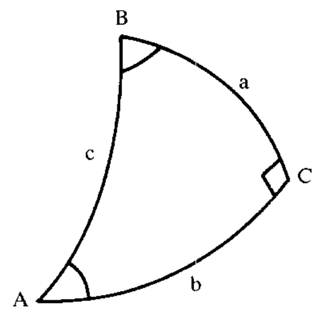
บทที่ 3
สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก
(Right Spherical Triangle)

3.1 ลักษณะของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

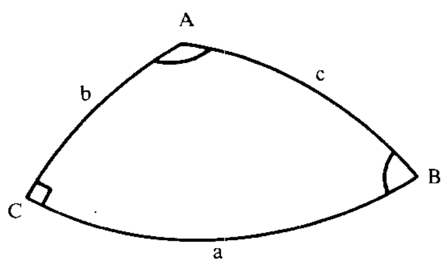
สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก คือ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมฉากเพียงหนึ่งมุมเท่านั้น ดังนั้น ถ้าให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ที่มีมุม C เป็นมุมฉากแล้ว ABC อาจแยกเป็นลักษณะต่าง ๆ กันได้ 3 ลักษณะคือ

1. สามเหลี่ยมเชิงกลมฉาก ABC ที่มีด้าน $a < 90°$ และ ด้าน $b < 90°$ ดังรูป 3.1.1



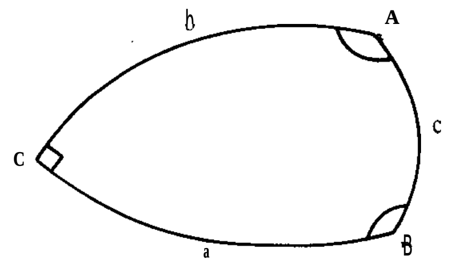
รูป 3.1.1

2. สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่มีด้าน $a > 90°$ และด้าน $b < 90°$ ดังรูป 3.1.2



รูป 3.1.2

3. สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่มีด้าน a > 90° และด้าน b > 90° ดังรูป 3.1.3



รูป 3.1.3

หมายเหตุ มุมแต่ละมุมของสามเหลี่ยมทรงกลม ที่เรากล่าวถึงนี้ต้องมีขนาดน้อยกว่า 180° เสมอ

3.2 สูตรเกี่ยวกับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

สูตรสำหรับหาความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุม ในวิชาตรีโกณมิติเชิงระนาบ (plane trigonometry) นั้น ได้มาจากสามเหลี่ยมระนาบ (plane triangle) และสูตรสำหรับหาความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมในวิชาตรีโกณมิติเชิงทรงกลม (spherical trigonometry) ก็ได้มาจากสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (spherical triangle) โดยในเบื้องต้นนี้ จะศึกษาถึงสูตรที่เกี่ยวกับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากก่อน

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ใด ๆ ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก (โดยปกติจะให้ C เป็นมุมฉากเสมอ) จะได้สูตรความสัมพันธ์พื้นฐาน 10 สูตรดังนี้

(1) $\sin a = \sin A \sin c$

(2) $\tan a = \tan A \sin b$

(3) $\tan a = \cos B \tan c$

(4) $\sin b = \sin B \sin c$

(5) $\tan b = \tan B \sin a$

(6) $\tan b = \cos A \tan c$

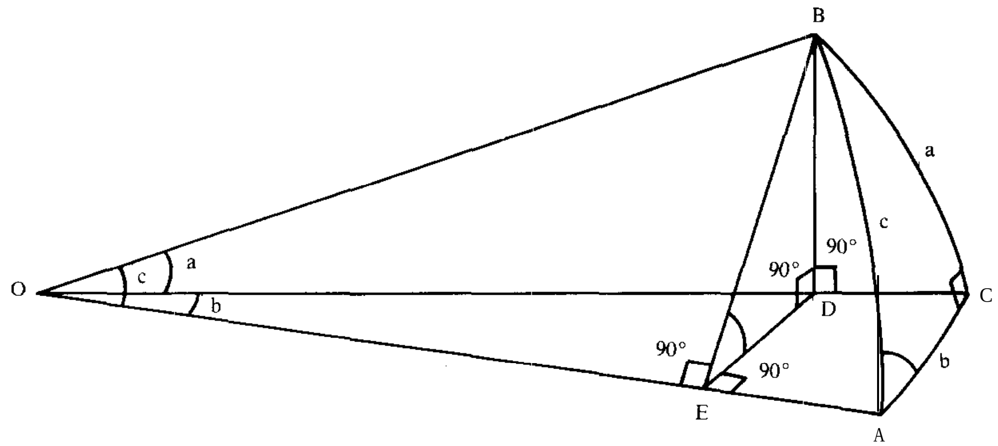
(7) $\cos c = \cos b \cos a$

(8) $\cos c = \cot A \cot B$

(9) $\cos A = \sin B \cos a$

(10) $\cos B = \sin A \cos b$

ซึ่งสามารถแสดงที่มาของสูตรพื้นฐานทั้ง 10 ได้ดังนี้



รูป 3.2.1

จากรูป 3.2.1 ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ที่อยู่บนทรงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง ซึ่งมีด้าน a และด้าน b น้อยกว่า 90° มีมุม C เป็นมุมฉาก ลากเส้นจาก O ไปยังจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC คือลาก OA, OB และ OC จะทำให้เกิดมุมระหว่างสามระนาบ O – ABC

สร้างระนาบให้ผ่านจุด B และตั้งฉากกับ OA โดยตัด OC ที่จุด D ตัด OA ที่จุด E ดังนั้น ระนาบนี้คือ ระนาบ BDE

เนื่องจาก OE ตั้งฉากกับระนาบ BDE

ดังนั้น OE ย่อมตั้งฉากกับ EB และ ED ด้วย

เพราะฉะนั้น สามเหลี่ยม BEO และสามเหลี่ยม DEO เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุม E เป็นมุมฉาก และมุม BED เป็นมุมระนาบของมุมระหว่างสองระนาบ B – OA – C ด้วย ดังนั้น มุม BED มีขนาดเท่ากับมุม A ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC

เนื่องจากระนาบ BDE ตั้งฉากกับ OE ดังนั้น ระนาบ BDE จึงตั้งฉากกับระนาบ OAC ซึ่งเป็นระนาบที่ผ่าน OE ด้วย

เส้นตรง BD เป็นเส้นที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ OBC กับ ระนาบ BDE โดยระนาบทั้งสองนี้ต่างก็ตั้งฉากกับระนาบ OAC ดังนั้น เส้นตรง BD จึงตั้งฉากกับระนาบ OAC

ดังนั้นสามเหลี่ยม BDO และสามเหลี่ยม BDE จึงเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมฉากที่จุด D (คือมีมุม BDO และ BDE เป็นมุมฉากตามลำดับ)

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก BDO, BDE และ BEO จะได้ว่า

$$\sin a = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{BE} \cdot \frac{BE}{OB}$$

$$= \sin A \sin c$$

นั่นคือ $\sin a = \sin A \sin c$ (คือสูตรที่ 1)

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก BDO, BDE และ DEO จะได้ว่า

$$\tan a = \frac{BD}{OD}$$

$$= \frac{BD}{DE} \cdot \frac{DE}{OD}$$

$$= \tan A \sin b$$

นั่นคือ $\tan a = \tan A \sin b$ (คือสูตรที่ 2)

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก BEO, DEO และ BDO จะได้ว่า

$$\cos c = \frac{OE}{OB}$$

$$= \frac{OE}{OD} \quad \frac{OD}{OB}$$

$$= \cos b \cos a$$

นั่นคือ $\cos c = \cos b \cos a$ (คือสูตรที่ 7)

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก DEO, BDE และ BEO จะได้ว่า

$$\tan b = \frac{DE}{OE}$$

$$= \frac{DE}{BE} \cdot \frac{BE}{OE}$$

$$= \cos A \tan c$$

นั่นคือ $\tan b = \cos A \tan c$ (คือสูตรที่ 6)

อนึ่ง ถ้าสร้างระนาบให้ผ่านจุด A และตั้งฉากกับ OB แล้วดำเนินกระบวนการแสดงเหตุผลทำนองเดียวกับข้างต้น ก็จะได้สูตรใหม่อีก 3 สูตร ซึ่งสามารถหาได้โดยการสลับเปลี่ยนกันระหว่าง A กับ B และ a กับ b โดยจะได้ว่า

จากสูตร (1) จะได้สูตรใหม่เป็น

$$\sin b = \sin B \sin c$$ ซึ่งคือสูตรที่ (4)

จากสูตร (2) จะได้สูตรใหม่เป็น

$$\tan b = \tan B \sin a$$ ซึ่งคือสูตรที่ (5)

จากสูตร (6) จะได้สูตรใหม่เป็น

$$\tan a = \cos B \tan c$$ ซึ่งคือสูตรที่ (3)

ข้อสังเกต จากสูตร (7) เมื่อสลับเปลี่ยนระหว่าง a กับ b แล้วไม่ได้สูตรใหม่ คงได้สูตรเดิมคือ $\cos c = \cos a \cos b$

นอกจากนี้ ยังได้ว่า

ผลคูณระหว่างสูตร (2) กับสูตร (5) คือ

$$\tan a \,.\, \tan b = \tan A \tan B \sin a \sin b$$

หรือ $$\frac{\sin a}{\cos a}\,\frac{\sin b}{\cos b} = \tan A \tan B \sin a \sin b$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\cos a \cos b} = \tan A \tan B$$

