ่ง ZT โดยมีจุดยอด คือ จุด P_N, จุด Z และ จุด T

ส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ P_NZT มีดังนี้

1) ด้าน TZ = ระยะเหนือศีรษะของ T (zenith distance of T)

= $90^\circ -$ ระดับความสูงของ T

2) ด้าน TP_N = ระยะเชิงขั้วของ T (polar distance of T)

= $90^\circ -$ ความบ่ายเบนของ T

3) ด้าน ZP_N = โคละติจูดของผู้สังเกตการณ์ (colatitude of observer)

= $90^\circ - QZ$

= $90^\circ -$ ละติจูดของผู้สังเกตการณ์ (ในครึ่งทรงกลมเหนือ)

= $90^\circ +$ ละติจูดของผู้สังเกตการณ์ (ในครึ่งทรงกลมใต้)

4) มุม P_NZT = แอซิมัทของ T ถ้า T อยู่ทางทิศตะวันออกของเส้นเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์

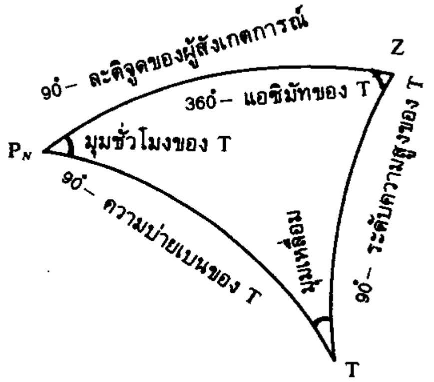
= $360^\circ -$ แอซิมัทของ T ถ้า T อยู่ทางทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์

5) มุม ZP_NT = มุมชั่วโมงของ T ถ้า T อยู่ทางทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์

= $360^\circ -$ มุมชั่วโมงของ T ถ้า T อยู่ทางทิศตะวันออกของเส้นเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์

6) มุม ZTP_N เป็นมุมระหว่างวงกลมชั่วโมงกับวงกลมแนวดิ่งที่ผ่านจุด T เรียกชื่อมุมนี้ว่า มุมเหลื่อม (parallactic angle)

จึงสามารถเขียนแสดงส่วนต่าง ๆ ลงในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ P_NZT ในกรณีนี้ T อยู่ในครึ่งทรงกลมเหนือ และอยู่ทางทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์ได้ ดังรูป 7.2.1



รูป 7.2.1

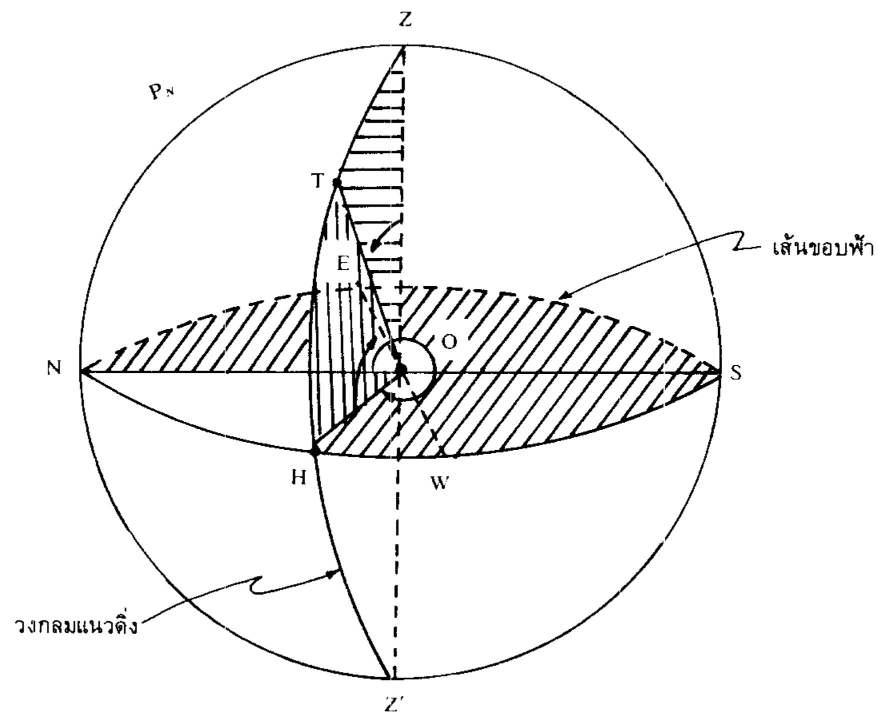
7.3 ระบบพิกัดท้องฟ้า (celestial coordinate systems)

ตำแหน่งบนผิวโลกเราสามารถบอกได้โดยอาศัยเส้นศูนย์สูตรและเส้นเมริเดียนเริ่มแรก ซึ่งเป็นวงกลมใหญ่ที่อยู่ ณ ตำแหน่งคงที่เสมอ ดังนั้น การบอกตำแหน่งบนทรงกลมท้องฟ้าก็ควรใช้หลักการทำนองเดียวกัน คือ พยายามใช้สิ่งคงที่บนทรงกลมท้องฟ้ามาช่วยกำหนดตำแหน่งของจุดหรือวัตถุบนทรงกลมท้องฟ้า โดยปกติจะกำหนดตำแหน่งโดยใช้สองส่วนซึ่งตั้งฉากกัน ส่วนหนึ่งหมุนออกจากวงกลมใหญ่อ้างอิงหลัก (primary reference great circle) และวัดตั้งฉากกับวงกลม อีกส่วนหนึ่งหมุนออกจากวงหลมใหญ่อ้างอิงรอง (secondary reference great circle) และวัดในวงกลมใหญ่อ้างอิงหลัก ระบบพิกัดท้องฟ้าแต่ละระบบขึ้นอยู่กับการเลือกวงกลมใหญ่อ้างอิงเหล่านี้ ระบบที่มักนิยมใช้บอกตำแหน่งบนท้องฟ้ามี 4 ระบบ ด้วยกัน คือ

7.3.1 ระบบเส้นขอบฟ้า (celestial horizon system)

ในระบบเส้นขอบฟ้าวงกลมใหญ่อ้างอิงหลัก ก็คือ เส้นขอบฟ้าของผู้สังเกตการณ์ และวงกลมอ้างอิงรอง ก็คือ วงกลมแนวดิ่งของวัตถุฟ้า

พิจารณา รูป 7.3.1



รูป 7.3.1 แสดงพิกัดของ T ตามระบบเส้นขอบฟ้า

ส่วนโค้ง HT คือ ระดับความสูงของ T

ส่วนโค้ง NEH คือ แอซิมัทของ T

ส่วนโค้ง TZ = 90° − ระดับความสูงของ T คือ ระยะเหนือศีรษะของ T

จากรูป 7.3.1 ได้ว่าพิกัดของ T ตามระบบเส้นขอบฟ้า ก็คือ

ระดับความสูงของ T (คือ ส่วนโค้ง HT) กับ แอซิมัทของ T (คือ $\angle P_N ZT$ หรือส่วนโค้ง NEH)

อนึ่ง ในบางกรณีแทนที่จะบอกแอซิมัทของ T เราอาจใช้ระยะเหนือศีรษะของ T ก็ได้ โดย ระยะเหนือศีรษะของ T เท่ากับ 90° − ระดับความสูงของ T

ตัวอย่าง 7.3.1.1 ถ้าวัตถุฟ้า A อยู่ ณ ทิศใต้ แล้วจะได้ว่า พิกัดของ A คือ

ระดับความสูงของ A = 0 องศา

แอซิมัทของ A = 180 องศา

และระยะเหนือศีรษะของ A = 90 องศา

ตัวอย่าง 7.3.12 ถ้าวัตถุฟ้า B อยู่ทางตะวันออกสูงจากขอบฟ้า 40 องศา แล้วจะได้ว่า พิกัดของ B คือ

ระดับความสูงของ B = 40 องศา

แอซิมัทของ B = 90 องศา

ระยะเหนือศีรษะของ T = $90^\circ - 40^\circ$ = 50 องศา

ตัวอย่าง 7.3.13 ถ้าวัตถุฟ้า C อยู่ทางตะวันตกเฉียงใต้และ 30 องศา จากจุดเหนือศีรษะ แล้วจะได้ว่า พิกัดของ C คือ

ระดับความสูงของ C = 60 องศา

แอซิมัทของ C = 225 องศา

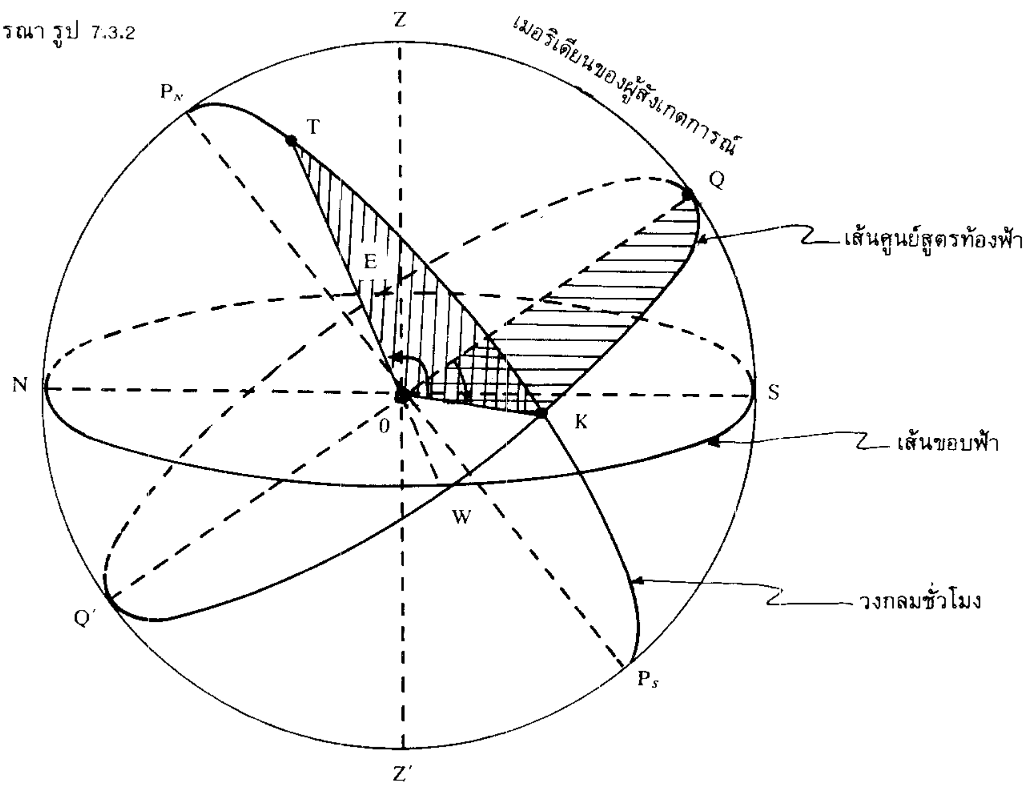
ระยะเหนือศีรษะของ C = 30 องศา

อนึ่ง ระบบเส้นขอบฟ้าเป็นระบบที่ไม่ยุ่งยาก จึงนิยมใช้กันอย่างแพร่หลายทั้งในทางการเดินเรือ การบิน และการสำรวจ ตลอดจนนักดาราศาสตร์สมัครเล่น แต่วิธีนี้ก็มีข้อเสียที่ว่า ถ้าผู้สังเกตการณ์ 2 คน อยู่คนละสถานที่ จะได้ค่าระดับความสูงและแอซิมัทของดาวดวงเดียวกันต่างกัน นอกจากนั้น ถึงแม้ว่าจะทำการสังเกตเพียงคนเดียวก็ตาม ค่าระดับความสูงและแอซิมัทของดาวดวงหนึ่งก็จะเปลี่ยนไปตามเวลาด้วย

