บทที่ 5
การแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงโดยวิธีอื่น ๆ

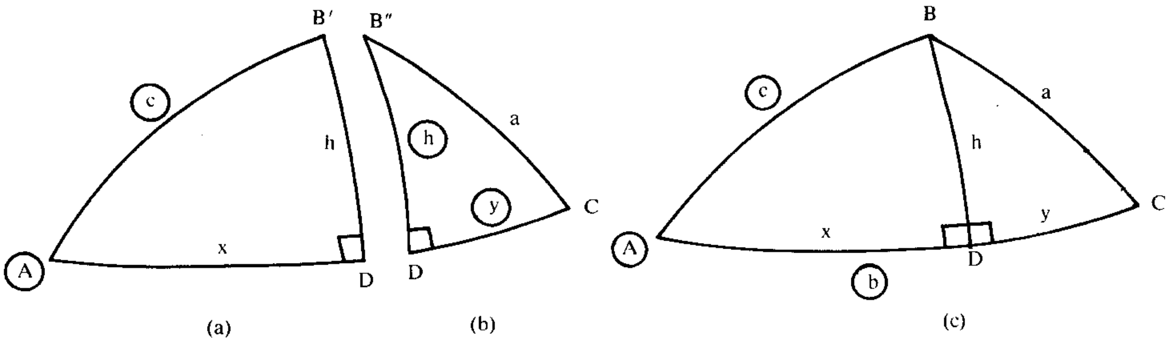
5.0 บทนำ

วิธีการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงที่ได้กล่าวมาในบทที่ 4 นั้น ถือว่าเป็นวิธีการแก้ปัญหาแบบมาตรฐาน (standard solutions) ซึ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงทั้งหลายนั้น นอกจากจะแก้ปัญหาด้วยวิธีมาตรฐานดังกล่าวแล้ว ยังสามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีอื่น ๆ ได้อีก ในที่นี้จะกล่าวถึงอีก 2 วิธีคือ วิธีการแก้ปัญหาด้วยฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ (haversine function) และวิธีแยกสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงออกเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป ซึ่งจะเรียกสั้น ๆ ว่า วิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก (right triangle method)

การแก้ปัญหาโดยวิธีใช้ฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์นั้น มีข้อเสียอยู่ที่จะต้องมีฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์เพิ่มขึ้นจากฟังก์ชันตรีโกณมิติ และต้องมีตารางของฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ด้วย แต่ก็มีข้อดีอยู่ที่ว่าทุก ๆ ค่าของมุม θ ระหว่าง $0°$ ถึง $180°$ จะให้ค่า ฮาเวอร์ไซน์ θ ที่ไม่เท่ากัน และในทางกลับกันเมื่อรู้ค่าของฮาเวอร์ไซน์ θ แล้ว ก็จะหาค่า θ ได้เพียงค่าเดียว

นั่นคือ สำหรับค่ามุมและด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (ซึ่งต้องน้อยกว่า $180°$) ย่อมทำให้มีมุมเพียงมุมเดียวสำหรับฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ ดังนั้นความผิดพลาดเกี่ยวกับการพิจารณาว่าด้านและมุมอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่งหรือที่สอง จึงไม่เกิดขึ้น

การแก้ปัญหาด้วยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก มีข้อดีอยู่ที่ว่า การแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากนั้นอาจจะทำเป็นตารางเพื่อนำมาสำหรับใช้แก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงได้ ตัวอย่างเช่น ถ้าแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก จากส่วนที่กำหนดให้ ซึ่งล้อมรอบด้วยวงกลม ดังรูป 5.0.1 (a) และรูป 5.0.1 (b) แล้ว การแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงในรูป 5.0.1 (c) อาจทำได้ดังนี้



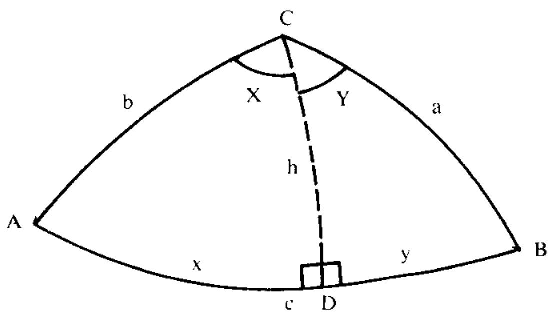
รูป 5.0.1

1. ในรูป 5.0.1 (a) เมื่อกำหนด A และ c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ADB′ มาให้ ย่อมสามารถหาค่าของ x, h และ B′ ได้

2. ในรูป 5.0.1 (b) เราทราบค่า h และ y (โดย $y = b - x$) ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก DCB″ จึงสามารถหาค่าของ a, C และ B″ ได้

3. ดังนั้นส่วนที่ต้องการหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ในรูป 5.0.1 (c) ก็คือ a, C และ $B = B' + B''$

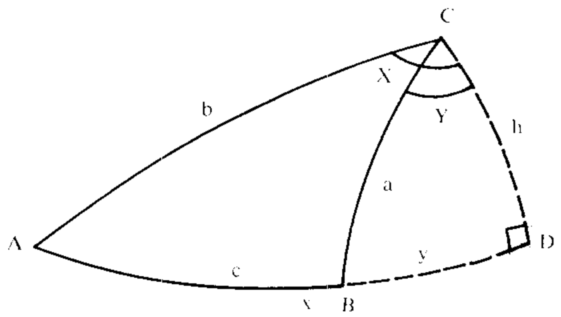
หลักการทั่ว ๆ ไป ในการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง โดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉากนี้ ก็คือ โดยใช้กฎของเนเปียร์กับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป ที่เกิดจากการลากเส้นวงกลมใหญ่ จากจุดยอดจุดหนึ่งของสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ ไปตั้งฉากกับด้านที่อยู่ตรงข้ามกับจุดยอด เส้นตั้งฉากนี้จะไปตัดเส้นวงกลมใหญ่ ที่จุด 2 จุด (โดยด้านของสามเหลี่ยมเป็นส่วนโค้งส่วนหนึ่งของวงกลมใหญ่นี้) เนื่องจากด้านแต่ละด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง น้อยกว่า 180° ดังนั้น จุดหนึ่งในสองจุดนี้จะอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม ดังรูป 5.0.2 หรือมิฉะนั้นจุดทั้งสองนี้ก็อยู่ภายนอกรูปสามเหลี่ยม ดังรูป 5.0.3



รูป 5.0.2

ในกรณีที่หนึ่ง กรณีที่จุดอยู่ภายในสามเหลี่ยม ให้จุดนั้นคือ จุด D แล้วสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป นั้นคือ ACD กับ BCD ดังรูป 5.0.2