โดยสูตร (7) จึงได้ว่า

$$\frac{1}{\cos c} = \tan A \tan B$$

นั่นคือ $$\cos c = \cot A \cot B$$ ซึ่งคือสูตรที่ (8)

และจากผลคูณระหว่างสูตรที่ (4) กับที่ (6) คือ

$$\sin b \cos A \tan c = \tan b \sin B \sin c$$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{\tan b \sin B \sin c}{\sin b \tan c}$$

$$= \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\sin B \sin c}{\sin b \dfrac{\sin c}{\cos c}}$$

$$= \frac{\sin B \cos c}{\cos b}$$

$$= \frac{\sin B (\cos a \cos b)}{\cos b} \quad \text{(โดยสูตรที่ 7)}$$

$$= \sin B \cos a$$

นั่นคือ $\cos A = \sin B \cos a$ ซึ่งคือสูตรที่ (9)

และจากผลคูณระหว่างสูตรที่ (1) กับสูตรที่ (3) คือ

$$\sin a \cos B \tan c = \sin A \sin c \tan a$$

$$\therefore \quad \cos B = \frac{\sin A \sin c \tan a}{\sin a \tan c}$$

$$= \frac{\sin A \sin c \dfrac{\sin a}{\cos a}}{\sin a \dfrac{\sin c}{\cos c}}$$

$$= \frac{\sin A \sin c \sin a \cos c}{\sin a \cos a \sin c}$$

$$= \frac{\sin A \cos c}{\cos a}$$

$$= \frac{\sin A (\cos a \cos b)}{\cos a} \qquad \text{(โดยสูตรที่ 7)}$$

$$= \sin A \cos b$$

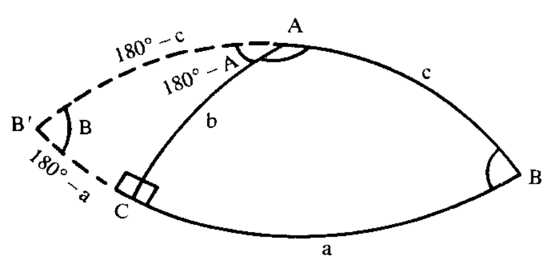
นั่นคือ $\cos B = \sin A \cos b$ ซึ่งคือสูตรที่ (10)

ข้อสังเกต

จะสังเกตเห็นว่า สูตรพื้นฐานทั้ง 10 สูตรนั้น แต่ละสูตรประกอบด้วยสามส่วน ดังนั้นเมื่อกำหนดสองส่วนใด ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากมาให้ ย่อมสามารถหาส่วนที่เหลือทั้งหมดได้เสมอ โดยการใช้สูตรดังกล่าวมาช่วย

การพิสูจน์สูตรทั้ง 10 สูตรที่แสดงมานั้น เป็นการพิสูจน์ในกรณีที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC มีมุมฉากที่ C และมี $a < 90°$, $b < 90°$ เราได้ในกรณีที่ $a > 90°$, $b < 90°$ และ $a > 90°$, $b > 90°$ สูตรทั้ง 10 สูตรก็ยังเป็นจริงอยู่ ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นจริงได้ดังนี้

พิจารณาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ซึ่งมี C เป็นมุมฉาก และ $a > 90°$, $b < 90°$ ดังรูป 3.2.2



รูป 3.2.2

ต่อส่วนโค้ง BA และส่วนโค้ง BC ไปตัดกันที่จุด B′

พิจารณาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก AB′C มี C เป็นมุมฉาก ซึ่งด้าน $b < 90°$ และ $180° - a < 90°$

โดยสูตร (1) จะได้ว่า

$$\sin(180° - a) = \sin(180° - A)\sin(180° - c)$$

หรือ $\sin a = \sin A \sin c$

โดยสูตร (7) จะได้ว่า

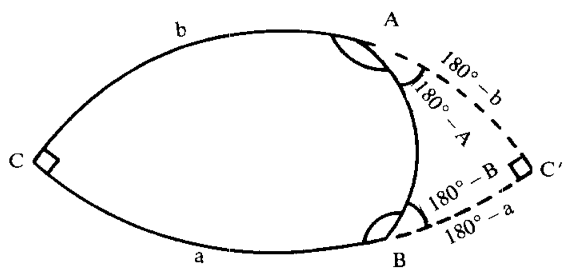
$$\cos(180° - c) = \cos b \cos(180° - a)$$

หรือ $-\cos c = \cos b(-\cos a)$

หรือ $\cos c = \cos b \cos a$

นอกจากนี้ ก็สามารถพิสูจน์ได้ว่าสูตรอื่น ๆ ที่เหลือก็เป็นจริงด้วย

พิจารณาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ซึ่งมี C เป็นมุมฉาก และ $a > 90°$, $b > 90°$ ดังรูป 3.2.3



รูป 3.2.3

ต่อส่วนโค้ง CB และส่วนโค้ง CA ไปตัดกันที่จุด C′

พิจารณาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC′ มี C′ เป็นมุมฉาก ซึ่งด้าน $180° - a < 90°$ และด้าน $180° - b < 90°$

โดยสูตร (1) จะได้ว่า

$$\sin(180° - a) = \sin(180° - A)\sin c$$

หรือ $\sin a = \sin A \sin c$

โดยสูตร (7) จะได้ว่า

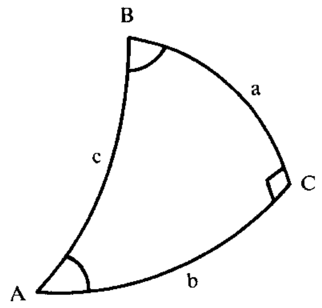
$$\cos c = \cos(180° - b)\cos(180° - a)$$
$$= (-\cos b)(-\cos a)$$

หรือ $$\cos c = \cos b \cos a$$

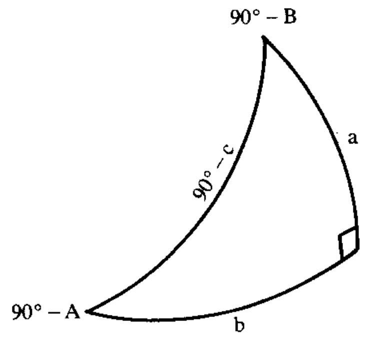
นอกจากนี้ ก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า สูตรอื่น ๆ ที่เหลือก็เป็นจริงด้วย

3.3 กฎของเนเปียร์ (Napier's Rules)

สูตรพื้นฐานทั้งสิบสูตร ที่กล่าวในหัวข้อ 3.2 นั้น เราไม่จำเป็นต้องท่องจำ เพราะว่าสามารถเขียนสูตรทั้งสิบนั้นได้โดยง่าย โดยใช้กฎที่คิดขึ้นโดยเนเปียร์ (John Napier, ค.ศ. 1550-1617 นักคณิตศาสตร์ชาวสก๊อตแลนด์)

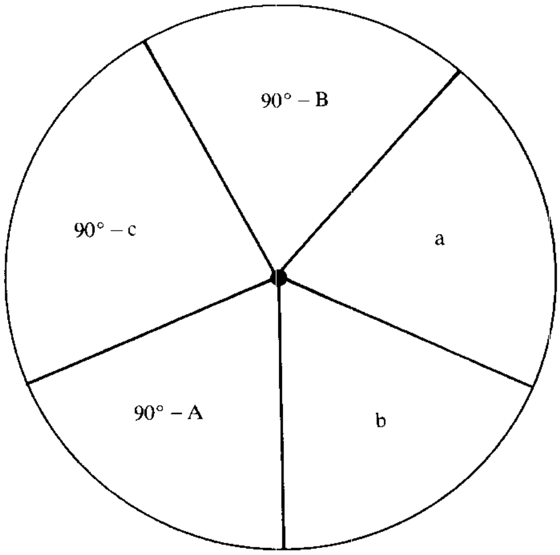


รูป 3.3.1



รูป 3.3.2

รูป 3.3.2 แสดงถึงสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ที่มีโครงแบบมาจากสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมดังรูป 3.3.1 โดยการแทน c ซึ่งเป็นส่วนตรงข้ามมุมฉาก C ด้วย $90° - c$ แทน A และ B ซึ่งเป็นมุมที่มีแขนข้างหนึ่งเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก ด้วย $90° - A$ และ $90° - B$ ตามลำดับ ปริมาณทั้งห้าคือ a, b, $90° - c$, $90° - A$ และ $90° - B$ เราเรียกว่า ส่วนวงกลม (circular parts) ซึ่งจัดเรียงติดกันดังรูป 3.3.3 (**ข้อสังเกต** : ในส่วนของวงกลมจะไม่มี C มาเกี่ยวข้อง)



รูป 3.3.3

จากรูป 3.3.3 ถ้ากำหนดส่วนใดส่วนหนึ่งมาให้จะมีส่วนของวงกลม 2 ส่วนที่อยู่ติดกันกับส่วนที่กำหนดให้ และอีก 2 ส่วนจะไม่อยู่ติดกันกับส่วนที่กำหนดให้ เราจะเรียกส่วนที่กำหนดให้ว่า **ส่วนกลาง** (middle part) เรียกสองส่วนที่อยู่ติดกับส่วนกลางว่า **ส่วนประชิด** (adjacent parts) และเรียกอีกสองส่วนที่ไม่อยู่ติดกับส่วนกลางว่า **ส่วนตรงข้าม** (opposite parts) แล้ว กฎของเนเปียร์ที่ใช้สำหรับเขียนสูตรพื้นฐานทั้งสิบสูตร มีดังนี้