7.3.2 ระบบมุมชั่วโมง (hour angle system)

ในระบบมุมชั่วโมงวงกลมใหญ่อ้างอิงหลัก คือ เส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าและวงกลมใหญ่อ้างอิงรองคือ วงกลมชั่วโมงของผู้สังเกตการณ์ที่ผ่านวัตถุฟ้า

พิจารณา รูป 7.3.2



รูป 7.3.2 แสดงพิกัดของ T ตามระบบมุมชั่วโมง

ส่วนโค้ง KT คือ ความบ่ายเบนของ T

มุม ZP_NT (ส่วนโค้ง KQ) คือ มุมชั่วโมงของ T

จากรูป 7.3.2 ได้ว่า พิกัดของวัตถุฟ้า T ตามระบบมุมชั่วโมง ก็คือ

ความบ่ายเบนของ T (คือส่วนโค้ง KT) กับ มุมชั่วโมงของ T (คือ $\angle ZP_NT$)

อนึ่ง จากที่เราทราบว่า ทรงกลมท้องฟ้าหมุนตามเข็มนาฬิกาครบ 1 รอบ หรือ 360 องศา ในเวลา 1 วัน หรือ 24 ชั่วโมง ดังนั้น จึงได้ว่า

ในเวลา 24 ชั่วโมง ตำแหน่งบนทรงกลมท้องฟ้าเปลี่ยนไป 36C องศา

" 1 ชั่วโมง " ———— " ———— " 15 องศา

" 1 นาที " ———— " ———— " 15 ลิบดา

" 1 วินาที " ———— " ———— " 15 พิลิบดา

ในทางกลับกัน อาจกล่าวได้ว่า

ตำแหน่งบนทรงกลมท้องฟ้าเปลี่ยนไป 360 องศา ในเวลา 24 ชั่วโมง

" ———— " ———— " 15 องศา " 1 ชั่วโมง

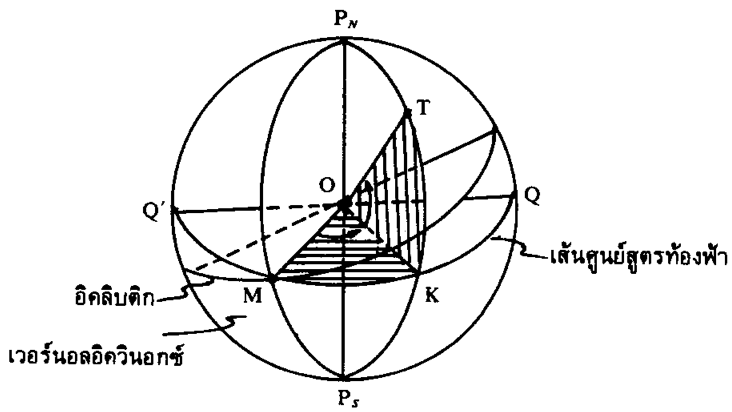
" ———— " ———— " 1 องศา " 4 นาที

" ———— " ———— " 1 ลิบดา " 4 วินาที

ดังนั้น จึงสามารถเปลี่ยนมุมเป็นเวลา และเปลี่ยนเวลาเป็นมุมได้

7.3.3 ระบบไรท์แอสเซนชัน (right ascension system)

ในระบบไรท์แอสเซนชัน วงกลมใหญ่อ้างอิงหลัก คือ เส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า และวงกลมใหญ่อ้างอิงรอง ก็คือ วงกลมชั่วโมงที่ผ่านจุดขั้วท้องฟ้าทั้งสองและจุดอิควินอกซ์ (equinoxes) ดังรูป 7.3.3



รูป 7.3.3 แสดงพิกัดของ T ตามระบบไรท์แอสเซนชัน

ส่วนโค้ง KT คือ ความบ่ายเบนของ T

ส่วนโค้ง MK คือ ไรท์แอสเซนชันของ T

จากรูป 7.3.3 ให้ T เป็นวัตถุฟ้า พิกัดของ T ตามระบบไรท์แอสเซนชัน ก็คือ

ความบ่ายเบนของ T

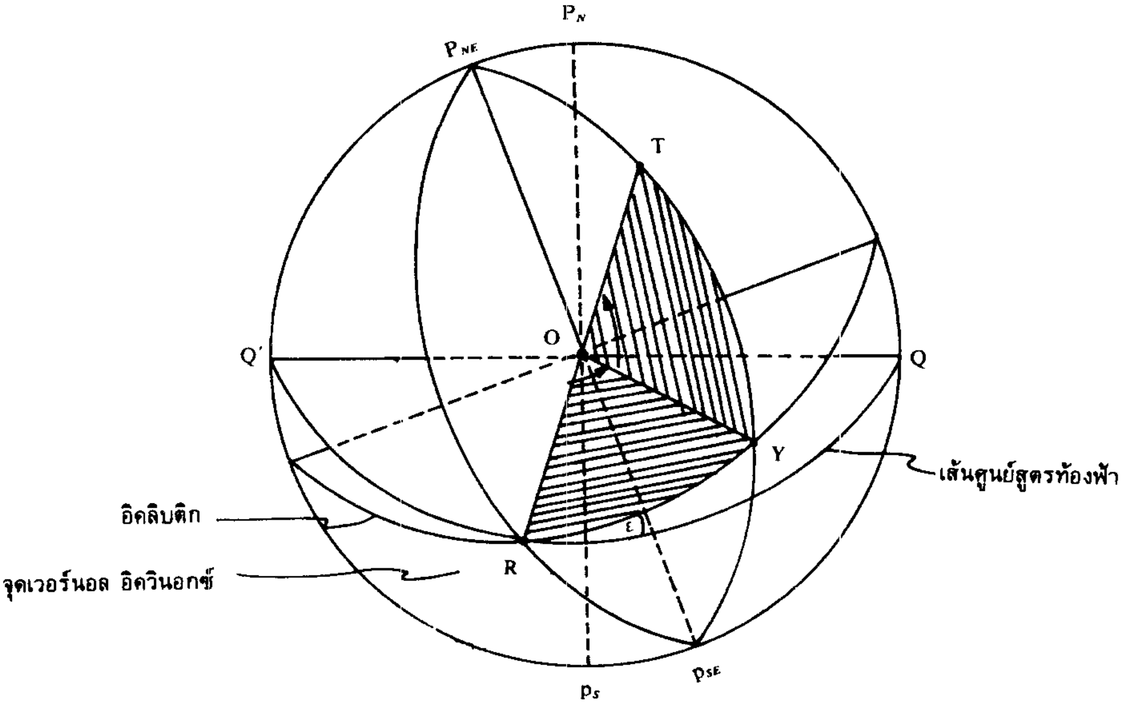
กับ ไรท์แอสเซนชันของ T

เมื่อ ไรท์แอสเซนชันของ T คือ ระยะทางเชิงมุมที่เริ่มต้นวัดจากเวอร์นอลอิควินอกซ์ไปทางตะวันออกตามเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า จนถึงวงกลมชั่วโมงที่ผ่านจุด T (หรือ คือมุมระหว่างวงกลมชั่วโมงของ T กับ วงกลมชั่วโมงที่ผ่านจุดขั้วฟ้าทั้งสองและจุดอิควินอกซ์ โดยวัดจากจุดเวอร์นอลอิควินอกซ์ไปทางทิศตะวันออกบนระนาบเส้นศูนย์สูตรฟ้า ค่าของไรท์แอสเซนชันมี

ได้ตั้งแต่ 0 องศา ถึง 360 องศา หรือ 0 ชั่วโมง ถึง 24 ชั่วโมง ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างองศากับเวลานั้นเป็นไปตามที่กล่าวแล้วในหัวข้อ 7.3.2

7.3.4 ระบบอิคลิบติก (ecliptic system)

ในระบบอิคลิบติก วงกลมใหญ่อ้างอิงหลัก คือ อิคลิบติก และวงกลมใหญ่อ้างอิงรอง คือ วงกลมใหญ่ที่ผ่านจุดขั้วอิคลิบติกทั้งสอง โดยตัดกับอิคลิบติกที่จุดเวอร์นอลอิควินอกซ์ ดังรูป 7.3.4



รูป 7.3.4 แสดงพิกัดของ T ตามระบบอิคลิบติก

ส่วนโค้ง YT คือ อิคลิบติกละติจูดหรือละติจูดท้องฟ้า (β) ของ T

ส่วนโค้ง RY คือ อิคลิบติกลองจิจูดหรือลองจิจูดท้องฟ้า (λ) ของ T

จากรูป 7.3.4 ให้ T เป็นวัตถุฟ้าบนทรงกลมท้องฟ้า พิกัดของ T ตามระบบอิคลิบติก คือ อิคลิบติกละติจูด (ecliptic latitude) กับ อิคลิบติกลองจิจูด (ecliptic longitude)

หมายเหตุ อิคลิบติกละติจูด บางทีก็เรียกว่า ละติจูดท้องฟ้า (celestial latitude) และ อิคลิบติกลองจิจูด บางทีก็เรียกว่า ลองจิจูดท้องฟ้า (celestial longitude)

อิคลิบติกละติจูด คือ ระยะทางเชิงมุมที่วัดจากอิคลิบติกไปทางเหนือหรือทางใต้ (ทางเหนือใช้เครื่องหมาย + ทางใต้ใช้เครื่องหมาย −) ตามวงกลมใหญ่ที่ผ่านขั้วอิคลิบติกทั้งสองจนถึงวัตถุฟ้า T ค่าอิคลิบติกละติจูดมีค่าได้ตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศาเหนือหรือใต้จากอิคลิบติก