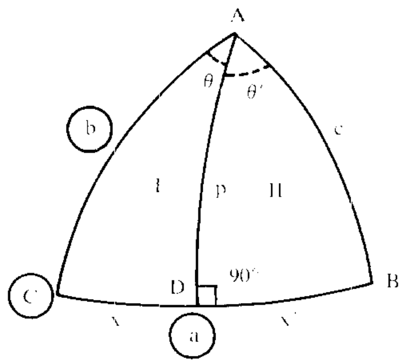
ในกรณีที่สอง กรณีที่จุดทั้งสองอยู่ภายนอกรูปสามเหลี่ยม ให้จุดหนึ่งจุดใดในสองจุดนี้เป็นจุด D ซึ่งเป็นจุดที่เกิดจากการตัดกันเป็นจุดแรกระหว่างเส้นวงกลมใหญ่ที่ลากจากจุดยอด C กับส่วนที่ต่อจาก A ผ่าน B ออกไป แล้วสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป ก็คือ ACD กับ BCD ดังรูป 5.0.3



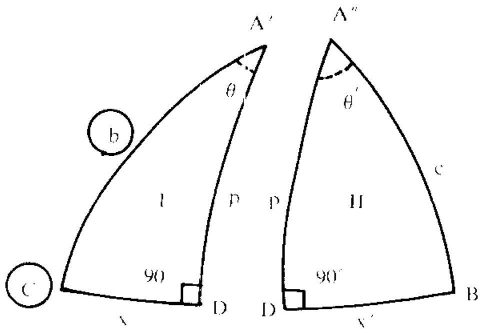
รูป 5.0.3

5.1 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้าน และมุมระหว่างด้านทั้งสอง

พิจารณาการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่กำหนด a, b และ C มาให้โดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก



รูป 5.1.1



รูป 5.1.2

(หมายเหตุ : ใช้ $\bar{C}$ แทน $90° - C$, $\bar{b}$ แทน $90° - b$, $\bar{\theta}$ แทน $90° - \theta$, $\bar{B}$ แทน $90° - B$, $\bar{c}$ แทน $90° - c$ และ $\bar{\theta}'$ แทน $90° - \theta'$)

ในรูป 5.1.1 แสดงสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งจากจุดยอด A ลากส่วนโค้ง AD มาตั้งฉากกับด้าน BC และเขียนวงกลมล้อมรอบ a, b และ C ซึ่งเป็นส่วนที่กำหนดมาให้

รูป 5.1.2 แสดงสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป ซึ่งได้จากการแบ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ด้วยส่วนโค้ง AD ของรูป 5.1.1 และเขียนส่วนต่าง ๆ เพื่อนำมาใช้กับกฎของเนเปียร์

โดยกระบวนการตามปกติของการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก จากสามเหลี่ยม I ได้

$\tan x = \tan b \cos C$ ....(1)

$\cot \theta = \cos b \tan C$ ....(2)

$\sin p = \sin b \sin C$ ....(3)

$\sin p = \cot \theta \tan x$ (สูตรตรวจสอบ) ....(4)

หลังจากได้ค่าของ x, θ และ p แล้วจะทำให้เราทราบส่วน p และ $x' = a - x$ ในสามเหลี่ยม II จากนั้นก็ใช้กฎของเนเปียร์สร้างสูตรสำหรับแก้ปัญหาสามเหลี่ยม II ซึ่งได้ดังนี้

$x' = a - x$ ....(5)

$\cot B = \cot p \sin x'$ ....(6)

$\cot \theta' = \sin p \cot x'$ ....(7)

$\cos c = \cos p \cos x'$ ....(8)

$\cos c = \cot \theta' \cot B$ (สูตรตรวจสอบ) ....(9)

$A = \theta + \theta'$ ....(10)

ถ้าส่วนต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดมาให้ไม่ใช่ a, b และ C การคิดคำนวณก็อาจทำได้โดยการสร้างสูตรในการแก้ปัญหาใหม่โดยวิธีการทำนองเดียวกับที่แสดงมาแล้วข้างต้น หรืออาจทำได้ง่าย ๆ โดยการสับเปลี่ยนอักษรของส่วนที่กำหนดให้ลงในสูตร (1) ถึง (10) ก็ได้ ตัวอย่างเช่น ถ้าส่วนที่กำหนดมาให้เป็น a, c และ B ก็อาจสร้างสูตรใหม่ได้โดยการแทน b ด้วย c, แทน

c ด้วย b, แทน B ด้วย C และแทน C ด้วย B ลงในสูตร (1) ถึง (10) ดังนั้น จากสูตร (1), (2) และ (3) เราจะได้

$$\tan x = \tan c \cos B$$

$$\cot \theta = \cos c \tan B$$

$$\sin p = \sin c \sin B$$

อนึ่ง โดยปกติในการแก้ปัญหาเรามักจะต้องเขียนรูปประกอบการพิจารณา อย่างไรก็ตาม ข้อกำหนดต่อไปนี้ จะช่วยให้เราพิจารณาค่าต่าง ๆ ที่ได้จากสูตรโดยไม่ต้องดูรูปประกอบ ข้อกำหนดดังกล่าวมีดังนี้

1. ส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC แต่ละส่วนคือ a, b, c, A, B และ C ต่างมีค่าเป็นบวกและน้อยกว่า 180°

2. เมื่อ $\tan x > 0$ ได้ค่า x ซึ่ง $0° < x < 90°$
   เมื่อ $\tan x < 0$ ได้ค่า x ซึ่ง $90° < x < 180°$

3. ส่วนต่าง ๆ ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ต้องคล้องตามกฎจตุตถภาคของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก (ในหัวข้อ 3.4 ของบทที่ 3)

4. ค่า x กับ θ และค่า x' กับ θ' แต่ละคู่จะต้องอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน และมีเครื่องหมายเหมือนกัน

5. มุม B ที่หาได้จากสูตร (6) จะอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง ถ้า $\cot B > 0$ และจะอยู่ในจตุตถภาคที่สอง ถ้า $\cot B < 0$ (โดย มุม B ไม่จำเป็นจะต้องอยู่ในจตุตถภาคเดียวกันกับ p)

ตัวอย่าง 5.1.1 จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC เมื่อกำหนดให้ $a = 78° 43'$, $b = 118° 12'$ และ $C = 59° 27'$