1) sine ของส่วนกลางใด ๆ ย่อมเท่ากับผลคูณของ tangents ของส่วนประชิดทั้งสอง

2) sine ของส่วนกลางใด ๆ ย่อมเท่ากับผลคูณของ cosines ของส่วนตรงข้ามทั้งสอง

หรืออาจเขียนกฎทั้งสองสั้น ๆ ได้ดังนี้

sin (ส่วนกลาง) = tan (ส่วนประชิด) = cos (ส่วนตรงข้าม)

จากกฎของเนเปียร์ จะได้ว่า เมื่อกำหนดให้ส่วนใดส่วนหนึ่งของวงกลมเป็นส่วนกลาง จะสามารถเขียนสูตรได้สองสูตร เมื่อแบ่งวงกลมออกเป็นห้าส่วน ถ้าพิจารณาโดยให้แต่ละส่วนเป็นส่วนกลาง ก็จะเขียนสูตรได้ทั้งหมดรวม 10 สูตร ดังนี้

1. ถ้าให้ a เป็นส่วนกลาง จะได้ว่า

$$\sin a = \tan b \tan (90^\circ - B)$$

$$= \tan b \cot B$$

$$\sin a = \tan b \left(\frac{1}{\tan B}\right)$$

นั่นคือ $\tan b = \tan B \sin a$ ซึ่งคือสูตรที่ (5)

และ $\sin a = \cos(90° - c)\cos(90° - A)$

$= \sin c \sin A$

นั่นคือ $\sin a = \sin A \sin c$ ซึ่งคือสูตรที่ (1)

2. ถ้าให้ b เป็นส่วนกลาง จะได้ว่า

$$\sin b = \tan a \tan(90° - A)$$

$$= \tan a \cot A$$

$$= \tan a \left(\frac{1}{\tan A}\right)$$

นั่นคือ $\tan a = \tan A \sin b$ ซึ่งคือสูตรที่ (2)

และ $\sin b = \cos(90° - B)\cos(90° - c)$

$= \sin B \sin c$

นั่นคือ $\sin b = \sin B \sin c$ ซึ่งคือสูตรที่ (4)

3. ถ้าให้ $90° - A$ เป็นส่วนกลาง จะได้ว่า

$$\sin(90° - A) = \tan b \tan(90° - c)$$

หรือ $\cos A = \tan b \cot c$

$$= \tan b \left(\frac{1}{\tan c}\right)$$

นั่นคือ $\tan b = \cos A \tan c$ ซึ่งคือสูตรที่ (6)

และ $\sin(90° - A) = \cos a \cos(90° - B)$

$\cos A = \cos a \sin B$

นั่นคือ $\cos A = \sin B \cos a$ ซึ่งคือสูตรที่ (9)

4. ถ้าให้ $90° - c$ เป็นส่วนกลาง จะได้ว่า

$$\sin(90° - c) = \tan(90° - A)\tan(90° - B)$$

นั่นคือ $\cos c = \cot A \cot B$ ซึ่งคือสูตรที่ (8)

และ $\sin(90° - c) = \cos a \cos b$

นั่นคือ $\cos c = \cos b \cos a$ ซึ่งคือสูตรที่ (7)

5. ถ้าให้ $90° - B$ เป็นส่วนกลาง จะได้ว่า

$$\sin(90° - B) = \tan a \tan(90° - c)$$

หรือ $\cos B = \tan a \cot c$

$$= \tan a \left(\frac{1}{\tan c}\right)$$

นั่นคือ $\tan a = \cos B \tan c$ ซึ่งคือสูตรที่ (3)

และ $\sin(90° - B) = \cos b \cos(90° - A)$

$$\cos B = \cos b \sin A$$

นั่นคือ $\cos B = \sin A \cos b$ ซึ่งคือสูตรที่ (10) นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.3.1 ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ถ้า $a = 30°$, $b = 60°$ แล้วจงหา c

วิธีทำ

จากสูตรที่ (7) ได้ว่า $\cos c = \cos b \cos a$

$$\therefore \cos c = \cos 60° \cdot \cos 30°$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}$$

ดังนั้น $c = \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{4}$

ตัวอย่าง 3.3.2 ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ถ้า $a = 60°$, $b = 120°$ จงหา A

วิธีทำ

จากสูตรที่ (2) ได้ว่า

$$\tan a = \tan A \sin b$$

หรือ $\tan A = \frac{\tan a}{\sin b}$

$$\therefore \tan A = \frac{\tan 60°}{\sin 120°}$$

$$= \frac{\text{tab } 60°}{\sin(180° - 60°)}$$

$$= \frac{\tan 60°}{\sin 60°}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore \quad A = \tan^{-1} 2$$

ตัวอย่าง 3.3.3

จงแสดงว่า ไม่มีสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ที่ $A + B < 90°$

วิธีทำ

จากสูตรที่ (9) สำหรับสามเหลี่ยมทรงกลมฉาก จะได้ว่า

$$\cos A = \sin B \cos a$$

หรือ
$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$$

$$= \frac{\sin (90° - A)}{\sin B}$$

เพราะว่า $A + B < 90°$ เพราะฉะนั้น $90° - A > B$

เนื่องจาก $90° - A$ เป็นมุมแหลม

ดังนั้น $\sin (90° - A) > \sin B$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sin (90° - A)}{\sin B} > 1$

หรือ $\cos a > 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

นั่นแสดงว่า ไม่มีสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากที่ $A + B < 90°$

แบบฝึกหัด 3.3

1. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC (มี C เป็นมุมฉาก) จงหาส่วนที่ไม่ทราบค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้

   1.1) ถ้า $c = 60°, a = 45°$ จงหา B

   1.2) ถ้า $a = 45°, B = 60°$ จงหา c

   1.3) ถ้า $a = 60°, B = 30°$ จงหา A

   1.4) ถ้า $c = 60°, A = 45°$ จงหา b

   1.5) ถ้า $B = 150°, c = 120°$ จงหา a

   1.6) ถ้า $A = 135°, B = 60°$ จงหา c

   1.7) ถ้า $a = 30°, B = 120°$ จงหา A

   1.8) ถ้า $c = 120°, a = 135°$ จงหา B

2. จงแสดงว่า ไม่มีสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   2.1) $A - B > 90°$

   2.2) $B - A > 90°$

   2.3) $\sin a > \sin c$

   2.4) $\sin b > \sin c$

สำหรับข้อ 3-7 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

3. จงหาสูตรสำหรับหาค่า b, B และ c เมื่อกำหนดค่า a และ A มาให้ พร้อมทั้งหาสูตรที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนของวงกลมที่เหลืออีกสามส่วนด้วย

4. จงหาสูตรสำหรับหาค่า a, A และ b เมื่อกำหนดค่า c และ B มาให้ พร้อมทั้งหาสูตรที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนของวงกลมที่เหลืออีกสามส่วนด้วย

5. จงหาสูตรสำหรับหาค่า c เมื่อกำหนด B และ a มาให้

6. จงพิสูจน์ว่า $\cos A = \dfrac{\sin b \cos a}{\sin c}$

7. จงพิสูจน์ว่า $\tan A = \dfrac{\sin a}{\tan b \cos c}$

3.4 กฎที่สำคัญของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

ถ้าในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากรูปหนึ่ง กำหนดส่วน A และ c มาให้ ค่าของ sin a หาได้โดยใช้สูตร (1) คือ $\sin a = \sin A \sin c$ และจำเป็นจะต้องรู้เพิ่มเติมว่า a นั้นจะมีค่าน้อยกว่าหรือมากกว่า 90° ซึ่งการที่จะได้คำตอบที่ถูกต้องนั้น ต้องอาศัยกฎที่สำคัญของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 กฎ ซึ่งมีชื่อว่า กฎของจตุตถภาค (laws of quadrants)

กฎของจตุตถภาคของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ซึ่งมี C เป็นมุมฉาก จะได้ว่า

กฎที่ 1 ด้าน a และมุม A (ด้าน b และมุม B) ย่อมอยู่ในจตุตถภาค (quadrant) เดียวกัน

กฎที่ 2 ถ้า $c < 90°$ แล้ว ด้าน a และด้าน b ย่อมอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน และถ้า $c > 90°$ แล้ว ด้าน a และด้าน b ย่อมอยู่ต่างจตุตถภาคกัน

ซึ่งสามารถแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

พิสูจน์ กฎที่ 1

จากสูตรที่ (9) สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากได้ว่า

$$\cos A = \sin B \cos a$$

เพราะว่า $B < 180°$, $\sin B$ จึงมีค่าเป็นบวกทุกกรณี จึงได้ว่า $\cos A$ และ $\cos a$ ต้องเป็นบวกทั้งคู่ (นั่นคือ $A < 90°$ และ $a < 90°$) หรือ $\cos A$ และ $\cos a$ ต้องเป็นลบทั้งคู่ (นั่นคือ $A > 90°$ และ $a > 90°$)

นั่นคือ ด้าน a และมุม A ย่อมอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน
ในทำนองเดียวกัน