อิคลิบติกลองจิจูด คือ ระยะทางเชิงมุมที่วัดจากจุดเวอร์นอลอิควินอกซ์ตามอิคลิบติกไปทางตะวันออก จนถึงวงกลมใหญ่ที่ผ่านขั้วอิคลิบติกทั้งสองและวัตถุฟ้า T ค่าอิคลิบติกลองจิจูดมีค่าได้ตั้งแต่ 0 องศา ถึง 360 องศา

จากรูป 7.3.4 ได้ว่า พิกัดของ T คือ

อิคลิบติกละติจูด β กับ อิคลิบติกลองจิจูด λ

7.4 การแปลงค่าพิกัดระบบต่าง ๆ

ต่อไปเราจะศึกษาถึงการแปลงค่าพิกัดระหว่างระบบต่าง ๆ ได้แก่ การแปลงค่าพิกัดระหว่างระบบเส้นขอบฟ้ากับระบบมุมชั่วโมง, ระบบมุมชั่วโมงกับระบบไรท์แอสเซนชัน และระบบไรท์แอสเซนชันกับระบบอิคลิบติก โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ที่ได้ศึกษามาแล้วมาใช้กับสามเหลี่ยมดาราศาสตร์

โดยทั่ว ๆ ไป เราจะใช้อักษร

- a แทน ระดับความสูง (altitude)
- A แทน แอซิมัท (azimuth)
- z แทน ระยะเหนือศีรษะ (zenith distance)
- d แทน ความบ่ายเบน (declination)
- h แทน มุมชั่วโมง (hour angle)
- P แทน มุมเหลื่อม (parallactic angle)
- L แทน ละติจูดของผู้สังเกตการณ์ (latitude of observer)
- α แทน ไรท์แอสเซนชัน (right ascension)
- β แทน อิคลิบติกละติจูด (ecliptic latitude) หรือ ละติจูดท้องฟ้า (celestial latitude)
- λ แทน อิคลิบติกลองจิจูด (ecliptic longitude) หรือ ลองจิจูดท้องฟ้า (celestial longitude)

7.4.1 การแปลงค่าพิกัดระหว่างระบบเส้นขอบฟ้ากับระบบมุมชั่วโมง

ในระบบเส้นขอบฟ้า พิกัดของจุด T ตามระบบนี้คือ ระดับความสูงของ T (h), แอซิมัทของ T (A) หรือระยะเหนือศีรษะของ T (Z)

และในระบบมุมชั่วโมง พิกัดของจุด T ตามระบบนี้คือ ความบ่ายเบนของ T (d), มุมชั่วโมงของ T (h)

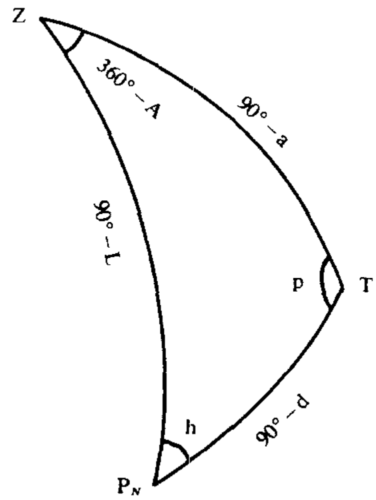
ดังได้กล่าวในหัวข้อ 7.2 แล้วว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมที่จุดขั้วท้องฟ้าเหนือ (P_N), จุดเหนือศีรษะ (Z) และ T คือ สามเหลี่ยมดาราศาสตร์ P_NZT ซึ่งเป็นสิ่งที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขอบฟ้ากับระบบมุมชั่วโมง โดยถ้า T อยู่ทางทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์ และอยู่ในครึ่งทรงกลมเหนือ แล้ว $\angle ZP_NT$ คือ มุมชั่วโมง (h), $\angle P_NZT$ คือมุมประกอบ 360ํ ของแอซิมัท $(360° - A)$, $\angle ZTP_N$ คือ มุมเหลื่อม (p)

ด้าน P_NZ คือ ส่วนประกอบ 90° ของละติจูดของผู้สังเกตการณ์ $(90° - L)$

ด้าน ZT คือ ส่วนประกอบ 90° ของระดับความสูง $(90° - a)$

ด้าน P_NT คือ ส่วนประกอบ 90° ของความบ่ายเบน $(90° - d)$

ดังรูป 7.4.1



รูป 7.4.1

ข้อสังเกต

(i) ถ้า T อยู่ในครึ่งทรงกลมใต้ ด้าน P_NZ คือ $90° + L$

(ii) ถ้า T อยู่ทางทิศตะวันออกของเมริเดียนท้องฟ้าของผู้สังเกตการณ์ จะได้ว่า $\angle P_NZT$ คือ A และ $\angle ZP_NT$ คือ $360° - h$

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรของระบบเส้นขอบฟ้ากับระบบมุมชั่วโมง สามารถหาได้โดยอาศัยกฎต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ดังนี้

1) การแปลงค่าพิกัดจากระบบเส้นขอบฟ้าไปเป็นระบบมุมชั่วโมง คือ เมื่อกำหนดค่า a, A และ L ของสามเหลี่ยม P_NZT ต้องการหาค่า h และ d

พิจารณารูป 7.4.1

ตามกฎของไซน์ จะได้ว่า

$$\frac{\sin(90° - d)}{\sin(360° - A)} = \frac{\sin(90° - a)}{\sin h}$$

$$-\frac{\cos d}{\sin A} = \frac{\cos a}{\sin h}$$

$$\therefore \quad \cos d \sin h = -\cos a \sin A \qquad \text{..........(1)}$$

ตามกฎห้าส่วน จะได้ว่า

$$\sin(90° - d)\cos h = \cos(90° - a)\sin(90° - L) - \sin(90° - a)\cos(90° - L)\cos(360° - A)$$

$$\cos d \cos h = \sin a \cos L - \cos a \sin L \cos A \qquad \text{..........(2)}$$

หาร (1) ด้วย (2) จะได้

$$\tan h = \frac{-\cos a \sin A}{\sin a \cos L - \cos a \sin L \cos A} \qquad \text{..........(3)}$$

จาก (3) เมื่อแทนค่า a, A และ L ก็สามารถหาค่า h ได้

ตามกฎของโคไซน์ สำหรับด้านจะได้ว่า

$$\cos(90° - d) = \cos(90° - a)\cos(90° - L) + \sin(90° - a)\sin(90° - L)\cos(360° - A)$$

$$\sin d = \sin a \sin L + \cos a \cos L \cos A \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (4) เมื่อแทนค่า a, A และ L ก็สามารถหาค่า d ได้

ข้อสังเกต h จะอยู่ในจตุตถภาคใดนั้นขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของเศษและส่วน ในสมการ (3) (เพราะว่า $\text{tangent} = \frac{\text{sine}}{\text{cosine}}$)

ตัวอย่าง 7.4.1 จงแปลงค่าพิกัดจากระบบเส้นขอบฟ้าเป็นระบบมุมชั่วโมง ถ้ากำหนดให้ A = 208°, 12′, a = 59° 10′ 22″ และ L = 21° 18′ เหนือ

วิธีทำ

จาก $\quad \sin d = \sin a \sin L + \cos a \cos L \cos A$

$$\therefore \quad \sin d = \sin(59° 10' 22'')\sin(21° 18') + \cos(59° 10' 22'')\cos(21° 18')\cos(208° 12')$$

$$= (0.85869)(0.36325) + (0.51245)(0.93169)(-0.88130)$$

$$= (0.31192) - (0.42077)$$

$$= -0.10885$$

$$\therefore \quad d = \sin^{-1}(-0.10885)$$

$$= -6° \; 14' \; 56''$$

(หรืออาจกล่าวได้ว่า $d = 6° \; 14' \; 56''$ ใต้)

และจาก $\tan h = \dfrac{-\cos a \sin A}{\sin a \cos L - \cos a \sin L \cos A}$

$$\therefore \tan h = \frac{-(\cos 59° \, 10' \, 22'')(\sin 208' \, 12')}{(\sin 59° \, 10' \, 22'')(\cos 21° \, 18') - (\cos 59° \, 10' \, 22'')(\sin 21° \, 18')(\cos 208° \, 12')}$$

$$= \frac{(-0.51245)(-0.47255)}{(0.85869)(0.93169) - (0.51245)(0.36325)(-0.88130)}$$

$$= \frac{0.24216}{(0.80003) - (-0.16405)}$$

$$= \frac{0.24216}{0.96408}$$

$$= 0.25118$$

$$\therefore h = \tan^{-1} 0.25118$$

$$= 14° \; 6'$$

ดังนั้นจึงได้ว่า ความบ่ายเบน $d = 6° \; 14' \; 56''$ ใต้ และมุมชั่วโมง $h = 14° \; 6'$ ตะวันตก

2) **การแปลงค่าพิกัดจากระบบมุมชั่วโมงไปเป็นระบบเส้นขอบฟ้า** คือ เมื่อกำหนดค่า d, h และ L ของสามเหลี่ยม $P_N ZT$ ต้องการหาค่า A และ a

พิจารณารูป 7.4.1

ตามกฎของไซน์ จะได้ว่า

$$\frac{\sin(90° - d)}{\sin(360° - A)} = \frac{\sin(90° - a)}{\sin h}$$

$$\frac{-\cos d}{\sin A} = \frac{\cos a}{\sin h}$$

$$\therefore \quad \cos a \sin A = -\cos d \sin h \qquad \text{..........(1)}$$

ตามกฎห้าส่วน จะได้ว่า

$$\sin(90° - a)\cos(360° - A) = \cos(90° - d)\sin(90° - L) - \sin(90° - d)\cos(90° - L)\cos h$$

$$\therefore \quad \cos a \cos A = \sin d \cos L - \cos d \sin L \cos h \qquad \text{..........(2)}$$

หาร (1) ด้วย (2) จะได้

$$\tan A = \frac{-\cos d \sin h}{\sin d \cos L - \cos d \sin L \cos h} \qquad \text{..........(3)}$$

จาก (3) เมื่อแทนค่า d, h และ L ก็จะได้ค่า A

และตามกฎของโคไซน์สำหรับด้าน จะได้ว่า

$$\cos(90° - a) = \cos(90° - d)\cos(90° - L) + \sin(90° - d)\sin(90° - L)\cos h$$

$$\sin a = \sin d \sin L + \cos d \cos L \cos h \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (4) เมื่อแทนค่า d, h, L ก็จะได้ค่า a