วิธีทำ ในที่นี้จะต้องหาค่า A, B และ c

จาก (1) ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\tan x &= \tan b \cos C \\
&= (\tan 118° 12')(\cos 59° 27') \\
&= (-\tan 61° 48')(\cos 59° 27') \\
&= (-1.8650)(0.50829) \\
&= (-0.94796)
\end{aligned}$$

$$x = \tan^{-1}(-0.94796)$$
$$= 180^\circ - (43^\circ\ 28'\ 11'')$$
$$= 136^\circ\ 31'\ 49''$$

จาก (2) ได้

$$\cot\theta = \cos b \tan C$$
$$= (\cos 118^\circ\ 12')(\tan 59^\circ\ 27')$$
$$= (-\cos 61^\circ\ 48')(\tan 59^\circ\ 27')$$
$$= (-0.47255)(1.6943)$$
$$= (-0.80064)$$
$$\theta = \cot^{-1}(-0.80064)$$
$$= 180^\circ - (51^\circ\ 19'\ 5'')$$
$$= 128^\circ\ 40'\ 55''$$

จาก (3) ได้

$$\sin p = \sin b \sin C$$
$$= (\sin 118^\circ\ 12')(\sin 59^\circ\ 27')$$
$$= (\sin 61^\circ\ 48')(\sin 59^\circ\ 27')$$
$$= (0.88130)(0.86119)$$
$$= (0.75897)$$
$$p = \sin^{-1}(0.75897)$$
$$= 49^\circ\ 22'\ 25''$$ ($\because$ p ต้องอยู่ในจตุตถภาคเดียวกันกับ C)

ตรวจสอบ

จาก (4) จะได้ว่า

$$\sin p = \cot\theta \tan x$$

ในที่นี้ $\sin p = \sin 49^\circ\ 22'\ 25''$

$$= 0.75897$$

และ $\cot\theta \,.\, \tan x = (\cot 128^\circ\ 40'\ 55'')(\tan 136^\circ\ 31'\ 49'')$

$$= (-0.80064)(-0.94796)$$
$$= 0.75897$$

จาก (5) ได้

$$
\begin{aligned}
x' &= a - x \\
&= 78^\circ\ 43' - (136^\circ\ 31'\ 49'') \\
&= -(57^\circ\ 48'\ 49'')
\end{aligned}
$$

จาก (6) ได้

$$
\begin{aligned}
\cot B &= \cot p \sin x' \\
&= (\cot 49^\circ\ 22'\ 25'')(\sin -(57^\circ\ 48'\ 49'')) \\
&= (\cot 49^\circ\ 22'\ 25'')(-\sin 57^\circ\ 48'\ 49'') \\
&= (0.85790)(-0.84632) \\
&= (-0.72605) \\
B &= \cot^{-1}(-0.72605) \\
&= 180^\circ - (54^\circ\ 1'\ 7'') \\
&= 125^\circ\ 58'\ 53''
\end{aligned}
$$

จาก (7) ได้

$$
\begin{aligned}
\cot \theta' &= \sin p \cot x' \\
&= (\sin 49^\circ\ 22'\ 25'')(\cot -(57^\circ\ 48'\ 49'')) \\
&= (\sin 49^\circ\ 22'\ 25'')(-\cot 57^\circ\ 48'\ 49'') \\
&= (0.75897)(-0.62940) \\
&= (-0.47770) \\
\theta' &= \cot^{-1}(-0.47770) \\
&= -(64^\circ\ 27'\ 58'')
\end{aligned}
$$

(เพราะว่า x' กับ θ' ต้องอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน และมีเครื่องหมายเหมือนกัน)

จาก (8) ได้

$$
\begin{aligned}
\cos c &= \cos p \cos x' \\
&= (\cos 49^\circ\ 22'\ 25'')(\cos -(57^\circ\ 48'\ 49'')) \\
&= (\cos 49^\circ\ 22'\ 25'')(\cos 57^\circ\ 48'\ 49'') \\
&= (0.65113)(0.53268) \\
&= 0.34684
\end{aligned}
$$

$$c = \cos^{-1}(0.34684)$$
$$= 69^\circ\ 42'\ 21''$$

ตรวจสอบ

จาก (9) จะได้ว่า

$$\cos c = \cot\theta' \cot B$$

ในที่นี้ $$\cos c = \cos 69^\circ\ 42'\ 21''$$
$$= 0.34684$$

และ $$\cot\theta' \cot B = (\cot(-(64^\circ\ 27'\ 58'')))(\cot 125^\circ\ 58'\ 53'')$$
$$= (-\cot 64^\circ\ 27'\ 58'')(-\cot 54^\circ\ 1'\ 7'')$$
$$= (-0.47770)(-0.72605)$$
$$= 0.34683$$

จาก (10) ได้ว่า

$$A = \theta + \theta'$$
$$= 128^\circ\ 40'\ 55'' - (64^\circ\ 27'\ 58'')$$
$$= 64^\circ\ 12'\ 57''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า $A = 64^\circ\ 12'\ 57''$, $B = 125^\circ\ 58'\ 53''$ และ $c = 69^\circ\ 42'\ 21''$

แบบฝึกหัด 5.1

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่กำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ต่อไปนี้ โดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. $a = 88° 24'$, $b = 56° 48'$, $C = 128° 16'$
2. $b = 120° 30'$, $c = 70° 20'$, $A = 50° 10'$
3. $a = 76° 24'$, $b = 58° 19'$, $C = 116° 30'$
4. $a = 88° 37' 40''$, $c = 125° 18' 20''$, $B = 102° 16' 36''$
5. $a = 86° 18' 40''$, $b = 45° 36' 20''$, $C = 120° 46' 30''$
6. $b = 132° 17' 30''$, $c = 78° 15' 15''$, $A = 40° 20' 10''$

5.2 การแก้ปัญหากรณีกำหนดมุมให้สองมุม และด้านระหว่างมุมทั้งสอง

การแก้ปัญหากรณีกำหนดมุมให้สองมุมและด้านระหว่างมุมทั้งสอง โดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก สามารถทำได้โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.7.2 โดยการหาด้านสองด้านและมุมระหว่างด้านทั้งสองของสามเหลี่ยมเชิงขั้วที่สมนัยกัน แล้วทำการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงขั้ว โดยใช้สูตร (1) ถึงสูตร (10) ในหัวข้อ 5.1 และใช้ทฤษฎีบท 3.7.2 กับผลลัพธ์ที่ได้จากสามเหลี่ยมเชิงขั้วอีกครั้งหนึ่ง ก็จะเป็นผลลัพธ์ที่ต้องการ ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ซึ่งกำหนด A, B และ c มาให้ ก็สามารถกระทำได้ตามกระบวนการของหัวข้อ 5.1 โดยใช้สามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ซึ่ง $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$ และ $C' = 180° - c$ คือ แก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ในกรณีที่กำหนด a', b' และ C' มาให้โดยใช้สูตร (1) ถึงสูตร (10) ตามหัวข้อ 5.1 เมื่อหาผลลัพธ์คือ A', B' และ c' ได้แล้ว โดยใช้ทฤษฎีบท 3.7.2 จะได้ว่า $a = 180° - A'$, $b = 180° - B'$ และ $C = 180° - c'$ นั่นคือ จะได้ผลลัพธ์คือ a, b และ C ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ตามต้องการ