จากสูตรที่ (10) $\cos B = \sin A \cos b$
ก็สามารถแสดงได้ว่า ด้าน b และมุม B ก็อยู่ในจตุตถภาคเดียวกันด้วย

พิสูจน์ กฎที่ 2

จากสูตรที่ (7) สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

$$\cos c = \cos b \cos a$$

ถ้า $c < 90^\circ$ ได้ว่า $\cos c$ มีเครื่องหมายเป็นบวก

ดังนั้น ทั้ง $\cos b$ และ $\cos a$ ย่อมมีเครื่องหมายเหมือนกัน (คือเป็นบวกทั้งคู่ หรือเป็นลบทั้งคู่)

นั่นคือ a และ b อยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน

ถ้า $c > 90^\circ$ ได้ว่า $\cos c$ มีเครื่องหมายเป็นลบ

ดังนั้น $\cos b$ และ $\cos a$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม (คือ $\cos b$ เป็นบวก และ $\cos a$ เป็นลบ หรือ $\cos b$ เป็นลบ และ $\cos a$ เป็นบวก)

นั่นคือ a และ b อยู่ต่างจตุตถภาคกัน

ข้อสังเกต กฎที่ 2 อาจกล่าวได้ว่า สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงฉาก ถ้าสองในสามส่วน a, b และ c อยู่ในจตุตถภาคเดียวกันแล้ว ส่วนที่สามย่อมอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง ถ้าสองส่วนใด ๆ อยู่ต่างจตุตถภาคกันแล้ว ส่วนที่สามย่อมอยู่ในจตุตถภาคที่สอง

ตัวอย่าง 3.4.1 ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ถ้า $A < 90^\circ$ และ $c < 90^\circ$ แล้ว a, b และ B อยู่ในจตุตถภาคใด

วิธีทำ

จาก $A < 90^\circ$ แสดงว่า A อยู่ในจตุตถภาคที่ 1

จึงได้ว่า a อยู่ในจตุตถภาคที่ 1 ด้วย (กฎที่ 1)

จาก $c < 90^\circ$ จึงได้ว่า b อยู่ในจตุตถภาคที่ 1 (กฎที่ 2)

นอกจากนั้น ยังได้ว่า B ก็อยู่ในจตุตถภาคที่ 1 ด้วย (กฎที่ 1)

ตัวอย่าง 3.4.2 ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ถ้า $A < 90°$ และ $c > 90°$ แล้ว a, b และ B อยู่ในจตุตถภาคใด

วิธีทำ

จาก $A < 90°$ แสดงว่า A อยู่ในจตุตถภาคที่ 1

ดังนั้น a จึงอยู่ในจตุตถภาคที่ 1 ด้วย (กฎที่ 1)

และจาก $c > 90°$ จึงได้ว่า

b ต้องอยู่ในจตุตถภาคที่ 2 (คือ $b > 90°$) (กฎที่ 2)

และ B ก็อยู่ในจตุตถภาคที่ 2 ด้วย (กฎที่ 1)

แบบฝึกหัดที่ 3.4

1. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC

   1.1) ถ้า $A > 90°$ และ $c < 90°$ แล้ว a, b และ B อยู่ในจตุตถภาคใด

   1.2) ถ้า $A > 90°$ และ $c > 90°$ แล้ว a, b และ B อยู่ในจตุตถภาคใด

2. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC จงแสดงว่า ถ้าทั้ง a และ A น้อยกว่า 90° หรือทั้ง a และ A มากกว่า 90° แล้วจะเกิดรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป

3. จงพิจารณาว่า ส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่กำหนดส่วนให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้อยู่ในจตุตถภาคใด

   3.1) $a = 30°$, $b = 40°$

   3.2) $a = 30°$, $c = 120°$

   3.3) $a = 120°$, $B = 50°$

   3.4) $b = 140°$, $c = 75°$

   3.5) $A = 120°$, $B = 130°$

   3.6) $b = 35°$, $A = 100°$

   3.7) $c = 100°$, $A = 100°$

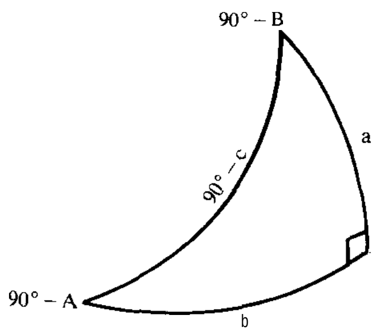
   3.8) $c = 60°$, $B = 60°$

3.5 การแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

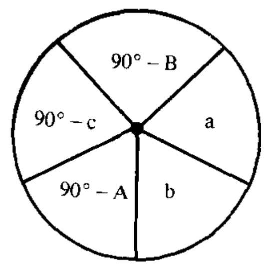
เมื่อเรากำหนดส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC เพิ่มจากมุมฉาก C มาให้สองส่วนใด ๆ แล้ว ย่อมสามารถหาส่วนที่เหลือได้ โดยอาศัยสูตรพื้นฐานทั้ง 10 สูตร หรืออาศัยกฎเนเปียร์มาช่วยในการคำนวณ แต่ในบางครั้งเราอาจจะหาส่วนที่เหลือไม่ได้ ถ้าหากว่าส่วนที่โจทย์กำหนดมาให้นั้นผิดจากความจริง

อนึ่ง เพื่อความสะดวกในการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก อาจดำเนินการเป็นขั้น ๆ ดังนี้

1. **สร้างโครงแบบสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก** ดังรูป 3.5.1 และส่วนวงกลมทั้งห้าส่วนดังรูป 3.5.2 แล้ววงกลมล้อมรอบส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากที่โจทย์กำหนดมาให้ (แต่ในหนังสือจะใช้ตัวทึบแทนส่วนที่ถูกล้อมรอบด้วยวงกลม)



รูป 3.5.1



รูป 3.5.2

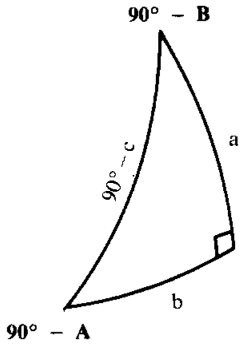
2. เขียนสูตรที่มีความสัมพันธ์ระหว่างส่วนทั้งสองของสามเหลี่ยมทรงกลมฉากที่กำหนดให้กับส่วนของสามเหลี่ยมทรงกลมฉากที่ต้องการ (โดยอาศัยกฎของเนเปียร์)

3. เขียนสูตรที่จะนำมาใช้ทดสอบความถูกต้องของส่วนที่ต้องการทั้งสามส่วน

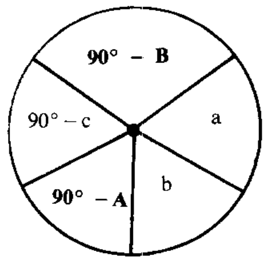
4. ใช้กฎจตุตถภาคมาช่วยพิจารณาค่าของส่วนที่ต้องการ

ตัวอย่าง 3.5.1 จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมทรงกลมฉาก ABC เมื่อกำหนดให้ $A = 65°$ และ $B = 118°$

วิธีทำ



รูป 3.5.3



รูป 3.5.4

จากรูป 3.5.3 และรูป 3.5.4 แสดงโครงแบบสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก และส่วนวงกลมห้าส่วนที่จะนำมาใช้ในกฎของเนเปียร์ และเขียนวงกลมล้อมรอบส่วน $90° - A$ กับ $90° - B$ ซึ่งเป็นส่วนที่กำหนดให้

ใช้กฎของเนเปียร์ จะได้สูตรที่ใช้ในการคำนวณดังนี้

หา a :

พิจารณา $a, 90° - A$ และ $90° - B$

ให้ $90° - A$ เป็นส่วนกลาง และ a กับ $90° - B$ เป็นส่วนตรงข้าม

แล้ว $\sin(90° - A) = \cos a \cos(90° - B)$

$\cos A = \cos a \sin B$

ดังนั้น $\cos a = \cos A \operatorname{cosec} B$ ....(1)

หา b :

พิจารณา $b, 90° - A$ และ $90° - B$

ให้ $90° - B$ เป็นส่วนกลาง และ b กับ $90° - A$ เป็นส่วนตรงข้าม

แล้ว $\sin(90° - B) = \cos b \cos(90° - A)$

$\cos B = \cos b \sin A$

ดังนั้น $\cos b = \cos B \operatorname{cosec} A$ ....(2)

หา c:

พิจารณา $90° - c, 90° - A$ และ $90° - B$

ให้ $90° - c$ เป็นส่วนกลาง และ $90° - A$ กับ $90° - B$ เป็นส่วนประชิด

แล้ว $\sin(90° - c) = \tan(90° - A) \tan(90° - B)$

ดังนั้น $\cos c = \cot A \cot B$ ....(3)

สูตรสำหรับตรวจสอบ :

พิจารณาส่วนที่ต้องการหา คือ a, b และ $90° - c$

ให้ $90° - c$ เป็นส่วนกลาง และ a กับ b เป็นส่วนตรงข้าม แล้ว

$$\sin (90° - c) = \cos a \cos b$$

ดังนั้น $$\cos c = \cos a \cos b \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (1) ได้ว่า $\cos a = \cos A \operatorname{cosec} B$ และ $A = 65°$, $B = 118°$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos 65° \,.\, \operatorname{cosec} 118° \\
&= \frac{\cos 65°}{\sin 118°} \\
&= \frac{\cos 65°}{\sin (180° - 62°)} \\
&= \frac{\cos 65°}{\sin 62°} \\
&= \frac{0.42262}{0.88295} \\
&= 0.47864 \\
a &= \cos^{-1} 0.47864
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $$a = 61°\ 24'\ 12''$$