ข้อสังเกต ค่า A จะอยู่ในจตุตถภาคใดขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของเศษและส่วนในสมการ (3)

ตัวอย่าง 7.4.2 จงแปลงค่าพิกัดจากระบบมุมชั่วโมงเป็นระบบเส้นขอบฟ้า ถ้ากำหนดให้ $d = 8°$ เหนือ, $h = 325°$ และ $L = 39°$ เหนือ

วิธีทำ ในที่นี้ T อยู่ในครึ่งทรงกลมเหนือ และอยู่ทางทิศตะวันออกของเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตการณ์

จาก $\sin a = \sin d \sin L + \cos d \cos L \cos h$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \sin a &= (\sin 8°)(\sin 39°) + (\cos 8°)(\cos 39°)(\cos 325°) \\
&= (0.13917)(0.62932) + (0.99027)(0.77715)(0.81915) \\
&= 0.08758 + 0.63041 \\
&= 0.71799 \\
a &= \sin^{-1}(0.71799) \\
&= 45° \; 53' \; 20''
\end{aligned}$$

จาก $\tan A = \dfrac{-\cos d \sin h}{\sin d \cos L - \cos d \sin L \cos h}$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \tan A &= \frac{(-\cos 8°)(\sin 325°)}{(\sin 8°)(\cos 39°) - (\cos 8°)(\sin 39°)(\cos 325°)} \\
&= \frac{(-0.99027)(-0.57358)}{(0.13917)(0.77715) - (0.99027)(0.62932)(0.81915)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{0.56800}{(0.10815) - (0.51049)}$$

$$= \frac{0.56800}{-0.40234}$$ (เศษเป็นบวก, ส่วนเป็นลบ มุมจึงอยู่ในจตุตถภาคที่สอง)

$$= -1.41174$$

$$A = \tan^{-1}(-1.41174)$$

$$= 180° - (54° 41' 13'')$$

$$= 125° 18' 47''$$

ดังนั้นจึงได้ว่า ระดับความสูง $a = 45° 53' 20''$ และแอซิมัท $A = 125° 18' 47''$

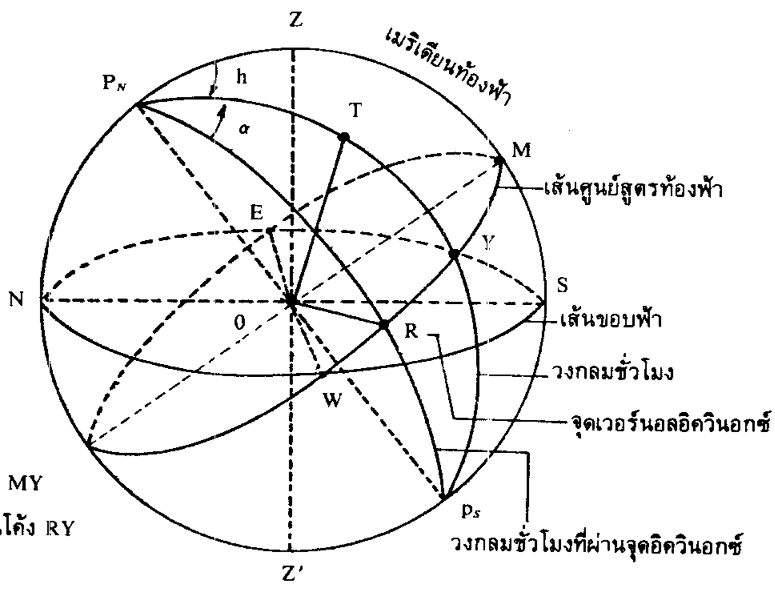
7.4.2 การแปลงค่าพิกัดระหว่างระบบมุมชั่วโมงกับระบบไรท์แอสเซนชัน

ในระบบมุมชั่วโมง พิกัดของจุด T ตามระบบนี้ คือ ความบ่ายเบน (d) ของ T, มุมชั่วโมง (h) ของ T

และในระบบไรท์แอสเซนชัน พิกัดของจุด T ตามระบบนี้ คือ ความบ่ายเบน (d) ของ T, ไรท์แอสเซนชัน (α) ของ T

จึงเห็นได้ชัดว่า ระบบมุมชั่วโมงและระบบไรท์แอสเซนชัน มีค่าความบ่ายเบน (ค่า d) เป็นค่าร่วม ดังนั้นการแปลงค่าพิกัดระหว่างสองระบบนี้จึงเป็นแปลงค่าเฉพาะระหว่างค่ามุมชั่วโมงกับค่าไรท์แอสเซนชันเท่านั้น

พิจารณารูป 7.4.2



มุมชั่วโมง (h) ของ T = ส่วนโค้ง MY

ไรท์แอสเซนชัน (α) ของ T = ส่วนโค้ง RY

S.T. = $h + \alpha$

ความบ่ายเบนของ T = ส่วนโค้ง YT

รูป 7.4.2

จากรูป 7.4.2 ให้วัตถุฟ้า T มีมุมชั่วโมง = h, ไรท์แอสเซนชัน = α (โดยที่ค่ามุมชั่วโมงวัดจากเส้นเมอริเดียนท้องฟ้าไปทางตะวันตกตามเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า ส่วนค่าไรท์แอสเซนชันวัดจากเวอร์นัลอิควินอกซ์ไปทางตะวันออก ตามเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า) จากรูปจะเห็นว่า

$$S.T. = h + \alpha$$

เมื่อ S.T. นั้น เป็นการวัดค่า **เวลาดาราคติ** (sideral time) ของจุด T ซึ่งกำหนดให้เป็นมุมชั่วโมงของจุดเวอร์นัลอิควินอกซ์ กล่าวคือ เวลาดาราคติ ณ. ที่แห่งหนึ่ง จะมีค่าเท่ากับผลรวมของมุมชั่วโมงกับไรท์แอสเซนชันของวัตถุฟ้า T ณ. ขณะนั้น

ดังนั้น ถ้าเรารู้ค่าเวลาดาราคติ S.T. แล้ว ย่อมสามารถแปลงค่าระหว่างระบบมุมชั่วโมงกับระบบไรท์แอสเซนชันได้ ดังนี้

1) การแปลงค่าจากระบบมุมชั่วโมงไปเป็นระบบไรท์แอสเซนชัน ได้ดังนี้

$$d = d$$

$$\alpha = S.T. - h$$

2) การแปลงค่าจากระบบไรท์แอสเซนชันไปเป็นระบบมุมชั่วโมง ได้ดังนี้

$$d = d$$

$$h = S.T. - \alpha$$

ตัวอย่าง 7.4.3 จงแปลงค่าพิกัดจากระบบไรท์แอสเซนชันไปเป็นระบบมุมชั่วโมง เมื่อกำหนดให้ $S.T. = 12^h\,54^m\,16^s$, $\alpha = 18^h\,34^m\,36^s$ และ $d = 30°\,12'\,18''$

วิธีทำ

จาก $S.T. = 12^h\,54^m\,16^s$

และ $\alpha = 18^h\,34^m\,36^s$

$\therefore\quad h = S.T. - \alpha = -6^h\,19^m\,40^s + 24^h$

$= 18^h\,19^m\,40^s$

ดังนั้น ค่าพิกัดในระบบมุมชั่วโมง คือ $d = 30°\,12'\,18''$, $h = 18^h\,19^m\,40^s$

ตัวอย่าง 7.4.4 จงแปลงค่าพิกัดจากระบบมุมชั่วโมงไปเป็นระบบไรท์แอสเซนชัน เมื่อกำหนดให้ $S.T. = 12^h\,54^m\,16^s$, $h = 18^h\,19^m\,40^s$ และ $d = 30°\,12'\,18''$

วิธีทำ

จาก $S.T. = 12^h\,54^m\,16^s$

และ $h = 18^h\,19^m\,40^s$

$\therefore \quad \alpha = S.T. - h = -6^h 34^m 36^s + 24^h$

$= 18^h 34^m 36^s$

ดังนั้น ค่าพิกัดในระบบไรท์แอสเซนชัน คือ $d = 30° 12' 18''$, $\alpha = 18^h 34^m 36^s$

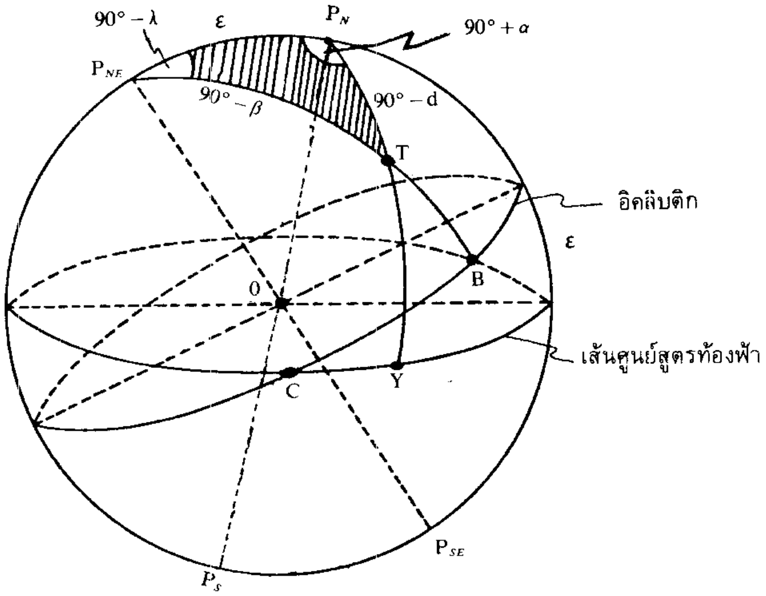
ข้อสังเกต ค่า h และ α จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0^h ถึง 24^h (หรือ 0° ถึง 360°) ดังนั้น ถ้าได้ค่าติดเครื่องหมาย – จึงต้องบวกด้วย 24^h (หรือบวกด้วย 360° แต่กรณี)

7.4.3 การแปลงค่าพิกัดระหว่างระบบไรท์แอสเซนชันกับระบบอิคลิบติก

ในระบบไรท์แอสเซนชัน พิกัดของจุด T ตามระบบนี้ คือ ความบ่ายเบน (d) ของ T และไรท์แอสเซนชัน (α) ของ T

และในระบบอิคลิบติก พิกัดของจุด T ตามระบบนี้คือ อิคลิบติกละติจูด หรือละติจูดท้องฟ้า(β) ของ T และอิคลิบติกลองจิจูด หรือลองจิจูดท้องฟ้า (λ) ของ T