ตัวอย่าง 5.2.1 จงแก้ปัญหาเชิงทรงกลมเฉียง ABC เมื่อกำหนดให้ $A = 101° 17'$, $B = 61° 48'$ และ $c = 120° 33'$

วิธีทำ

ในที่นี้ จะต้องหา a, b และ C

ให้ $A'B'C'$ เป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC แล้ว โดยทฤษฎีบท 3.7.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a' &= 180° - A \\ &= 180° - (101° 17') \\ &= 78° 43' \\ b' &= 180° - B \\ &= 180° - (61° 48') \\ &= 118° 12' \\ \text{และ} \qquad C' &= 180° - c \\ &= 180° - (120° 33') \\ &= 59° 27' \end{aligned}$$

ดังนั้น เราจึงทราบค่า a', b' และ C' ของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ซึ่งเข้ากับการแก้ปัญหาสามเหลี่ยม ในกรณี 5.1

ในทำนองเดียวกับในหัวข้อ 5.1 จะได้สูตรสำหรับแก้ปัญหาทั้ง 10 สูตรดังนี้

$\tan x = \tan b' \cos C'$ ....(1)

$\cot \theta = \cos b' \tan C'$ ....(2)

$\sin p = \sin b' \tan C'$ ....(3)

$\sin p = \cot \theta \tan x$ (สูตรตรวจสอบ) ....(4)

$x' = a' - x$ ....(5)

$\cot B' = \cot p \sin x'$ ....(6)

$\cot \theta' = \sin p \cot x'$ ....(7)

$\cos c' = \cos p \cos x'$ ....(8)

$\cos c' = \cot \theta' \cot B'$ (สูตรตรวจสอบ) ....(9)

$A' = \theta + \theta'$ ....(10)

จาก (1) ได้ว่า

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan b' \cos C' \\ &= (\tan 118° \ 12')(\cos 59° \ 27') \\ &= (-1.8650)(0.50829) \\ &= -0.94796 \\ x &= \tan^{-1}(-0.94796) \\ &= 180° - (43° \ 28' \ 11'') \\ &= 136° \ 31' \ 49'' \end{aligned}$$

จาก (2) ได้ว่า

$$\begin{aligned} \cot \theta &= \cos b' \tan C' \\ &= (\cos 118° \ 12')(\tan 59° \ 27') \\ &= (-0.47255)(1.6943) \\ &= (-0.80064) \\ \theta &= \cot^{-1}(-0.80064) \\ &= 180° - (51° \ 19' \ 5'') \\ &= 128° \ 40' \ 55'' \end{aligned}$$

จาก (3) ได้

$$
\begin{aligned}
\sin p &= \sin b' \sin C' \\
&= (\sin 118^\circ\ 12')(\sin 59^\circ\ 27') \\
&= (0.88130)(0.86119) \\
&= 0.75897 \\
p &= \sin^{-1}(0.75897) \\
&= 49^\circ\ 22'\ 25''
\end{aligned}
$$

ตรวจสอบ

จาก (4) ได้ว่า

$$\sin p = \cot\theta \tan x$$

ในที่นี้ $\sin p = \sin 49^\circ\ 22'\ 25''$

$$= 0.75897$$

และ $\cot\theta \,.\, \tan x = (\cot 128^\circ\ 40'\ 55'')(\tan 136^\circ\ 31'\ 49'')$

$$
\begin{aligned}
&= (-0.80064)(-0.94796) \\
&= 0.75897
\end{aligned}
$$

จาก (5) ได้

$$
\begin{aligned}
x' &= a' - x \\
&= 78^\circ\ 43' - (136^\circ\ 31'\ 49'') \\
&= -(57^\circ\ 48'\ 49'')
\end{aligned}
$$

จาก (6) ได้

$$
\begin{aligned}
\cot B' &= \cot p \sin x' \\
&= (\cot 49^\circ\ 22'\ 25'')(\sin -(57^\circ\ 48'\ 49'')) \\
&= (0.85790)(-0.84632) \\
&= (-0.72605) \\
B &= \cot^{-1}(-0.72605) \\
&= 180^\circ - (54^\circ\ 1'\ 7'') \\
&= 125^\circ\ 58'\ 53''
\end{aligned}
$$

จาก (7) ได้

$$\begin{aligned}
\cot\theta' &= \sin p \cot x' \\
&= (\sin 49^\circ\ 22'\ 25'')(\cot -(57^\circ\ 48'\ 49'')) \\
&= (0.75897)(-0.62940) \\
&= -0.47770 \\
\theta' &= \cot^{-1}(-0.47770) \\
&= -(64^\circ\ 27'\ 58'')
\end{aligned}$$

(เพราะว่า x' กับ θ' ต้องอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน และมีเครื่องหมายเหมือนกัน)

จาก (8) ได้

$$\begin{aligned}
\cos c' &= \cos p \cos x' \\
&= (\cos 49^\circ\ 22'\ 25'')(\cos -(57^\circ\ 48'\ 49'')) \\
&= (0.65113)(0.53268) \\
&= 0.34684 \\
c' &= \cos^{-1}(0.34684) \\
&= 69^\circ\ 42'\ 21''
\end{aligned}$$

ตรวจสอบ

จาก (9) จะได้ว่า

$$\cos c' = \cot\theta' \cot B'$$

ในที่นี้ $\cos c' = \cos 69^\circ\ 42'\ 21''$

$$= 0.3464$$

และ $\cot\theta' \cot B' = (\cot(-(64^\circ\ 27'\ 58'')))(\cot 125^\circ\ 58'\ 53'')$

$$\begin{aligned}
&= (-0.47770)(-0.72605) \\
&= 0.34683
\end{aligned}$$

จาก (10) ได้ว่า

$$\begin{aligned}
A' &= \theta + \theta' \\
&= 128^\circ\ 40'\ 55'' - (64^\circ\ 27'\ 58'') \\
&= 64^\circ\ 12'\ 57''
\end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ มี