จาก (2) ได้ว่า $\cos b = \cos B \operatorname{cosec} A$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\cos b &= \cos 118° \operatorname{cosec} 65° \\
\cos b &= \frac{\cos 118°}{\sin 65°} \\
&= \frac{\cos (180° - 62°)}{\sin 65°} \\
&= \frac{-\cos 62°}{\sin 65°} \\
&= \frac{-0.46947}{0.90631} \\
&= -0.51800 \\
\therefore\ b &= \cos^{-1} (-0.51800) \\
&= 121°\ 11'\ 53''
\end{aligned}$$

จาก (3) ได้ว่า $\cos c = \cot A \cot B$

ดังนั้น

$$\cos c = \frac{\cot A}{\tan B}$$

$$= \frac{\cot 65''}{\tan 118''}$$

$$= \frac{\cot 65''}{\tan (180'' - 62'')}$$

$$= \frac{\cot 65''}{-\tan 62''}$$

$$= \frac{0.46631}{-1.88807}$$

$$= -0.247'34$$

$$c = \cos^{-1}(-0.24794)$$

$$= 104''\ 21'\ 21''$$

ตรวจสอบ

ใช้สมการ (4) $\cos c = \cos a \cos b$

จะได้ว่า $\cos c = -0.24794$

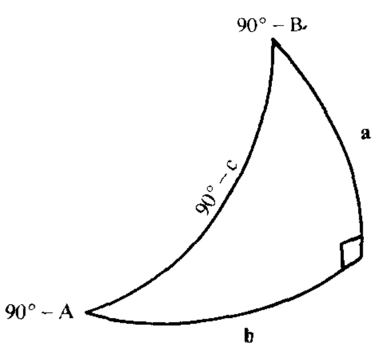
และ $\cos a \cos b = (0.47864)(-0.51800)$

$$= -0.247'94$$

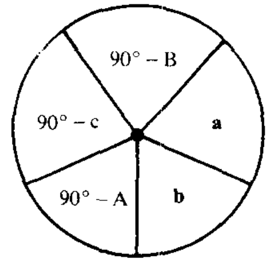
ดังนั้น จึงได้ว่า $a = 61^\circ 24' 12''$, $b = 121^\circ 11' 53''$ และ $c = 104^\circ 21' 21''$ เป็นส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากที่ต้องการ (ซึ่งสอดคล้องกับกฎของจตุตถภาค)

ตัวอย่าง 3.5.2 จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC เมื่อกำหนดให้ $a = 66^\circ 59' 31''$ และ $b = 156^\circ 34' 19''$

วิธีทำ



รูป 3.5.5



รูป 3.5.6

จากรูป 3.5.5 และรูป 3.5.6 แสดงโครงแบบสามเหลี่ยมทรงกลมฉาก และส่วนวงกลมห้าส่วนของสามเหลี่ยมทรงกลมฉาก ABC ซึ่งเราทราบค่า a และ b จึงเขียนวงกลมล้อมรอบ a และ b

ใช้กฎของเนเปียร์ จะได้สูตรในการคำนวณดังนี้

หา A :

พิจารณา $90° - A$, a และ b

ให้ b เป็นส่วนกลาง $90° - A$ กับ a เป็นส่วนประชิด แล้ว

$$\sin b = \tan (90° - A) \tan a$$

$$= \cot A \tan a$$

ดังนั้น $\cot A = \sin b \cot a$ ....(1)

หา B :

พิจารณา $90° - B$, a และ b

ให้ a เป็นส่วนกลาง, $90° - B$ กับ b เป็นส่วนประชิด แล้ว

$$\sin a = \tan (90° - B) \tan b$$

$$= \cot B \tan b$$

ดังนั้น $\cot B = \sin a \cot b$ ....(2)

หา c :

พิจารณา $90° - c$, a และ b

ให้ $90° - c$ เป็นส่วนกลาง a กับ b เป็นส่วนตรงข้าม แล้ว

$$\sin (90° - c) = \cos a \cos b$$

ดังนั้น $\cos c = \cos a \cos b$ ....(3)

สูตรตรวจสอบ

พิจารณา $90° - A$, $90° - B$ และ $90° - c$

ให้ $90° - c$ เป็นส่วนกลาง, $90° - A$ กับ $90° - B$ เป็นส่วนประชิด

$$\sin (90° - c) = \tan (90° - A) \tan (90° - B)$$

ดังนั้น $\cos c = \cot A \cot B$ ....(4)

หา A :

จาก (1) ได้

$$\begin{aligned}
\cot A &= \sin b \cot a \\
&= (\sin 156^\circ\ 34'\ 19'')(\cot 66^\circ\ 59'\ 31'') \\
&= (\sin 23^\circ\ 25'\ 41'')(\cot 66^\circ\ 59'\ 31'') \\
&= (0.39760)(0.42464) \\
&= 0.16884 \\
A &= \cot^{-1}(0.16884) \\
&= 80^\circ\ 25'
\end{aligned}$$

หา B :

จาก (2) ได้

$$\begin{aligned}
\cot B &= \sin a \cot b \\
&= (\sin 66^\circ\ 59'\ 31'')(\cot 156^\circ\ 34'\ 19'') \\
&= (\sin 66^\circ\ 59'\ 31'')(-\cot 23^\circ\ 25'\ 41'') \\
&= (0.92044)(-2.3078) \\
&= -2.1241 \\
B &= \cot^{-1}(-2.1241) \\
&= 180^\circ - 25^\circ\ 12'\ 37'' \\
&= 154^\circ\ 47'\ 23''
\end{aligned}$$

หา c :

จาก (3) ได้

$$\begin{aligned}
\cos c &= \cos a \cos b \\
&= (\cos 66^\circ\ 59'\ 31'')(\cos 156^\circ\ 34'\ 19'') \\
&= (\cos 66^\circ\ 59'\ 31'')(-\cos 23^\circ\ 25'\ 41'') \\
&= (0.39086)(-0.91756) \\
&= -0.35864 \\
c &= \cos^{-1}(-0.35864) \\
&= 180^\circ - 68^\circ\ 59' \\
&= 111^\circ\ 1'
\end{aligned}$$

ตรวจสอบ

ใช้สมการ (4) คือ $\cos c = \cot A \cot B$

ในที่นี้

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos 111^\circ 1' \\ &= -\cos 68^\circ 59' \\ &= -0.35864 \\ \cot A \cot B &= (\cot 80^\circ 25')(\cot 154^\circ 47' 23'') \\ &= (\cot 80^\circ 25')(-\cot 25^\circ 12' 37'') \\ &= (0.16884)(-2.1242) \\ &= 0.35864 \end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า $A = 80^\circ 25'$, $B = 154^\circ 47' 23''$ และ $c = 111^\circ 1'$

ข้อสังเกต

i) จากตัวอย่าง 3.5.2 จะพบว่าคล้องตามกฎจตุตถภาค คือ ได้ว่า $A < 90^\circ$ เพราะว่า $a < 90^\circ$ และได้ว่า $B > 90^\circ$ เพราะว่า $b > 90^\circ$ และได้ว่า $c > 90^\circ$ ด้วยเพราะว่า a และ b อยู่ต่างจตุตถภาคกัน

ii) ในการหา A; cot a และ sin b เป็นจำนวนบวกทั้งคู่ ดังนั้นผลคูณของมัน คือ cot A ย่อมเป็นจำนวนบวก และ $A < 90^\circ$

ในการหา B; sin a เป็นจำนวนบวก, cot b เป็นจำนวนลบ ดังนั้น ผลคูณของมัน คือ cot B เป็นจำนวนลบ และ $B > 90^\circ$

ในการหา c; cos a เป็นจำนวนบวก, cos b เป็นจำนวนลบ ดังนั้น ผลคูณของมัน คือ cos c เป็นจำนวนลบ และ $c > 90^\circ$

หมายเหตุ

การแก้ปัญหาของรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมนั้น นอกจากจะแก้โดยใช้ตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ในตารางที่ 1 แล้ว ยังสามารถแก้ปัญหาโดยใช้ตารางลอการิธึมของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ (Logarithms of Trigonometric Functions) ในตารางที่ 2 ได้อีกด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.5.3 จากโจทย์ปัญหาในตัวอย่าง 3.5.2 จงแก้ปัญหา โดยใช้ตารางลอการิธึมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

วิธีทำ

จากโจทย์ในตัวอย่าง 3.5.2 สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC มี $a = 66° 59' 31''$ และ $b = 156° 34' 19''$

ต้องการหา A, B และ c

โดยกฎของเนเปียร์ ได้ว่า

$\cot A = \sin b \cot a$ ....(1)

$\cot B = \sin a \cot b$ ....(2)

$\cos c = \cos a \cos b$ ....(3)

และสูตรตรวจสอบคือ $\cos c = \cot A \cot B$ ....(4)