พิจารณารูป 7.4.3



รูป 7.4.3

ไรท์แอสเซนชันของ T (α) คือ ส่วนโค้ง CY

ความบ่ายเบนของ T (d) คือ ส่วนโค้ง YT

ละติจูดท้องฟ้าของ T (β) คือ ส่วนโค้ง BT

ลองจิจูดท้องฟ้าของ T (λ) คือ ส่วนโค้ง CB

จากรูป 7.4.3 ให้ T คือ ตำแหน่งของวัตถุฟ้าที่อยู่บนซีกเหนือของทรงกลมท้องฟ้า ซึ่งมีความบ่ายเบน d, ไรท์แอสเซนชัน α ในระบบไรท์แอสเซนชัน และมีละติจูดท้องฟ้า β, ลองจิจูดท้องฟ้า λ ในระบบอิคลิบติก ให้ P_N เป็นจุดขั้วท้องฟ้าเหนือ, จุด P_{NE} เป็นจุดขั้วอิคลิบติกเหนือ จะได้ว่า $P_{NE}P_NT$ เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม เนื่องจากค่าไรท์แอสเซนชันของจุดขั้วอิคลิบติกเหนือ (จุด P_{NE}) เป็น 270° (หรือ 18^h) ค่าลองจิจูดของจุดขั้วท้องฟ้าเหนือ (จุด P_N) เป็น 90° และให้ระนาบอิคลิบติกเอียงทำมุมกับระนาบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า เท่ากับ ε โดย ε มีค่า 23 องศา 27 ลิบดา ดังนั้น ขั้วอิคลิบติกเหนือ (จุด P_{NE}) ย่อมอยู่ห่างจากขั้วท้องฟ้าเหนือ (จุด P_N) เท่ากับ ε ด้วย คือ $P_{NE}P_N = \varepsilon$ ดังนั้น จึงได้ว่าสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม $P_{NE}P_NT$ มีค่าในส่วนต่าง ๆ ดังนี้

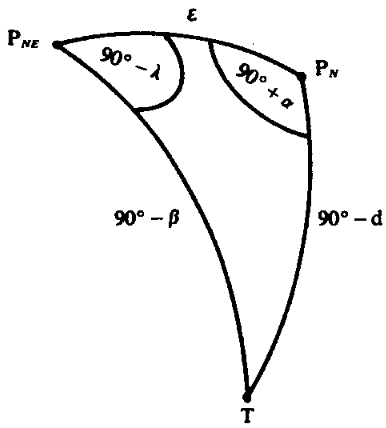
$$
\begin{aligned}
P_{NE}P_N &= \varepsilon \\
P_{NE}T &= 90^\circ - \beta \\
P_NT &= 90^\circ - d \\
\angle P_NP_{NE}T &= 90^\circ - \lambda
\end{aligned}
$$

และ $\angle TP_NP_{NE} = 90^\circ + \alpha$

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรของระบบไรท์แอสเซนชันกับระบบอิคลิบติก สามารถหาได้โดยอาศัยกฎต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ดังนี้

1) **การแปลงค่าพิกัดจากระบบไรท์แอสเซนชันไปเป็นระบบอิคลิบติก** คือ ถ้ากำหนดค่า d, α และ ε มาให้ สามารถหาค่า β และ λ ได้

พิจารณา สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม $P_{NE}P_NT$ ดังรูป 7.4.4



รูป 7.4.4

จากกฎโคไซน์สำหรับด้านจะได้ว่า

$$\cos(90^\circ - \beta) = \cos(90^\circ - d)\cos\varepsilon + \sin(90^\circ - d)\sin\varepsilon\cos(90^\circ + \alpha)$$

$$\therefore \quad \sin\beta = \sin d\cos\varepsilon - \cos d\sin\varepsilon\sin\alpha \qquad \text{..........(1)}$$

จาก (1) เมื่อแทนค่า d, ε, α แล้ว สามารถหาค่า β ได้

จากกฎของไซน์ ได้ว่า

$$\frac{\sin(90^\circ - \lambda)}{\sin(90^\circ - d)} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta)}$$

$$\therefore \quad \cos\lambda\cos\beta = \cos\alpha\cos d \qquad \text{..........(2)}$$

และจากกฎห้าส่วน จะได้ว่า

$$\sin(90^\circ - \beta)\cos(90^\circ - \lambda) = \cos(90^\circ - d)\sin\varepsilon - \sin(90^\circ - d)\cos\varepsilon\cos(90^\circ + \alpha)$$

$$\therefore \quad \cos\beta\sin\lambda = \sin d\sin\varepsilon + \cos d\cos\varepsilon\sin\alpha \qquad \text{..........(3)}$$

หาร (3) ด้วย (2) จะได้

$$\tan\lambda = \frac{\sin d\sin\varepsilon + \cos d\cos\varepsilon\sin\alpha}{\cos\alpha\cos d} \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (4) เมื่อแทนค่า d, ε, α แล้วสามารถหา λ ได้

ตัวอย่าง 7.4.5 จงแปลงพิกัดจากระบบไรท์แอสเซนชันไปเป็นระบบอิคลิบติก ถ้ากำหนดให้ $\alpha = 5^h 49^m$, $d = 7^\circ 23'$ และ $\varepsilon = 23^\circ 27'$

วิธีทำ

จาก $\quad \alpha = 5^h 49^m$

จึงได้ว่า $\quad \alpha = 87^\circ 15'$

$$\because \quad \sin\beta = \sin d\cos\varepsilon - \cos d\sin\varepsilon\sin\alpha$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \sin\beta &= \sin 7^\circ 23'\cos 23^\circ 27' - \cos 7^\circ 23'\sin 23^\circ 27'\sin 87^\circ 15' \\
&= (0.12851)(0.91741) - (0.99171)(0.39795)(0.99885) \\
&= -0.27630
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \beta &= \sin^{-1}(-0.27630) \\
&= -16^\circ 2'' 21''
\end{aligned}$$

และจาก $\quad \tan\lambda = \dfrac{\sin d\sin\varepsilon + \cos d\cos\varepsilon\sin\alpha}{\cos\alpha\cos d}$

$$\therefore \quad \tan\lambda = \frac{\sin 7^\circ 23'\sin 23^\circ 27' + \cos 7^\circ 23'\cos 23^\circ 27'\sin 87^\circ 15'}{\cos 87^\circ 15'\cos 7^\circ 23'}$$

$$= \frac{(0.12851)(0.39795) + (0.99171)(0.91741)(0.99885)}{(0.04798)(0.99171)}$$

$$= \frac{0.95990}{0.04758}$$

$$= 20.17444$$

$$\therefore \qquad \lambda = \tan^{-1}(20.17444)$$

$$= 87^\circ\ 9'\ 44''$$

2) การแปลงค่าพิกัดจากระบบอิคลิบติกไปเป็นระบบไรท์แอสเซนชัน คือ ถ้ากำหนดค่า β, λ และ ε มาให้ ก็สามารถหาค่า d และ α ได้

พิจารณา สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม $P_{NE}P_NT$ ในรูป 7.4.4

จากกฎโคไซน์สำหรับด้านจะได้ว่า

$$\cos(90^\circ - d) = \cos(90^\circ - \beta)\cos\varepsilon + \sin(90^\circ - \beta)\sin\varepsilon\cos(90^\circ - \lambda)$$

$$\therefore \qquad \sin d = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda \qquad \text{..........(5)}$$

จาก (5) เมื่อแทนค่า β, ε, λ ก็สามารถหาค่า d ได้

จากกฎของไซน์ ได้ว่า

$$\frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{\sin(90^\circ - \lambda)}{\sin(90^\circ - d)}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\lambda}{\cos d}$$

$$\therefore \qquad \cos\alpha\cos d = \cos\lambda\cos\beta \qquad \text{..........(6)}$$

และจากกฎห้าส่วน จะได้ว่า

$$\sin(90^\circ - d)\cos(90^\circ + \alpha) = \cos(90^\circ - \beta)\sin\varepsilon - \sin(90^\circ - \beta)\cos\varepsilon\cos(90^\circ - \lambda)$$

$$-\cos d\sin\alpha = \sin\beta\sin\varepsilon - \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda$$

หรือ $$\cos d\sin\alpha = -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda \qquad \text{..........(7)}$$

หาร (7) ด้วย (6) จะได้

$$\tan\alpha = \frac{-\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda}{\cos\lambda\cos\beta} \qquad \text{..........(8)}$$

จาก (8) เมื่อแทนค่า β, ε, λ ก็สามารถหาค่า α ได้

ตัวอย่าง 7.4.8 จงแปลงค่าพิกัดจากระบบอิคลิบติกไปเป็นระบบไรท์แอสเซนชัน ถ้ากำหนดให้ $\beta = -16° 2' 21''$, $\lambda = 87° 9' 44''$ และ $\varepsilon = 23° 27'$

วิธีทำ

จาก $\sin d = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda$

$$\therefore \sin d = \sin(-16° 2' 21'')\cos 23° 27' + \cos(-16° 2' 21'')\sin 23° 27' \cdot \sin 87° 9' 44''$$

$$= (-0.27630)(0.91741) + (0.96107)(0.39795)(0.99885)$$

$$= 0.12853$$

$$\therefore d = \sin^{-1}(0.12853)$$

$$= 7° 23'$$

จาก $\tan\alpha = \dfrac{-\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda}{\cos\lambda\cos\beta}$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{(-\sin(-16° 2' 21'')\cdot(\sin 23° 27') + \cos(-16° 2' 21'')\cos 23° 27' \cdot \sin 87° 9' 44''}{\cos 87° 9' 44'' \cdot \cos(-16° 2' 21'')}$$

$$= \frac{(0.27630)(0.39795) + (0.96107)(0.91741)(0.99885)}{(0.04951)(0.96107)}$$