$A' = 64^\circ\ 12'\ 57''$, $B' = 125^\circ\ 58'\ 53''$ และ $c' = 69^\circ\ 42'\ 21''$

โดยทฤษฎีบท 3.7.2 ได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC

มี

$$
\begin{aligned}
a &= 180° - A' \\
&= 180° - (64° \; 12' \; 57'') \\
&= 115° \; 47' \; 3'' \\
b &= 180° - B' \\
&= 180° - (125° \; 58' \; 53'') \\
&= 54° \; 1' \; 7'' \\
C &= 180° - c' \\
&= 180° - (69° \; 42' \; 21'') \\
&= 110° \; 17' \; 39''
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จึงได้ว่าสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มี $a = 115° \; 47' \; 3''$, $b = 54° \; 1' \; 7''$ และ $C = 110° \; 17' \; 39''$

แบบฝึกหัด 5.2

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่กำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ต่อไปนี้

1. $A' = 120^\circ\ 10'$, $B = 100^\circ\ 20'$, $c = 30^\circ\ 5'$
2. $A = 27^\circ\ 22'\ 34''$, $C = 91^\circ\ 26'\ 44''$, $b = 120^\circ\ 18'\ 33''$
3. $A = 31^\circ\ 34'\ 26''$, $B = 30^\circ\ 28'\ 12''$, $c = 70^\circ\ 2'\ 3''$
4. $A = 47^\circ\ 13'\ 18''$, $B = 120^\circ\ 9'\ 54''$, $c = 123^\circ\ 31'\ 36''$

5.3 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านและมุมระหว่างด้านทั้งสองด้วยฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์

ฮาเวอร์ไซน์ (haversine) ของมุม θ ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ hav θ นั้น มีนิยามว่า :

$$\text{hav } \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$$

ฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ มีคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้

1) $\text{hav } 0° = 0$

2) $\text{hav } 180° = 1$

3) $\text{hav } (-\theta) = \text{hav } \theta$

4) $\cos \theta = 1 - 2 \text{ hav } \theta$

พิสูจน์

1)
$$\begin{aligned} \text{hav } 0° &= \frac{1}{2}(1 - \cos 0°) \\ &= \frac{1}{2}(1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\text{hav } 0° = 0$

2)
$$\begin{aligned} \text{hav } 180° &= \frac{1}{2}(1 - \cos 180°) \\ &= \frac{1}{2}(1 - (-1) \\ &= \frac{1}{2}(2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\text{hav } 180° = 1$

3)
$$\begin{aligned} \text{hav } (-\theta) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(-\theta)) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \\ &= \text{hav } \theta \end{aligned}$$

ดังนั้น $\text{hav } (-\theta) = \text{hav } \theta$

4) จาก $\quad \text{hav}\,\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$

$\therefore \quad 2\,\text{hav}\,\theta = 1 - \cos\theta$

ดังนั้น $\quad \cos\theta = 1 - 2\,\text{hav}\,\theta$

ฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์มีประโยชน์ในการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ในกรณีที่กำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้านทั้งสอง และในกรณีที่กำหนดด้านให้สามด้านโดยตรง รวมทั้งการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ที่กำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุมทั้งสอง และกรณีกำหนดมุมให้สามมุมด้วย ในการแก้ปัญหากรณีต่าง ๆ ดังกล่าวจะต้องอาศัยสูตรของฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ดังต่อไปนี้

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

1) $\text{hav}\,A = \dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}$

2) $\text{hav}\,B = \dfrac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c \sin a}$

3) $\text{hav}\,C = \dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}$

เมื่อ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

และ

4) $\text{hav}\,a = \text{hav}\,(b-c) + \sin b \sin c\,\text{hav}\,A$

5) $\text{hav}\,b = \text{hav}\,(c-a) + \sin c \sin a\,\text{hav}\,B$

6) $\text{hav}\,c = \text{hav}\,(a-b) + \sin a \sin b\,\text{hav}\,C$

พิสูจน์

1. การพิสูจน์ สูตรที่ 1)

จากขั้นตอนในการพิสูจน์ สูตรที่ 1) ของการอุปมานของเกาส์ ในหัวข้อ 4.6.1) ได้ว่า

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$ แล้ว

$$\text{hav}\,A = \frac{1}{2}(1 - \cos A)$$

$$= \sin^2\frac{1}{2}A$$

$$= \frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}$$

ดังนั้น $$\text{hav } A = \frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}$$

ส่วนสูตรที่ 2) และสูตรที่ 3) ก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับสูตรที่ 1)

2. การพิสูจน์สูตรที่ 4)

จากกฎของโคไซน์สำหรับด้านในหัวข้อ 4.3.1 ได้ว่า

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\text{hav } a &= \frac{1}{2}(1 - \cos a) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cos b \cos c - \sin b \sin c (1 - 2 \text{ hav } A)) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cos b \cos c - \sin b \sin c + 2 \sin b \sin c \text{ hav } A) \\
&= \frac{1}{2}(1 - (\cos b \cos c + \sin b \sin c) + 2 \sin b \sin c \text{ hav } A) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cos (b-c) + 2 \sin b \sin c \text{ hav } A) \\
&= \frac{1}{2}(2 \text{ hav } (b-c) + 2 \sin b \sin c \text{ hav } A) \\
&= \text{hav } (b-c) + \sin b \sin c \text{ hav } A
\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\text{hav } a = \text{hav } (b-c) + \sin b \sin c \text{ hav } A$$

ส่วนสูตรที่ 5) และสูตรที่ 6) ก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับสูตรที่ 4)

ตัวอย่างที่ 5.3.1

จงใช้ $\text{hav } A = \sin (s-b) \sin (s-c) \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c$ หาค่า A เมื่อ $a = 55° 28'$, $b = 77° 6'$ และ $c = 49° 18'$

วิธีทำ

โดยการใช้ตารางค่าลอการิธึมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และตารางค่าลอการิธึมของฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

จาก $a = 55° 28'$, $b = 77° 6'$ และ $c = 49° 18'$

ดังนั้น $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = 90° \; 56'$

และ

$s-b$	=	$13° \; 50'$	$\ell \sin s-b$	=	9.37858
$s-c$	=	$41° \; 38'$	$\ell \sin s-c$	=	9.82240
b	=	$77° \; 6'$	ℓ cosec b	=	0.01110
c	=	$49° \; 18'$	ℓ cosec c	=	0.12025
$\therefore$ A	=	$55° \; 14' \; 30''$	ℓ hav A	=	9.33233