การคำนวณหาค่า A, B และ c เขียนแสดงดังนี้

	(A)	(B)	(c)
$a = 66° 59' 31''$	$\ell \cot a = 9.62802$	$\ell \sin a = 9.96400$	$\ell \cos a = 9.59202$
$b = 156° 34' 19''$	$\ell \sin b = 9.59944$	$\ell \cot b = 0.36319$ (n)	$\ell \cos b = 9.96264$ (n)
$A = 80° 25' 01''$	$\ell \cot A = 9.22746$		
$B = 154° 47' 25''$		$\ell \cot B = 0.32719$ (n)	
$c = 111° 1' 0''$			$\ell \cos c = 9.55466$ (n)

ตรวจสอบ

ใช้สมการ (4) $\cos c = \cot A \cot B$

ในที่นี้ $\ell \cos c = 9.55466$ (n)

และ $\ell \cot A + \ell \cot B = 9.22746 + 0.32719$ (n)

$= 9.55465$ (n)

จึงได้ว่า ส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่ต้องการ คือ $A = 80° 25' 01''$, $B = 154° 47' 25''$ และ $c = 111° 1' 0''$ (ซึ่งคล้องตามกฎของจตุตถภาค คือ $A < 90°$ เพราะว่า $a < 90°$ และ $B > 90°$ เพราะว่า $b > 90°$ และ $c > 90°$ เพราะว่า a และ b อยู่ต่างจตุตถภาคกัน)

ข้อสังเกต

1) ใช้สัญลักษณ์ ℓ sin แทน log sine, ℓ cos แทน log cosine, ℓ tan แทน log tangent, ℓ cot แทน log cotangent, ℓ sec แทน log secant และ ℓ cosec แทน log cosecant

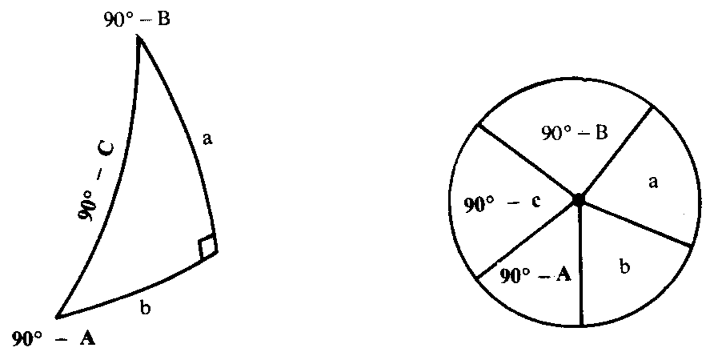
2) เพื่อความสะดวก ค่า -10 หลังค่าลอการิธึมของจำนวนที่น้อยกว่า 1 จะไม่เขียน

3) อักษร (n) ที่เขียนตามหลังลอการิธึม ใช้แสดงว่า การถอดลอการิธึม (anti-logarithm) ได้ค่าเป็นจำนวนลบ ถ้าหลังลอการิธึมไม่มีอักษร (n) แสดงว่า การถอดลอการิธึมได้ค่าเป็นจำนวนบวก

อนึ่ง จะสังเกตเห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหาโดยใช้ตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังตัวอย่าง 3.5.2 กับโดยใช้ตารางลอการิธึมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังตัวอย่าง 3.5.3 นั้น มีค่าใกล้เคียงกันมาก ซึ่งโดยทั่ว ๆ ไปจะมีความคลาดเคลื่อนกันได้ (ในหน่วยของพิลิบดา) เนื่องจากเป็นการใช้ค่าโดยประมาณของจำนวนทศนิยมนั่นเอง

ตัวอย่าง 3.5.4 จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC เมื่อกำหนดให้ $c = 72° 12' 30''$ และ $A = 156° 17' 12''$

วิธีทำ



รูป 3.5.7 *รูป 3.5.8*

ใช้กฎของเนเปียร์จะได้สูตรในการคำนวณดังนี้

หา a

ให้ a เป็นส่วนกลาง, $90° - A$ กับ $90° - c$ เป็นส่วนตรงข้าม

$$\sin a = \cos(90° - A)\cos(90° - c)$$

ดังนั้น $$\sin a = \sin A \sin c \qquad \text{..........(1)}$$

หา b

ให้ $90° - A$ เป็นส่วนกลาง, b กับ $90° - c$ เป็นส่วนประชิด

$$\sin(90° - A) = \tan b \tan(90° - c)$$

$$\cos A = \tan b \cot c$$

ดังนั้น $$\tan b = \cos A \tan c \qquad \text{..........(2)}$$

หา B

ให้ $90° - c$ เป็นส่วนกลาง, $90° - A$ กับ $90° - B$ เป็นส่วนประชิด

$$\sin(90° - c) = \tan(90° - A)\tan(90° - B)$$

$$\cos c = \cot A \cot B$$

ดังนั้น $$\cot B = \cos c \tan A \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

สูตรสำหรับตรวจสอบ

ให้ a เป็นส่วนกลาง, $90° - B$ กับ b เป็นส่วนประชิด

$\therefore$ $$\sin a = \tan(90° - B)\tan b$$

ดังนั้น $$\sin a = \cot B \tan b \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

หา a :

จาก (1) ได้

$$\begin{aligned}
\sin a &= \sin A \sin c \\
&= (\sin 156° \, 17' \, 12'')(\sin 72° \, 12' \, 30'') \\
&= (\sin 23° \, 42' \, 48'')(\sin 72° \, 12' \, 30'') \\
&= (0.40216)(0.95217) \\
&= 0.38292 \\
a &= \sin^{-1}(0.38292) \\
&= 22° \, 30' \, 53'' \quad \text{หรือ } 157° \, 29' \, 7''
\end{aligned}$$

แต่จากโจทย์ ได้ว่า $A > 90°$ ดังนั้น ค่า a ที่หาได้จะต้องใช้ $a > 90°$ ด้วย

ดังนั้น ในที่นี้ $a = 157° \, 29' \, 7''$ (เพียงค่าเดียว)

หา b :

จาก (2) ได้

$$\begin{aligned}
\tan b &= \cos A \tan c \\
&= (\cos 156° \, 17' \, 12'')(\tan 72° \, 12' \, 30'') \\
&= (-\cos 23° \, 42' \, 48'')(\tan 72° \, 12' \, 30'') \\
&= (-0.91557)(3.1162) \\
&= -2.8530
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b &= \tan^{-1}(-2.8530) \\
&= 180^\circ - 70^\circ\,41' \\
&= 109^\circ\,19'
\end{aligned}
$$

หา B :

จาก (3) ได้

$$
\begin{aligned}
\cot B &= \cos c \tan A \\
&= (\cos 72^\circ\,12'\,30'')(\tan 156^\circ\,17'\,12'') \\
&= (\cos 72^\circ\,12'\,30'')(-\tan 23^\circ\,42'\,48'') \\
&= (0.30556)(-0.43925) \\
&= (-0.13422) \\
&= 180^\circ - 82^\circ\,21'\,20'' \\
&= 97^\circ\,38'\,40''
\end{aligned}
$$

จะพบว่าสอดคล้องตามกฎจตุตถภาค คือ $b > 90^\circ$ แล้ว $B > 90^\circ$ ด้วย

ตรวจสอบ

ใช้สมการ (4) คือ

$$
\begin{aligned}
\sin a &= \sin 157^\circ\,29'\,7'' \\
&= 0.38292
\end{aligned}
$$

และ
$$
\begin{aligned}
(\cot B)(\tan b) &= (\cot 97^\circ\,38'\,40'')(\tan 109^\circ\,19') \\
&= (-0.13422)(-2.8530) \\
&= 0.38292
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$a = 157^\circ\,29'\,7'',\quad b = 109^\circ\,19'$$

และ
$$B = 97^\circ\,38'\,40''$$

ข้อสังเกต

ตัวอย่าง 3.5.4 คล้องตามกฎจตุตถภาค คือ

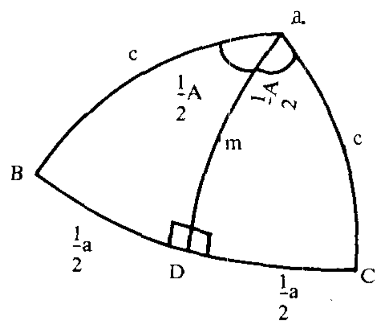
$a > 90^\circ$ เพราะว่า $A > 90^\circ$

และเพราะว่า $c < 90^\circ$ จึงได้ด้วยว่า b กับ a อยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน และ B กับ A ก็อยู่ในจตุตถภาคเดียวกันด้วย

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมหน้าจั่ว (isosceles spherical triangle) ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีด้านเท่ากันสองด้านนั้น สามารถแก้ปัญหาได้โดยการแบ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมหน้าจั่วออกเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป แล้วก็ใช้วิธีการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

ตัวอย่าง 3.5.5 จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมหน้าจั่ว ABC ดังรูป 3.5.9 เมื่อกำหนดให้ $b = c = 54° 28' 24''$ และ $A = 112° 36' 12''$

วิธีทำ

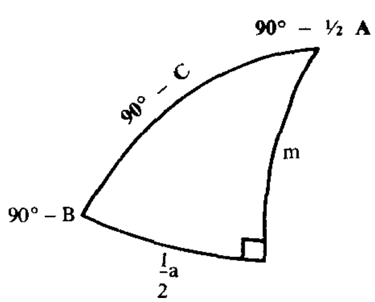


รูป 3.5.9

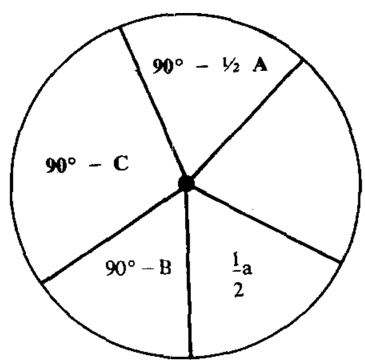
ลากวงกลมใหญ่ผ่านจุด A ไปตั้งฉากกับด้าน BC ที่จุด D ดังรูป 3.5.9 จะได้สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป คือ ABD กับ ACD ซึ่งต่างก็มีมุมฉากที่จุด D