$$= \frac{0.9906347}{0.0475825}$$

$$= 20.819307$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1} 20.819$$

$$= 87° 15'$$

แบบฝึกหัด 7.4

1. จงแปลงค่าพิกัดของ T จากระบบเส้นขอบฟ้า ไปเป็นระบบมุมชั่วโมง ถ้ากำหนดให้

   1.1) $A = 44° 49' 41''$, $a = 51° 46' 36''$ และ $L = 44° 45'$ เหนือ

   1.2) $A = 312° 14' 53''$, $a = 31° 13' 20''$ และ $L = 35°$ ใต้

   1.3) $A = 85° 59' 35''$, $a = 36° 40' 18''$ และ $L = 45°$ ใต้

2. จงแปลงค่าพิกัดของ T จากระบบมุมชั่วโมง ไปเป็นระบบเส้นขอบฟ้า ถ้ากำหนดให้

   2.1) $d = 59° 56'$ เหนือ, $h = 299° 28'$ ตะวันตก และ $L = 44°45'$ เหนือ

   2.2) $d = 10°$ เหนือ, $h = 40°$ ตะวันตกและ $L = 35°$ ใต้

   2.3) $d = 22° 30'$ ใต้, $h = 300°$ ตะวันตก และ $L = 45°$ ใต้

3. จงแปลงค่าพิกัดของ T จากระบบไรท์แอสเซนชันไปเป็นระบบมุมชั่วโมง เมื่อกำหนดให้

   3.1) $S.T. = 4^h 20^m 30^s$, $\alpha = 12^h 31^m 10^s$, $d = 24° 30'$

   3.2) $S.T. = 12^h 15^m 20^s$, $\alpha = 5^h 4^m 3^s$, $d = 15° 16' 20''$

4. จงแปลงค่าพิกัดของ T ที่หาได้ในข้อ 3) จากระบบมุมชั่วโมงไปเป็นระบบไรท์แอสเซนชัน

5. จงแปลงค่าพิกัดของ T จากระบบไรท์แอสเซนชันไปเป็นระบบอิคลิบติก เมื่อกำหนดให้

   5.1) $\alpha = 2^h 15^m 50^s$, $d = 89° 6'$ และ $\varepsilon = 23° 27'$

   5.2) $\alpha = 14^h 1^m 57^s$, $d = 64° 48' 48''$ และ $\varepsilon = 23° 27'$

6. จงแปลงค่าพิกัดของ T จากระบบอิคลิบติกไปเป็นระบบไรท์แอสเซนชัน

   6.1) $\beta = 66° 2' 15''$, $\lambda = 88° 9' 41''$ และ $\varepsilon = 23° 27'$

   6.2) $\beta = 66° 26' 49''$, $\lambda = 156° 29' 43''$ และ $\varepsilon = 23° 27'$

7.5 เวลาเฉพาะท้องถิ่นปรากฏ

เมื่อจุดศูนย์กลางของดวงอาทิตย์อยู่บนเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตการณ์ คือ $\angle ZP_NT$ ของสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT มีค่าเท่ากับ $0°$ นั้น เรียกว่า **เวลาเที่ยงสุริยคติเฉพาะท้องถิ่น** (local solar noon) สำหรับผู้สังเกตการณ์

เวลาเฉพาะท้องถิ่น หรือเวลาเฉพาะท้องถิ่นปรากฏ (local apparent time) ของผู้สังเกตการณ์ที่ชั่วขณะเวลาใด ๆ ก็คือ $12^h - \angle ZP_NT$ (ของสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT) เมื่อดวงอาทิตย์อยู่ในท้องฟ้าตะวันออก และคือ $12^h + \angle ZP_NT$ เมื่อดวงอาทิตย์อยู่ในท้องฟ้าตะวันตก

ตัวอย่าง 7.5.1 จงหาเวลาเฉพาะท้องถิ่นปรากฏที่นิวยอร์ค ซึ่งมีละติจูดเป็น $40° 42'$ เหนือ ที่ชั่วขณะเวลา

1) ก่อนเที่ยงวัน
2) หลังเที่ยงวัน

เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น $34° \ 32'$ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น $+12° 54'$

วิธีทำ

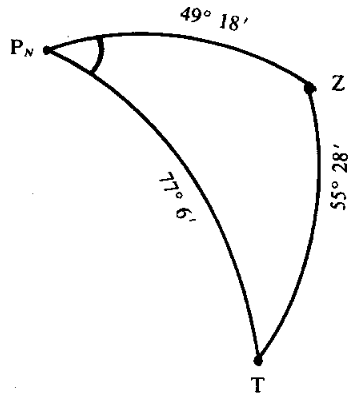
ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า

$$\begin{aligned} TZ &= 90° - \text{ระดับความสูง} \\ &= 90° - 34° 32' \\ &= 55° 28' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TP_N &= 90° - \text{ความบ่ายเบน} \\ &= 90° - 12° 54' \\ &= 77° 6' \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} ZP_N &= 90° - \text{ละติจูด} \\ &= 90° - 40° 42' \\ &= 49° 18' \end{aligned}$$

ดังรูป 7.5.1



รูป 7.5.1

จากสูตรโคไซน์สำหรับด้าน ได้ว่า

$$\cos P_N = \frac{\cos 55^\circ 28' - (\cos 77^\circ 6')(\cos 49^\circ 18')}{(\sin 77^\circ 6')(\sin 49^\circ 18')}$$

$$= \frac{(0.56689) - (0.22325)(0.65210)}{(0.97476)(0.75813)}$$

$$= 0.57011$$

$$\therefore \quad P_N = \cos^{-1} 0.57011$$

$$= 55^\circ\ 14'\ 30''$$

นั่นคือ $\angle ZP_NT = 55^\circ\ 14'\ 30''$

$$= 3^h\ 40^m\ 58^s$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

1) ก่อนเที่ยงวันเวลาท้องถิ่นปรากฏ คือ

$$12^h - 3^h\,40^m\,58^s = 8^h\,19^m\,2^s$$

$$= 8 : 19 : 2 \text{ A.M}$$

2) หลังเที่ยงวันเวลาท้องถิ่นปรากฏ คือ

$$12^h + 3^h\,40^m\,58^s = 15^h\,40^m\,58^s$$

$$= 3 : 40 : 58 \text{ P.M}$$

ตัวอย่าง 7.5.2 จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏ ขณะดวงอาทิตย์ขึ้นและดวงอาทิตย์ตก ที่ละติจูด 64° 9′ เหนือ เมื่อความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น 15° 45′

วิธีทำ

ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า

$$TZ = 90° - \text{ระดับความสูง}$$
$$= 90° - 0°$$
$$= 90°$$

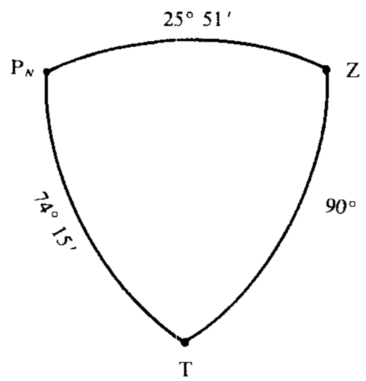
(เพราะว่า เมื่อดวงอาทิตย์ขึ้นและดวงอาทิตย์ตกนั้น จุดศูนย์กลางของดวงอาทิตย์อยู่บนเส้นขอบฟ้า ระดับความสูงจึงเท่ากับ 0°)

$$TP_N = 90° - \text{ความบ่ายเบน}$$
$$= 90° - 15° 45'$$
$$= 74° 15'$$

และ

$$ZP_N = 90° - \text{ละติจูด}$$
$$= 90° - 64° 9'$$
$$= 25° 51'$$

จึงได้ว่า สามเหลี่ยม ZP_NT เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ดังรูป 7.5.2



รูป 7.5.2

และสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $Z'P_N'T'$ ของสามเหลี่ยม ZP_NT ย่อมเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ซึ่งมี

$$\angle Z' = 180° - TP_N$$
$$= 180° - 74° 15'$$
$$= 105° 45'$$

$$\angle T' = 180° - ZP_N$$
$$= 180° - 25° 51'$$
$$= 154° 9'$$
$$\angle P'_N = 180° - TZ$$
$$= 180° - 90°$$
$$= 90°$$

จากสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก $Z'P'_NT'$ จะได้ว่า

$$\cos P'_N = \cot T' \cot Z'$$
$$= (\cot 154° 9')(\cot 105° 45')$$
$$= (-\cot 25° 51')(-\cot 74° 15')$$
$$= (-2.0640) - (0.28203)$$
$$= 0.58211$$
$$P'_N = \cos^{-1}(0.58211)$$
$$= 54° 24' 3''$$
$$\therefore \quad \angle P_N = 180 - P'_N$$
$$= 180° - 54° 24' 3''$$
$$= 125° 35' 57''$$

นั่นคือ $\angle ZP_NT = 125° 35' 57''$
$$= 8^h 22^m 24^s$$

ดังนั้น เวลาท้องถิ่นปรากฏของดวงอาทิตย์ขึ้น $= 12^h - 8^h 22^m 24^s$
$$= 3{:}37{:}36 \text{ A.M.}$$

และเวลาท้องถิ่นปรากฏของดวงอาทิตย์ตก $= 12^h + 8^h 22^m 24^s$
$$= 20^h 22^m 24^s$$
$$= 8{:}22{:}24 \text{ P.M.}$$

แบบฝึกหัด 7.5

1. จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏทั้งก่อนเที่ยงวันและหลังเที่ยงวัน ของสถานที่แห่งหนึ่งซึ่งอยู่ที่ละติจูด 62° 37′ 48″ เหนือ, เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 40° 10′ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น 15° 38′

2. จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏที่กรุงวอชิงตัน ดี.ซี. ซึ่งอยู่ที่ละติจูด 38° 55′ เหนือ ในขณะเวลาหลังเที่ยงวัน เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 25° 40′ เหนือ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น – 19° 15′

3. จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏในตอนเช้า ที่
   3.1) ละติจูด 39° เหนือ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 22° และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น +20°
   3.2) ละติจูด 45° 24′ เหนือ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 24° 12′ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น +13° 16′
   3.3) ละติจูด 25° 14′ เหนือ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 38° 26′ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น −18° 16′

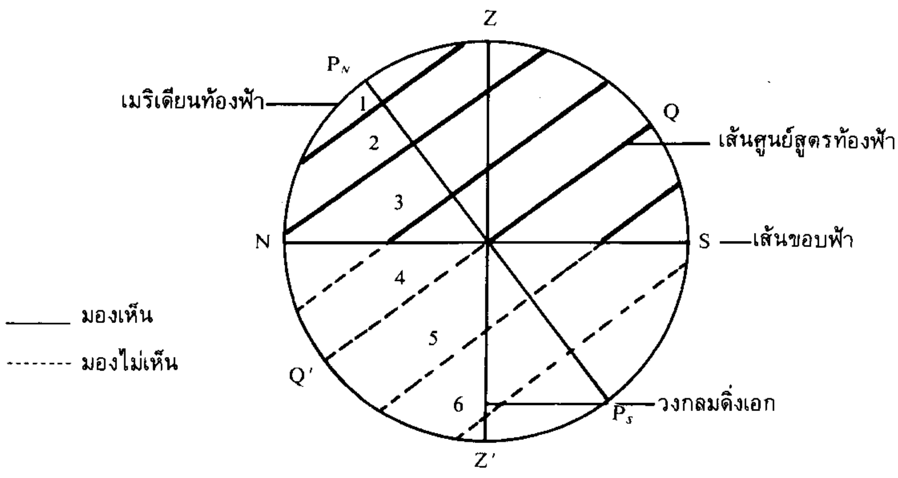
4. จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏในตอนบ่าย ที่
   4.1) ละติจูด 40° 42′ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 28° 26′ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น −8° 16′
   4.2) ละติจูด 42° 45′ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 38° 36′ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น +18° 27′

5. จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏขณะดวงอาทิตย์ขึ้น และดวงอาทิตย์ตก ในวันที่ดวงอาทิตย์มีความบ่ายเบนเป็น +20° 32′ ที่
   5.1) Acapulco (มีละติจูดเป็น 16° 49′ เหนือ)
   5.2) Fairbanks (มีละติจูดเป็น 64° 51′ เหนือ)
   5.3) Harrisburg (มีละติจูดเป็น 40° 16′ เหนือ)

7.6 ตำแหน่งเฉพาะของดวงดาว

เนื่องจากโลกหมุนรอบตัวเอง ทำให้ท้องฟ้าปรากฏหมุนไปด้วย และในขณะที่ท้องฟ้าปรากฏหมุนไปนั้น ดวงดาวซึ่งดูเหมือนว่าติดอยู่ที่ผิวในของทรงกลมท้องฟ้า ก็จะปรากฏเคลื่อนที่ตามแนวเป็นวงกลม เรียกว่า **วงกลมไดเออร์นัล** (diurnal circle) ของดวงดาว วงกลมไดเออร์นัลของดาวฤกษ์ย่อมขนานกันหมด แต่จะมีขนาดแตกต่างกัน โดยดาวฤกษ์พวกที่เคลื่อนที่อยู่บนเส้นศูนย์สูตรพอดี จะมีวงกลมไดเออร์นัลใหญ่ที่สุด จึงเป็นดาวพวกที่เคลื่อนที่ช้าที่สุด ส่วนดาวพวกที่อยู่ห่างจากเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าออกไป จะมีวงกลมไดเออร์นัลเล็กลง ๆ จนเป็นจุด ณ. จุดขั้วท้องฟ้าทั้งสอง ดาวพวกนี้จึงเป็นดาวพวกที่เคลื่อนที่เร็วขึ้น ๆ ตามลำดับ

อนึ่ง ถ้าผู้สังเกตการณ์มีตำแหน่งอยู่ระหว่างเส้นศูนย์สูตรและขั้วโลกเหนือ สมมติอยู่ ณ. ละติจูด ϕ องศาเหนือ ขั้วท้องฟ้าจึงอยู่สูงจากระนาบเส้นขอบฟ้าเท่ากับมุมของละติจูด และระนาบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าก็จะเอียงทำมุมกับระนาบของวงกลมดิ่งเอกด้วยมุมที่เท่ากัน เราจึงรู้ตำแหน่งของดวงดาว ซึ่งอาจแบ่งได้เป็น 6 กลุ่ม ดังรูป 7.6.1



รูป 7.6.1

ดาวกลุ่มที่ 1 เป็นดาวกลุ่มที่ปรากฏอยู่เหนือเส้นขอบฟ้าเสมอ และไม่ตัดวงกลมดิ่งเอกเลย

ดาวกลุ่มที่ 2 เป็นดาวกลุ่มที่ปรากฏอยู่เหนือเส้นขอบฟ้า แต่ตัดผ่านวงกลมดิ่งเอก (เฉพาะในกรณีที่ผู้สังเกตการณ์อยู่เหนือละติจูด 45°)

หมายเหตุ ดาวกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 นี้ จะมองเห็นตลอดเวลา ถ้าหากมีความมืดปกคลุมท้องฟ้า เรียกกลุ่มดาวนี้ว่า ดาวรอบขั้วเหนือ (northern circumpolar stars)

ดาวกลุ่มที่ 3 เป็นดาวกลุ่มที่ปรากฏขึ้นเหนือเส้นขอบฟ้า และตกใต้เส้นขอบฟ้า โดยใช้เวลาที่ปรากฏอยู่ทางด้านเหนือเส้นขอบฟ้ามากกว่าทางด้านใต้เส้นขอบฟ้า

ดาวกลุ่มที่ 4 เป็นดาวกลุ่มที่ปรากฏอยู่บนเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า โดยใช้เวลาที่ปรากฏอยู่ทางด้านเหนือและด้านใต้เส้นขอบฟ้าเท่า ๆ กัน

ดาวกลุ่มที่ 5 เป็นดาวกลุ่มที่ปรากฏขึ้นเหนือเส้นขอบฟ้า เป็นเวลาน้อยกว่าทางด้านใต้เส้นขอบฟ้า

หมายเหตุ เรียกดาวในกลุ่มที่ 3, 4 และ 5 ว่า ดาวแถบเส้นศูนย์สูตร (equatorial stars)

ดาวกลุ่มที่ 6 เป็นดาวที่ไม่เคยปรากฏเหนือเส้นขอบฟ้าเลย (คืออยู่ใต้เส้นขอบฟ้าเสมอ)

หมายเหตุ ดาวกลุ่มที่ 6 นี้จะไม่ปรากฏให้ผู้สังเกตการณ์เห็นเลย เราเรียกดาวกลุ่มนี้ว่า ดาวรอบขั้วใต้ (southern circumpolar stars)

ถ้าผู้สังเกตการณ์อยู่บนเส้นศูนย์สูตร คือ อยู่ ณ. ตำแหน่งละติจูด 0 องศา ซึ่งตำแหน่งนี้ ระนาบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าตั้งฉากกับระนาบเส้นขอบฟ้าพอดี วงกลมไดเออร์นัลของดาวซึ่งขนานกับเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า จึงตั้งฉากกับเส้นขอบฟ้าด้วย และเส้นขอบฟ้าจะตัดวงกลมไดเออร์นัลของดาวแต่ละวงออกเป็นครึ่งวงกลมสองส่วนเท่า ๆ กัน ดังนั้นดาวทุกดวงจึงใช้เวลาเหนือเส้นขอบฟ้ากับใต้เส้นขอบฟ้าเท่ากัน กล่าวคือ อยู่เหนือเส้นขอบฟ้า 12 ชั่วโมง และอยู่ใต้เส้นขอบฟ้า 12 ชั่วโมงนั่นเอง

ถ้าผู้สังเกตการณ์อยู่ ณ. ขั้วโลกเหนือ คือ อยู่ ณ. ตำแหน่งละติจูด 90 องศาเหนือ ซึ่งตำแหน่งนี้ เส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าย่อมทับกับเส้นขอบฟ้าพอดี และตำแหน่งของจุดเหนือศีรษะจะตรงกับขั้วท้องฟ้าเหนือ วงกลมไดเออร์นัลของดาวซึ่งขนานกับเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าเสมอ จึงต้องขนานกับเส้นขอบฟ้าด้วย จึงได้ว่า ดาวทางซีกเหนือ ของทรงกลมฟ้าจะปรากฏเหนือเส้นขอบฟ้าตลอดเวลา โดยดาวเหล่านี้หมุนรอบจุดเหนือศีรษะเป็นวงกลม

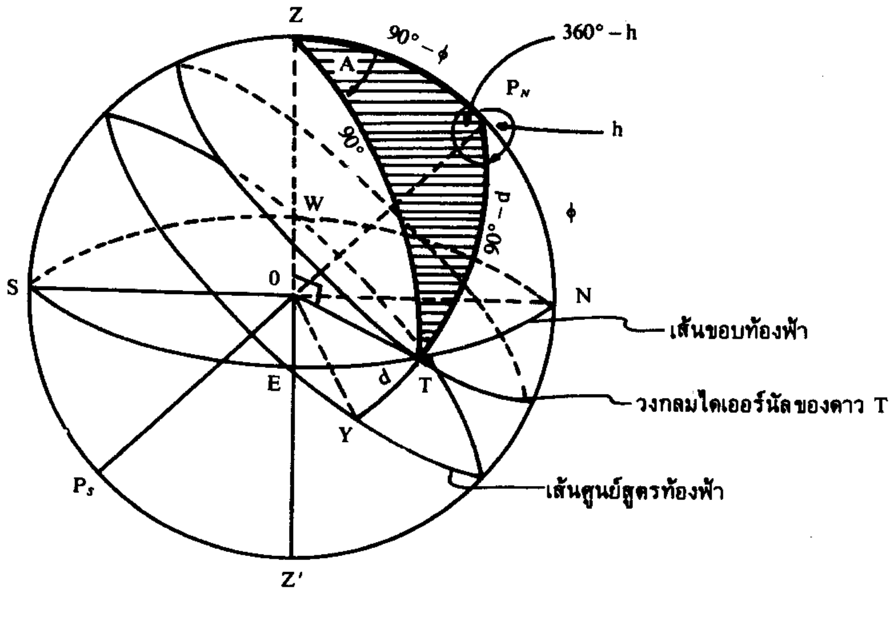
ข้อสังเกต

จะสังเกตเห็นว่า ผู้สังเกตการณ์ที่อยู่ ณ. ขั้วโลกเหนือ (ใต้) นี้จะไม่สามารถมองเห็นกลุ่มดาวที่อยู่ทางซีกใต้ (เหนือ) ของทรงกลมฟ้าเลย

ต่อไปเราจะพิจารณาตำแหน่งของวัตถุฟ้า (เช่น ดวงดาว) ขณะขึ้นและขณะตก โดยจะหาค่ามุมชั่วโมง (h) และแอซิมัท (A) ของวัตถุฟ้าในขณะขึ้นและขณะตก

สมมติให้ผู้สังเกตการณ์อยู่ ณ. ละติจูด ϕ องศาเหนือ เราต้องการหามุมชั่วโมง (h) และแอซิมัท (A) ของดาว T ขณะขึ้น คือ ขณะที่ดาว T กำลังอยู่บนเส้นขอบฟ้าทางตะวันออกพอดี เมื่อดาว T นั้น มีไรท์แอสเซนชัน = α ชั่วโมง และมีความบ่ายเบน = d องศาเหนือ