ดังนั้น จึงได้ว่า $A = 55° \; 14' \; 30''$

ตัวอย่าง 5.3.2

จงใช้ $\text{hav}\, a = \text{hav}\,(b-c) + \sin b \sin c \,\text{hav}\, A$ หาค่า a เมื่อ $b = 132° \; 46' \; 42''$, $c = 59° \; 50' \; 6''$ และ $A = 56° \; 28' \; 24''$

วิธีทำ

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจึงให้ $x = \sin b \sin c \,\text{hav}\, A$ แล้วจะได้ว่า $\text{hav}\, a = \text{hav}\,(b-c) + x$

ค่า $x = \sin b \sin c \,\text{hav}\, A$ หาได้ดังนี้

b	=	$132° \; 46' \; 42''$	$\ell \sin b$	=	9.86569
c	=	$59° \; 50' \; 6''$	$\ell \sin c$	=	9.93681
A	=	$56° \; 28' \; 24''$	ℓ hav A	=	9.34993
			log x	=	9.15243

$\therefore \; x = 0.14205$

ดังนั้น $\text{hav}\, a = \text{hav}\,(b-c) + x$ จึงหาได้ดังนี้

$b-c$	=	$72° \; 56' \; 36''$	ℓ hav (b − c)	=	0.35334
			x	=	0.14205
		$\therefore$	hav a	=	0.49539

$\therefore \; a = 89° \; 28' \; 18''$

ดังนั้น จึงได้ว่า $a = 89° \; 28' \; 18''$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงใช้ฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ หาด้าน b ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่มี $a = 106° 25' 18''$, $c = 42° 16' 42''$ และ $B = 114° 53' 12''$

2. จงใช้ฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ หาด้าน c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่มี $a = 67° 28' 24''$, $b = 34° 15' 12''$ และ $C = 24° 12' 36''$

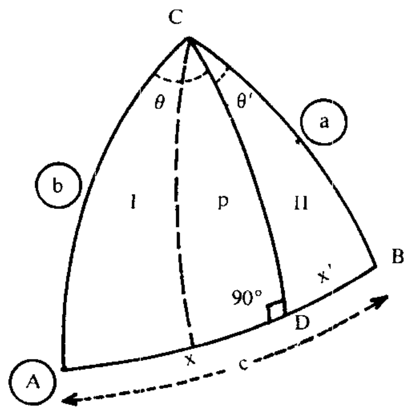
3. จงใช้ฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ หาด้าน a ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่มี $b = 156° 12' 12''$, $c = 112° 48' 36''$ และ $A = 76° 32' 24''$

4. จงใช้ฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์แก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่มี $a = 121° 15' 24''$, $b = 104° 54' 42''$ และ $c = 65° 42' 30''$

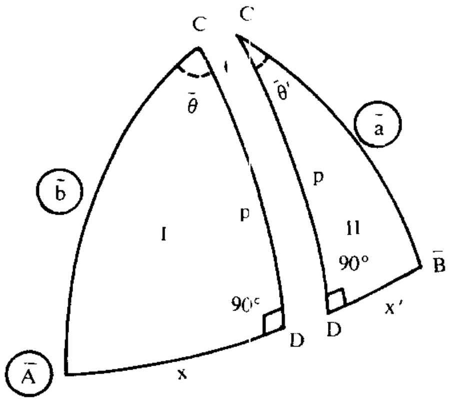
5. จงใช้ฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ประกอบการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่มี $b = 59° 29' 30''$, $c = 109° 39' 40''$ และ $A = 50° 10' 10''$

5.4 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้าน และมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง

พิจารณาการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ที่กำหนด a, b และ A มาให้ โดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก



รูป 5.4.1



รูป 5.4.2

สำหรับการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ในกรณีที่กำหนดด้านให้สองด้าน และมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่งนี้ ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะมีชุดเดียวหรือสองชุดก็ได้

รูป 5.4.1 แสดงสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งจากจุดยอด C ลากส่วนโค้ง CD มาตั้งฉากกับด้าน AB และเขียนวงกลมล้อมรอบ a, b และ A ซึ่งเป็นส่วนที่กำหนดมาให้ ส่วนเส้นประนั้นแสดงถึงตำแหน่งของส่วนโค้ง CD ที่อาจลากมาตั้งฉากกับด้าน AB ได้อีกตำแหน่งหนึ่ง

รูป 5.4.2 แสดงสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป ซึ่งได้จากการแบ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ด้านส่วนโค้ง CD และเขียนส่วนต่าง ๆ ที่จะนำมาใช้กับกฎของเนเปียร์

ใช้กฎของเนเปียร์กับสามเหลี่ยม I ในรูป 5.4.2 จะได้

$\tan x = \tan b \cos A$ ....(1)

$\cot \theta = \cos b \tan A$ ....(2)

$\sin p = \sin b \sin A$ ....(3)

$\sin p = \tan x \cot \theta$ (สูตรตรวจสอบ) ....(4)

เนื่องจากเราได้ค่า p จากสูตร (3) แล้ว ดังนั้นในสามเหลี่ยม II เราจึงทราบค่า p และ a จึงใช้กฎของเนเปียร์กับสามเหลี่ยม II จะได้

$$\cos x' = \frac{\cos a}{\cos p} \qquad \text{..........(5)}$$

$$\sin B = \frac{\sin p}{\sin a} \qquad \text{..........(6)}$$

$$\cos \theta' = \cot a \tan p \qquad \text{..........(7)}$$

$$\cos \theta' = \cos x' \sin B \quad \text{(สูตรตรวจสอบ)} \qquad \text{..........(8)}$$

และจากรูป 5.4.1 จะได้

$$c = x + x' \qquad \text{..........(9)}$$

$$C = \theta + \theta' \qquad \text{..........(10)}$$

ถ้าส่วนต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดมาให้ไม่ใช่ a, b, A การคิดคำนวณก็อาจทำได้โดยการสร้างสูตรในการแก้ปัญหาใหม่โดยการสับเปลี่ยนอักษรของส่วนที่กำหนดให้ลงในสูตร (1) ถึง (10)

ข้อสังเกต

เนื่องจากโคไซน์ (cosine) ของมุมลบมีค่าเท่ากับโคไซน์ของมุมบวก ดังนั้น จากสูตร (5) จึงได้ค่า x' 2 ค่า โดยค่าหนึ่งเป็นบวกและอีกค่าหนึ่งเป็นลบ และผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหาก็จะสมนัยกับแต่ละค่า