ในที่นี้ จะแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABD

สร้างโครงแบบสามเหลี่ยมทรงกลมฉาก ดังรูป 3.5.10 และส่วนวงกลมห้าส่วน ดังรูป 3.5.11



รูป 3.5.10



รูป 3.5.11

ใช้กฎของเนเปียร์ จะได้สูตรในการคำนวณดังนี้

หา B

ให้ $90° - c$ เป็นส่วนกลาง, $90° - \frac{1}{2}A$ กับ $90° - B$ เป็นส่วนประชิด

$$\sin(90° - c) = \tan(90° - \frac{1}{2}A)\tan(90° - B)$$

$$\cos c = \cot\frac{1}{2}A \cot B$$

ดังนั้น $$\cot B = \cos c \tan\frac{1}{2}A \qquad \text{..........(1)}$$

หา $\frac{1}{2}a$

ให้ $\frac{1}{2}a$ เป็นส่วนกลาง, $90° - c$ กับ $90° - \frac{1}{2}A$ เป็นส่วนตรงข้าม

$$\sin\frac{1}{2}a = \cos(90° - c)\cos(90° - \frac{1}{2}A)$$

ดังนั้น $$\sin\frac{1}{2}a = \sin c \sin\frac{1}{2}A \qquad \text{..........(2)}$$

หา m

ให้ $90° - \frac{1}{2}A$ เป็นส่วนกลาง, $90° - c$ กับ m เป็นส่วนประชิด

$$\sin(90° - \frac{1}{2}A) = \tan(90° - c)\tan m$$

$$\cos\frac{1}{2}A = \cot c \tan m$$

ดังนั้น $$\tan m = \cos\frac{1}{2}A \tan c \qquad \text{..........(3)}$$

สูตรตรวจสอบ

ให้ $\frac{1}{2}a$ เป็นส่วนกลาง, $90° - B$ กับ m เป็นส่วนประชิด

$$\sin\frac{1}{2}a = \tan(90° - B)\tan m$$

ดังนั้น $$\sin\frac{1}{2}a = \cot B \tan m \qquad \text{..........(4)}$$

หา B :

จาก (1) ได้

$$\begin{aligned}
\cot B &= \cos c \tan\frac{1}{2}A \\
&= (\cos 54°\ 28'\ 24'')(\tan 56°\ 18'\ 6'') \\
&= (0.58109)(1.4995) \\
&= 0.87134
\end{aligned}$$

$$B = \cot^{-1}(0.87134)$$
$$= 48^\circ\ 55'\ 58''$$

หา $\frac{1}{2}a$:

จาก (2) ได้

$$\sin\frac{1}{2}a = \sin c \sin\frac{1}{2}A$$
$$= (\sin 54^\circ\ 28'\ 24'')(\sin 56^\circ\ 18'\ 6'')$$
$$= (0.81385)(0.83197)$$
$$= (0.67710)$$
$$\frac{1}{2}a = \sin^{-1}(0.67710)$$
$$= 42^\circ\ 37'\ 3''$$

(เพราะว่า $\frac{1}{2}A < 90^\circ$ ดังนั้น จึงใช้ $\frac{1}{2}a < 90^\circ$ ด้วย)

หา m :

จาก (3) ได้

$$\tan m = \cos\frac{1}{2}A \tan c$$
$$= (\cos 56^\circ\ 18'\ 6'')(\tan 54^\circ\ 28'\ 24'')$$
$$= (0.55482)(1.4008)$$
$$= 0.77719$$
$$m = \tan^{-1}(0.77719)$$
$$= 37^\circ\ 51'\ 14''$$

ตรวจสอบ

จาก (4) ได้ว่า

$$\sin\frac{1}{2}a = \sin 42^\circ\ 37'\ 3''$$
$$= 0.67710$$

และ
$$\cot B \tan m = (\cot 48^\circ\ 55'\ 58'')(\tan 37^\circ\ 51'\ 14'')$$
$$= (0.87134)(0.77719)$$
$$= 0.67719$$

ดังนั้น จึงได้ว่า ส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมหน้าจั่ว ABC ที่ต้องการ คือ

$B = C = 48^\circ\ 55'\ 58''$ และ $a = 85^\circ\ 14'\ 6''$

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่มี $C = 90°$ และกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังนี้

   1.1) $a = 10° 32'$, $B = 12° 3'$

   1.2) $c = 46° 40'$, $B = 20° 50'$

   1.3) $a = 118° 54'$, $B = 12° 19'$

   1.4) $a = 43° 27'$, $c = 60° 24'$

   1.5) $b = 48° 36'$, $c = 69° 42'$

   1.6) $a = 168° 13' 45''$, $c = 150° 9' 20''$

   1.7) $c = 112° 48'$, $B = 56° 11' 56''$

   1.8) $c = 32° 34'$, $A = 44° 44'$

   1.9) $A = 116° 31' 25''$, $B = 116° 43' 12''$

   1.10) $A = 54° 54' 42''$, $c = 69° 25' 11''$

   1.11) $c = 55° 9' 32''$, $a = 22° 15' 7''$

   1.12) $a = 36° 27'$, $b = 43° 32' 31''$

   1.13) $a = 29° 46' 8''$, $B = 137° 24' 21''$

   1.14) $a = 144° 27' 3''$, $b = 32° 8' 56''$

   1.15) $b = 36° 27'$, $a = 43° 32' 31''$

   1.16) $A = 63° 15' 12''$, $B = 135° 33' 39''$

   1.17) $A = 67° 54' 47''$, $B = 99° 57' 35''$

   1.18) $b = 22° 15' 7''$, $c = 55° 9' 32''$

   1.19) $a = 118° 30' 10''$, $B = 95° 36'$

   1.20) $b = 92° 47' 32''$, $A = 50° 2' 1''$

   1.21) $a = 46° 12' 18''$, $c = 75° 48' 36''$

   1.22) $a = 109° 15' 48''$, $B = 38° 45' 24''$

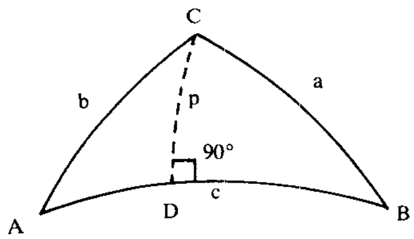
2. จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมหน้าจั่ว ABC ซึ่งมีส่วนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   2.1) $a = b = 78° 23' 30''$, $C = 118° 54' 36''$

   2.2) $b = c = 70° 59' 12''$, $A = 150° 34'$

   2.3) $a = b = 112° 32' 20''$ $c = 46° 15' 12''$

3. ให้สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ดังรูป 3.5.12 และให้ p เป็นส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ที่ตั้งฉากกับด้าน c ที่จุด D



รูป 3.5.12

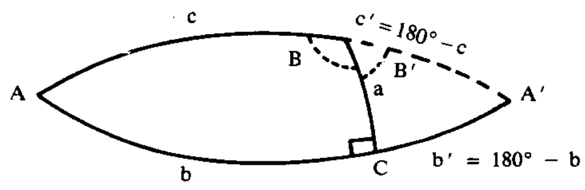
จงเขียน B ให้อยู่ในรูปของ A, a และ b

4. ถ้าสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ในโจทย์ข้อ 3 มี $A = 40° 10'$, $a = 46° 20'$ และ $b = 64° 50'$ แล้วจงหา B

3.6 **กรณีกำกวมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก** (The ambiguous case of right spherical triangles)

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก เมื่อกำหนดด้าน ๆ หนึ่ง และมุมตรงข้ามด้านนั้นมาให้ คำตอบที่หาได้อาจมี 2 ชุด ในกรณีเช่นนี้ แต่ละส่วนที่ไม่ทราบค่าหาได้จากค่าไซน์ (sine) ดังนั้นจึงอาจเลือกคำตอบให้อยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง หรือจตุตถภาคที่สองก็ได้ นั่นคือคำตอบที่ได้เป็นค่าของแต่ละมุมที่ไม่ทราบค่าและมุมประกอบสองมุมฉากของแต่ละมุม

ถ้า A และ a เป็นส่วนที่กำหนดให้ และ C เป็นมุมฉาก สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากจะเกิดเป็นเสี้ยว (lune) ดังรูป 3.6.1



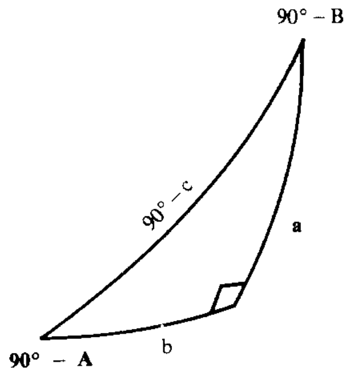
รูป 3.6.1

ในรูป 3.6.1, $B' = 180° - B$, $c' = 180° - c$ และ $b' = 180° - b$ วิธีการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากลักษณะนี้ มีวิธีการแก้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