จากผู้สังเกตการณ์อยู่ ณ. ละติดจูด ϕ องศาเหนือ ขั้วเหนือของท้องฟ้าจึงมีระดับความสูง (ส่วนโค้ง NP_N) = ϕ องศา ดาว T มีความบ่ายเบน = d องศาเหนือ จึงปรากฏเคลื่อนที่อยู่เลยเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าขึ้นไปทางเหนือ ผลก็คือ ดาว T จะมีทั้งขึ้นและตก โดยขึ้นตัดเส้นขอบฟ้าในช่วงจากตะวันออกถึงเหนือ (ส่วนโค้ง EN) และตกในช่วงจากตะวันตกถึงเหนือ (ส่วนโค้ง WN) ดังรูป 7.6.2



รูป 7.6.2

จากรูป 7.6.2 ให้ดาว T อยู่ทางทิศตะวันออกของเมริเดียนท้องฟ้า สามารถคำนวณหามุมชั่วโมง (h) และแอซิมัท (A) ของดาว T ขณะขึ้นได้จากสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT โดยที่

ส่วนโค้ง $ZT = 90°$ (เพราะว่า ดาว T อยู่บนเส้นขอบฟ้าพอดี)

$YT = d$ **ดังนั้น** $TP_N = 90° - d$

$$ZP_N = NZ - NP_N = 90° - \phi$$

$$\angle ZP_N T = 360° - h \quad (= 24^h - h)$$

และ $\angle P_N ZT$ = **ส่วนโค้ง NT เมื่อคิดแอซิมัทจากเหนือวนไปทางตะวันออก**

จากสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ZP_NT **โดยกฎโคไซน์สำหรับด้าน จะได้ว่า**

$$\cos 90° = \cos(90° - d)\cos(90° - \phi) + \sin(90° - d)\sin(90° - \phi)\cdot\cos(360° - h)$$

$$0 = \sin d \sin\phi + \cos d \cos\phi \cos h$$

$$\therefore \quad \cos h = \frac{-\sin d \sin\phi}{\cos d \cos\phi}$$

ดังนั้น

$$\cos h = -\tan d \tan\phi \qquad \text{..........(1)}$$

และจากสูตรโคไซน์สำหรับด้านเช่นเดียวกัน จะได้ว่า

$$\cos(90° - d) = \cos(90° - \phi)\cos 90° + \sin(90° - \phi)\sin 90° \cos A$$

$$\sin d = \sin\phi\,(0) + \cos\phi\,(1)\cos A$$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{\sin d}{\cos\phi} \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) เมื่อเราทราบค่าละติจูด (ϕ) ของผู้สังเกตการณ์ และความบ่ายเบน (d) ของดาว T เราก็จะสามารถหามุมชั่วโมง (h) และแอซิมัท (A) ของดาว T ขณะขึ้นได้

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า ค่ามุมชั่วโมง (h) และแอซิมัท (A) ของดาว T ขณะตก ก็หาได้จากสมการ (1) และ (2) เช่นเดียวกัน

หมายเหตุ

1) เมื่อผู้สังเกตการณ์อยู่ ณ. ตำแหน่งละติจูด ϕ องศาเหนือ คือ อยู่เลยเส้นศูนย์สูตรขึ้นไปทางเหนือ

ถ้าดาว T มีความบ่ายเบน (d) เป็นบวก ($d > 0$) หรืออยู่เลยเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าไปทางขั้วท้องฟ้าเหนือ แล้วดาว T จะขึ้นในช่วงตะวันออกถึงเหนือ และตกในช่วงตะวันตกถึงเหนือ โดยในขณะที่ขึ้น จะมีมุมชั่วโมง (h) คือ $12^h < h < 18^h$ และแอซิมัท (A) จากเหนือ คือ $0° < A < 90°$ และในขณะที่ตกจะมีมุมชั่วโมง คือ $6^h < h < 12^h$ และแอซิมัทจากเหนือ $270° < A < 360°$

ถ้าดาว T มีความบ่ายเบน (d) เป็นลบ ($d < 0$) หรืออยู่เลยเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าไปทางขั้วท้องฟ้าใต้ แล้วดาว T จะขึ้นในช่วงตะวันออกถึงใต้ และตกในช่วงตะวันตกถึงใต้ โดยในขณะที่

ขึ้นมีมุมชั่วโมง (h) คือ $18^h < h < 24^h$ และแอซิมัท (A) จากเหนือ คือ $90° < A < 180°$ และในขณะที่ตกจะมีมุมชั่วโมง คือ $0^h < h < 6^h$ และแอซิมัท (A) จากเหนือ คือ $180° < A < 270°$

ถ้าดาว T มีความบ่ายเบน (d) เท่ากับ 0 (d = 0) หรือดาวอยู่บนเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าพอดี จะได้ว่าดาว T จะขึ้นที่ทิศตะวันออก (E) และตกที่ทิศตะวันตก (W) โดยในขณะที่ขึ้นจะมีมุมชั่วโมงเป็น 18^h และแอซิมัท A จากเหนือ คือ 90° และในขณะที่ตกจะมีมุมชั่วโมงเป็น 6^h และแอซิมัท A จากเหนือ คือ 270°

2) เมื่อผู้สังเกตการณ์อยู่ ณ. ตำแหน่งละติจูด ϕ องศาใต้ คือ อยู่เลยเส้นศูนย์สูตรลงมาทางใต้ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกันกับ 1)

3) ถ้าดาว T มีความบ่ายเบน (d) ตรงกับละติจูดร่วม $(90° - \phi)$ และมีเครื่องหมายเหมือนกันจะเป็นกลุ่มดาวที่ขึ้นโดยไม่ตก แต่ถ้ามีเครื่องหมายต่างกัน จะเป็นกลุ่มดาวที่ไม่เคยขึ้นอยู่เหนือขอบฟ้าเลย

ตัวอย่าง 7.6.1 ดาว T มีความบ่ายเบน (d) $+12° 54'$ $(12° 54'$ เหนือ) ขณะที่ดาวดวงนี้กำลังจะขึ้นและตกผ่านเส้นขอบฟ้า ณ. ละติจูด $(\phi) = 40° 42'$ เหนือ ดาวมีมุมชั่วโมง (h) และแอซิมัท (A) เป็นเท่าไร

วิธีทำ

จาก (1) ได้ว่า

$$\cos h = -\tan d \tan \phi$$

ในที่นี้ $d = 12° 54'$, $\phi = 40° 42'$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \cos h &= -\tan(12° 54') \cdot \tan(40° 42') \\
&= -(0.22903)(0.86014) \\
&= -0.19700 \\
h &= \cos^{-1}(-0.19700) \\
&= 180° + 78° 38' 18'', 180° - 78° 38' 18'' \\
&= 258° 38' 18'', 101° 21' 42'' \\
&= 17^h 14^m 33.2^s, 6^h 45^m 26.8^s
\end{aligned}$$

และจาก (2) ได้ว่า

$$\cos A = \frac{\sin d}{\cos \phi}$$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{\sin 12° 54'}{\cos 40° 42'}$$

$$= \frac{0.22325}{0.75813}$$

$$= 0.29447$$

$$\therefore \quad A = \cos^{-1}(0.29447)$$

$$= 72^\circ\ 52'\ 28'',\ 360^\circ - 72^\circ\ 52'\ 28''$$

$$= 72^\circ\ 52'\ 28'',\ 287^\circ\ 7'\ 32''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

ดาว T ขณะกำลังจะขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมงเป็น $17^h\ 14^m\ 33.2^s$ และมีแอซิมัทเท่ากับ $72^\circ\ 52'\ 28''$ และขณะกำลังจะตกผ่านเส้นขอบฟ้าก็มีมุมชั่วโมงเป็น $6^h\ 45^m\ 26.8^s$ และมีแอซิมัทเท่ากับ $287^\circ\ 7'\ 32''$

ตัวอย่าง 7.6.2 ถ้าดวงอาทิตย์ที่วอชิงตัน ดี.ซี. ซึ่งอยู่ที่ละติจูด $38^\circ\ 55'$ เหนือ มีความบ่ายเบนเป็น $-19^\circ\ 15'$ ($19^\circ\ 15'$ ใต้) แล้วขณะดวงอาทิตย์ขึ้น และดวงอาทิตย์ตก มีมุมชั่วโมงและแอซิมัทเป็นเท่าไร

วิธีทำ

จาก $\quad \cos h = -\tan d \tan \phi$

ในที่นี้ $\quad d = -19^\circ\ 15',\ \phi = 38^\circ\ 55'$

$$\therefore \quad \cos h = -\tan(-19^\circ\ 15')\tan 38^\circ\ 55'$$

$$= -(-0.34922)(0.80738)$$

$$= 0.28195$$

$$\therefore \quad h = \cos^{-1}(0.28195)$$

$$= 73^\circ\ 37'\ 24'',\ 360^\circ - 73^\circ\ 37'\ 24''$$

$$= 73^\circ\ 37'\ 24'',\ 286^\circ\ 22'\ 36''$$

$$= 4^h\ 54^m\ 29.6^s,\ 19^h\ 5^m\ 30.4^s$$

และจาก $\quad \cos A = \frac{\sin d}{\cos \phi}$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{\sin(-19^\circ\ 15')}{\cos 38^\circ\ 55'}$$

$$= \frac{-0.32969}{0.77806}$$

$$= -0.42373$$

$$
\begin{aligned}
A &= \cos^{-1}(-0.42373) \\
&= 180° - 64° 55' 47'', 180° + 64° 55' 47'' \\
&= 115° 4' 13'', 244° 55' 47''
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ขณะดวงอาทิตย์จะขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้า มีมุมชั่วโมงเป็น $19^h 5^m 30.4^s$ และมีแอซิมัท $115° 4' 13''$ และขณะดวงอาทิตย์จะตกผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมงเป็น $4^h 54^m 29.6^s$ และมีแอซิมัท $244° 55' 47''$

แบบฝึกหัด 7.6

ให้วัตถุฟ้า T มีความบ่ายเบนเป็น d จงหามุมชั่วโมง (h) และแอซิมัท (A) ของดาว T ขณะที่กำลังจะขึ้นและตกผ่านเส้นขอบฟ้า ณ. ละติจูด ϕ โดย d และ ϕ มีค่าดังนี้

1. $d = +15° 38'$, $\phi = 62° 37'$ เหนือ
2. $d = +20°$, $\phi = 39°$ เหนือ
3. $d = +13° 16'$, $\phi = 45° 24'$ เหนือ
4. $d = -18° 16'$, $\phi = 25° 14'$ เหนือ
5. $d = -8° 16'$, $\phi = 40° 42'$ เหนือ
6. $d = +20° 32'$, $\phi = 16° 49'$ เหนือ
7. $d = -12° 28'$, $\phi = 37° 22'$ เหนือ
8. $d = -10° 48'$, $\phi = 26° 18'$ เหนือ
9. $d = +14° 30'$, $\phi = 69° 18'$ เหนือ