เนื่องจากค่า B หาได้จากค่า $\sin B$ ในสูตร (6) จึงได้มุม B 2 ค่า เป็นมุม ๆ หนึ่งกับมุมประกอบสองมุมฉากของมุมนั้น จากสามเหลี่ยม II ได้ว่า $\cot B = \cot p \sin x'$ ดังนั้น B จะอยู่ในจตุตถภาคเดียวกันกับ p เมื่อ x' เป็นบวก แต่ถ้า x' เป็นลบ แล้ว B กับ p จะอยู่ต่างจตุตถภาคกัน (นั่นคือ ถ้า p อยู่จตุตถภาคที่หนึ่งแล้ว B จะอยู่จตุตถภาคที่สอง แต่ถ้า p อยู่จตุตถภาคที่สอง แล้ว B จะอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง)

ถ้า $\cos x' = 1$ แสดงว่า $x' = 0$ ในกรณีเช่นนี้ผลลัพธ์จะมีเพียงชุดเดียว แต่ถ้า $\cos x' > 1$ แล้ว จะไม่มีคำตอบ อนึ่ง ค่า c กับ C ที่ได้จากสูตร (9) และ (10) ต้องไม่เป็นลบ และไม่มากกว่า 180° ดังนั้น จะไม่มีคำตอบที่สอดคล้องกับค่า x' ถ้า $x + x'$ หรือ $\theta + \theta'$ มีค่าใดค่าหนึ่งมากกว่า 180 °

ตัวอย่าง 5.4.1 จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ซึ่งกำหนดให้ $a = 110° 35'$, $b = 73° 10'$ และ $A = 115° 12'$

วิธีทำ

ในที่นี้ โจทย์กำหนด a, b, A มาให้ จะต้องหา B, C และ c

จาก (1) ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\tan x &= \tan b \cos A \\
&= (\tan 73° 10')(\cos 115° 12') \\
&= (\tan 73° 10')(-\cos 64° 18') \\
&= (3.3052)(-0.42578) \\
&= -1.4073 \\
x &= \tan^{-1}(-1.4073) \\
&= 180° - (54° 36' 13'') \\
&= 125° 23' 47''
\end{aligned}
$$

จาก (2) ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\cot \theta &= \cos b \tan A \\
&= (\cos 73° 10')(\tan 115° 12') \\
&= (\cos 73° 10')(-\tan 64° 18') \\
&= (0.28959)(-2.1251) \\
&= -0.61541 \\
\theta &= \cot^{-1}(-0.61541) \\
&= 180° - (58° 23' 29'') \\
&= 121° 36' 31''
\end{aligned}
$$

จาก (3) ได้

$$
\begin{aligned}
\sin p &= \sin b \sin A \\
&= (\sin 73° 10')(\sin 115° 12') \\
&= (\sin 73° 10')(\sin 64° 48') \\
&= (0.95715)(0.90483) \\
&= 0.86606
\end{aligned}
$$

$$p = 60° 0' 13'', 180° - (60° 0' 13'')$$
$$= 60° 0' 13'', 119° 59' 47''$$

ในที่นี้ จะต้องเลือกใช้ $p > 90°$ เพราะว่า $A > 90°$ (ตามกฎจตุคตภาคของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ในหัวข้อ 3.4)

นั่นคือ ใช้ $p = 119° 59' 47''$

ตรวจสอบ

จาก (4) ได้

$$\sin p = \tan x \cot \theta$$

ในที่นี้ $\sin p = \sin 119° 59' 47''$

$$= 0.86606$$

$$\tan x \cot \theta = (\tan 125° 23' 47'')(\cot 121° 36' 31'')$$
$$= (-\tan 54° 36' 13'')(-\cot 58° 23' 29'')$$
$$= (-1.4073)(-0.61541)$$
$$= 0.86606$$

จาก (5) ได้

$$\cos x' = \frac{\cos a}{\cos p}$$
$$= \frac{\cos 110° 35'}{\cos 119° 59' 47''}$$
$$= \frac{-\cos 69° 25'}{-\cos 60° 0' 13''}$$
$$= \frac{-0.35157}{-0.49995}$$
$$= 0.70321$$
$$x' = \cos^{-1}(0.70321)$$
$$= \pm (45° 18' 54'')$$

จาก (6) ได้

$$\sin B = \frac{\sin p}{\sin a}$$
$$= \frac{\sin 119° 59' 47''}{\sin 110° 35'}$$

$$= \frac{\sin 60° 0' 13''}{\sin 69° 25'}$$

$$= \frac{0.86606}{0.93616}$$

$$= 0.92512$$

$$B = \sin^{-1}(0.92512)$$

$$= 67° 41' 11'', 112° 18' 49''$$

(อนึ่งสำหรับค่า B นี้ จะใช้ค่าใดในกรณีไหนนั้น ขึ้นอยู่กับค่า x' และค่า p คือ ถ้า $x' > 0$ ใช้ B ที่อยู่ในจตุตถภาคเดียวกันกับ p แต่ถ้า $x' < 0$ ใช้ B ที่อยู่ต่างจตุตถภาคกับ p

นั่นคือ ในที่นี้ ถ้าใช้ $x' = 45° 18' 54''$ จะได้ค่า B ที่สมนัย คือ $B_1 = 112° 18' 49''$ แต่ถ้าใช้ $x' = -(45° 18' 54'')$ จะได้ค่า B ที่สมนัยคือ $B_2 = 67° 41' 11''$)

จาก (7) ได้

$$\cos \theta' = \cot a \tan p$$

$$= (\cot 110° 35')(\tan 119° 59' 47'')$$

$$= (-\cot 69° 25')(-\tan 60° 0' 13'')$$

$$= (-0.37554)(-1.7324)$$

$$= 0.65058$$

$$\theta' = \cos^{-1}(0.65058)$$

$$= \pm (49° 24' 51'')$$

ตรวจสอบ

จาก (8) ได้ว่า

$$\cos \theta' = \cos x' \sin B$$

ในที่นี้ $\cos \theta' = \cos \pm (49° 24' 51'')$

$$= 0.65058$$

และ $\cos x' \sin B = (\cos \pm (45° 18' 54''))(\sin 67° 41' 11'')$

$$= (0.70321)(0.92512)$$

$$= 0.65055$$

จาก (9) ได้ว่า

$$c = x + x'$$

$$= 125° 23' 47'' \pm (45° 18' 54'')$$

$$= 170° 42' 41'', 80° 4' 53''$$

ดังนั้น ได้ค่า c 2 ค่าคือ

$$c_1 = 170° 42' 41''$$

และ $$c_2 = 80° 4' 53''$$

จาก (10) ได้ว่า

$$C = \theta + \theta'$$

$$= 121° 36' 31'' \pm (49° 24' 51'')$$

$$= 171° 1' 22'', 72° 11' 40''$$

ดังนั้น ได้ค่า C 2 ค่าคือ

$$C_1 = 171° 1' 22''$$

และ $$C_2 = 72° 11' 40''$$

ดังนั้น จึงได้ว่าการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ที่กำหนดให้มีผลลัพธ์ 2 คำตอบ คือ $c_1 = 170° 42' 41''$, $C_1 = 171° 1' 22''$, $B_1 = 112° 18' 49''$ **กับ** $c_2 = 80° 4' 53''$, $C_2 = 72° 11' 40''$, $B_2 = 67° 41' 11''$

แบบฝึกหัด 5.4

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่กำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ต่อไปนี้ โดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. $b = 81^\circ 42'$, $c = 52^\circ 19'$, $C = 47^\circ 25'$
2. $a = 40^\circ 6'$, $b = 118^\circ 22'$, $A = 29^\circ 43'$
3. $a = 128^\circ 15'$, $b = 129^\circ 20'$, $A = 130^\circ 25'$
4. $a = 150^\circ 57' 5''$, $b = 134^\circ 15' 54''$, $A = 144^\circ 22' 42'$
5. $a = 52^\circ 45' 20''$, $c = 71^\circ 12' 40''$, $A = 46^\circ 22' 10''$
6. $a = 80^\circ 26' 12''$, $c = 115^\circ 30' 36''$, $A = 72^\circ 24' 24''$

5.5 การแก้ปัญหากรณีกำหนดมุมให้สองมุม และด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง

การแก้ปัญหากรณีกำหนดมุมให้สองมุมและด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง โดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก สามารถทำได้โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.7.2 โดยการหาด้านสองด้านและมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมเชิงขั้วที่สมนัยกัน แล้วทำการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงขั้วโดยใช้สูตร (1) ถึง (10) ในหัวข้อ 5.4 และใช้ทฤษฎีบท 3.7.2 กับผลลัพธ์ที่ได้อีกครั้งหนึ่ง ก็จะเป็นผลลัพธ์ที่ต้องการ ตัวอย่างเช่น ต้องการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนด A, B, a มาให้ สามารถทำได้ตามกระบวนการของหัวข้อ 5.4 โดยใช้สามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ซึ่ง $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $A' = 180° - a$ นั่นคือเป็นการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ในกรณีที่กำหนด a', b', A' มาให้ เมื่อได้ผลลัพธ์คือ B', C', c' แล้ว ก็ใช้ทฤษฎีบท 3.7.2 จะได้ว่า $b = 180° - B'$, $c = 180° - C'$, $C = 180° - c'$ นั่นคือ จะได้ผลลัพธ์คือ b, c, C ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ตามต้องการ

แบบฝึกหัด 5.5

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC (โดยการแก้ปัญหากับสามเหลี่ยมเชิงขั้วของมัน) ที่กำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ต่อไปนี้

1. $B = 98° 18'$, $C = 127° 41'$, $c = 132° 35'$
2. $B = 75° 17'$, $C = 78° 15'$, $c = 80° 13'$
3. $A = 120° 43'$, $B = 116° 38'$, $a = 115° 13' 4''$
4. $A = 145° 52' 10''$, $C = 70° 37' 20''$, $a = 150° 42' 40''$
5. $A = 142° 12' 10''$, $B = 75° 57' 20''$, $a = 147° 12' 10''$

5.6 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สามด้าน

การแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ใด ๆ ในกรณีที่กำหนดด้านมาให้สามด้านนั้น โดยปกติเราจะใช้สูตรครึ่งมุมในหัวข้อ 4.5.1 มาช่วยแก้ปัญหา ถึงอย่างไรก็ตาม เราอาจใช้วิธีสามเหลี่ยมมุมฉากมาแก้ปัญหาก็ได้ดังนี้

หามุมใดมุมหนึ่งก่อนโดยกฎของโคไซน์สำหรับด้าน จากนั้นก็ทำให้เราทราบด้านสามด้านและมุม ๆ หนึ่ง จึงใช้วิธีการแก้ปัญหา กรณีกำหนดด้านให้สองด้านและมุมระหว่างด้านทั้งสอง ตามวิธีการในหัวข้อ 5.1 ต่อไป ก็จะได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ เช่น โจทย์กำหนดด้าน a, b, c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มาให้ เราอาจหามุม C โดยกฎของโคไซน์สำหรับด้านคือ

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

จากผลลัพธ์นี้ ทำให้เราทราบ a, b, c และ C ของสามเหลี่ยม ABC ก็จัดเข้าในกรณีทราบด้านสองด้าน และมุมระหว่างด้านทั้งสอง (คือทราบ a, b และ C)

จึงใช้วิธีการตามหัวข้อ 5.1 มาแก้ปัญหาได้ โดยหาเฉพาะค่า A และ B ก็จะได้ผลลัพธ์ A, B, C ตามต้องการ

แบบฝึกหัด 5.6

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังนี้

1. $a = 57°, b = 137°, c = 116°$
2. $a = 57° 17', b = 20° 39', c = 76° 22'$
3. $a = 149° 30', b = 131°, c = 119° 20'$
4. $a = 77° 36' 12'', b = 63° 16' 48'', c = 107° 23' 12''$

5.7 การแก้ปัญหากรณีกำหนดมุมให้สามมุม

การแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ในกรณีกำหนดมุมให้สามมุม คือ มุม A, B และ C ในกรณีนี้สามารถแก้ปัญหาตามวิธีการในหัวข้อ 5.6 โดยการใช้สามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ซึ่งจะได้ว่า $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$ และ $c' = 180° - C$ นั่นคือ ทำให้เราทราบด้านทั้งสามด้าน คือ a', b' และ c' ของสามเหลี่ยม $A'B'C'$ จึงสามารถแก้ปัญหาตามกระบวนการในหัวข้อ 5.6 ได้ เมื่อได้ผลลัพธ์คือ มุม A', B' และ C' ของสามเหลี่ยม $A'B'C'$ แล้ว โดยทฤษฎีบท 3.7.2 จะได้ว่า $a = 180° - A'$, $b = 180° - B'$ และ $c = 180° - C'$ นั่นคือ ได้ผลลัพธ์เป็นด้านทั้งสาม คือด้าน a, b และ c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ตามต้องการ

แบบฝึกหัด 5.7

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังนี้

1. $A = 123°, B = 43°, C = 64°$
2. $A = 86° 20', B = 76° 30', C = 94° 40'$
3. $A = 116° 35' 36'', B = 105° 14' 48'', C = 43° 17' 12''$
4. $A = 136° 19' 36'', B = 43° 18' 30'', C = 114° 43' 18''$