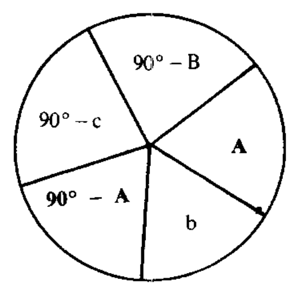
ตัวอย่าง 3.6.1 จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ซึ่งกำหนดให้ $a = 46° 45'$ และ $A = 59° 12'$

วิธีทำ

สร้างโครงแบบสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ดังรูป 3.6.2 และส่วนวงกลมห้าส่วน ดังรูป 3.6.3



รูป 3.6.2



รูป 3.6.3

ใช้กฎของเนเปียร์ จะได้สูตรในการคำนวณดังนี้

หา c

ให้ a เป็นส่วนกลาง, $90° - A$ กับ $90° - c$ เป็นส่วนตรงข้าม

$$\sin a = \cos(90° - A)\cos(90° - c)$$

$$= \sin A \sin c$$

ดังนั้น $$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A} \qquad \text{..........(1)}$$

หา B

ให้ $90° - A$ เป็นส่วนกลาง $90° - B$ กับ a เป็นส่วนตรงข้าม

$$\sin(90° - A) = \cos(90° - B)\cos a$$

$$\cos A = \sin B \cos a$$

ดังนั้น $$\sin B = \frac{\cos A}{\cos a} \qquad \text{..........(2)}$$

หา b :

ให้ b เป็นส่วนกลาง, $90° - A$ และ a เป็นส่วนประชิด

$$\therefore \quad \sin b = \tan(90° - A)\tan a$$

$$= \cot A \tan a$$

ดังนั้น $\sin b = \tan a \cot A$ ....(3)

สูตรสำหรับตรวจสอบ

ให้ b เป็นส่วนกลาง, $90° - c$ กับ $90° - B$ เป็นส่วนตรงข้าม

$$\therefore \quad \sin b = \cos(90° - c)\cos(90° - B)$$

ดังนั้น $\sin b = \sin c \sin B$ ....(4)

หา c :

จาก (1) ได้ว่า

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin 46° 45'}{\sin 59° 12'}$$

$$= \frac{0.72837}{0.85896}$$

$$= 0.84797$$

$$c = \sin^{-1}(0.84797)$$

$= 57° 59' 30''$ **หรือ** $122° 0' 30''$

ดังนั้น ค่า c มีได้ 2 ค่า คือ $c_1 = 57° 59' 30''$ และ $c_2 = 122° 0' 30''$

หา B :

จาก (2) ได้ว่า

$$\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$$

$$= \frac{\cos 59° 12'}{\cos 46° 45'}$$

$$= \frac{0.51204}{0.68518}$$

$$= 0.74731$$

$$\therefore \quad B = \sin^{-1}(0.74731)$$
$$= 48^\circ\ 21'\ 27'' \quad \text{หรือ} \quad 131^\circ\ 38'\ 33''$$

ดังนั้น ค่า B มี 2 ค่า คือ $B_1 = 48^\circ\ 21'\ 27''$ และ $B_2 = 131^\circ\ 38'\ 33''$

หา b :

จาก (3) ได้ว่า

$$\sin b = \tan a \cot A$$
$$= (\tan 46^\circ\ 45')(\cot 59^\circ\ 12')$$
$$= (1.0630)(0.59612)$$
$$= 0.63368$$
$$\therefore \quad b = \sin^{-1}(0.63368)$$
$$= 39^\circ\ 19'\ 19'' \quad \text{หรือ} \quad 140^\circ\ 40'\ 41''$$

ดังนั้น ค่า b มี 2 ค่า คือ $b_1 = 39^\circ\ 19'\ 19''$ และ $b_2 = 140^\circ\ 40'\ 41''$

ข้อสังเกต

c มี 2 ค่า คือ $c_1 = 57^\circ\ 59'\ 30''$ และ $c_2 = 122^\circ\ 0'\ 30''$

B มี 2 ค่า คือ $B_1 = 48^\circ\ 21'\ 27''$ และ $B_2 = 131^\circ\ 38'\ 33''$

และ b มี 2 ค่า คือ $b_1 = 39^\circ\ 19'\ 19''$ และ $b_2 = 140^\circ\ 40'\ 41''$

ทั้งนี้ เพราะค่า c, B และ b ต่างก็หามาจากค่าไซน์ (sine) คำตอบทั้งหกค่า คือ c_1, c_2, B_1, B_2, b_1 และ b_2 สามารถแยกได้โดยอาศัยกฎจตุตถภาค คือ เมื่อกำหนดด้าน c เป็น c_1 และ c_2 แล้ว

เนื่องจาก c_1 และ a อยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง b_1 จึงอยู่จตุตถภาคที่หนึ่ง ทำให้ได้ว่า B_1 ต้องอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่งด้วย

และเนื่องจาก c_2 อยู่ในจตุตถภาคที่สอง แต่ a อยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง b_2 จึงอยู่ในจตุตถภาคที่สอง ทำให้ได้ว่า B_2 อยู่ในจตุตถภาคที่สองด้วย

นั่นคือ

เนื่องจาก $a < 90^\circ$, $c_1 < 90^\circ$ แล้ว $b_1, B_1 < 90^\circ$ และ $c_2 > 90^\circ$ แล้ว $b_2, B_2 > 90^\circ$ ด้วย

ดังนั้น จึงได้ว่า ส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่ต้องการคือ $c_1 = 57^\circ\ 59'\ 30''$, $B_1 = 48^\circ\ 21'\ 27''$ และ $b_1 = 39^\circ\ 19'\ 19''$ กับ $c_2 = 122^\circ\ 0'\ 30''$, $B_2 = 131^\circ\ 38'\ 33''$ และ $b_2 = 140^\circ\ 40'\ 41''$

ตรวจสอบ

จาก (4) ได้ว่า

$$\sin b_1 = \sin c_1 \sin B_1$$

$$\sin b_1 = \sin 39° \ 19' \ 19''$$

$$= 0.63368$$

$$\sin c_1 \sin B_1 = (\sin 57° \ 59' \ 30'')(\sin 48° \ 21' \ 27'')$$

$$= (0.84797)(0.74731)$$

$$= 0.63369$$

และ

$$\sin b_2 = \sin c_2 \sin B_2$$

$$\sin b_2 = \sin 140° \ 40' \ 41''$$

$$= \sin 39° \ 19' \ 19''$$

$$= 0.63368$$

$$\sin c_2 \sin B_2 = (\sin 122° \ 0' \ 30'')(\sin 131° \ 38' \ 33'')$$

$$= (\sin 57° \ 59' \ 30'')(\sin 48° \ 21' \ 27'')$$

$$= (0.84797)(0.74731)$$

$$= 0.63369$$

หมายเหตุ การแก้ปัญหาดังกล่าว ถ้าแก้ปัญหาโดยใช้ตารางลอกการิธึมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ดังนี้

คำนวณหาค่า c, B และ b เขียนแสดงได้ดังนี้

	(c)	(B)	(b)
$a = 46° \ 45'$	$\ell \sin a = 9.86235$	$\ell \sec a = 0.16419$	$\ell \tan a = 0.02655$
$A = 59° \ 12'$	$\ell \operatorname{cosec} A = 0.06603$	$\ell \cos A = 9.70931$	$\ell \cot A = 9.77533$
$c_1 = 57° \ 59' \ 30''$	$\ell \sin c = 9.92838$		
$c_2 = 122° \ 0' \ 30''$			
$B_1 = 48° \ 21' \ 27''$		$\ell \sin B = 9.87350$	
$B_2 = 131° \ 38' \ 33''$			
$b_1 = 39° \ 19' \ 24''$			$\ell \sin b = 9.80188$
$b_2 = 140° \ 40' \ 36''$			

ข้อสังเกต c มีได้ 2 ค่า คือ c_1 กับ c_2, B มีได้ 2 ค่า คือ B_1 กับ B_2 และ b ก็มีได้ 2 ค่า คือ b_1 กับ b_2 ทั้งนี้เพราะ c, B และ b หามาจากค่าไซน์ (sine) ของมัน

ตรวจสอบ

ใช้สมการ (4), $\sin b = \sin c \sin B$

ในที่นี้ $l \sin b = 9.80188$

และ $l \sin c + l \sin B = 9.92838 + 9.87350$

$= 9.80188$

คำตอบทั้งหก คือ c_1, c_2, B_1, B_2, b_1 และ b_2 สามารถแยกกลุ่มได้โดยอาศัยกฎของจตุตถภาค คือ เมื่อกำหนดด้าน c เป็น c_1 และ c_2 แล้ว เนื่องจาก c_1 และ a อยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง b_1 จึงอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง ทำให้ได้ว่า B_1 อยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่งด้วย และเนื่องจาก c_2 อยู่ในจตุตถภาคที่สอง แต่ a อยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง b_2 จึงอยู่ในจตุตถภาคที่สอง ทำให้ได้ว่า B_2 อยู่ในจตุตถภาคที่สองด้วย

นั่นคือ

เนื่องจาก $a < 90°$, $c_1 < 90°$ และ $b_1, B_1 < 90°$

$c_2 > 90°$ และ $b_2, B_2 > 90°$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า ส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่ต้องการ คือ $c_1 = 57° 59' 30''$, $B_1 = 48° 21' 27''$, $b_1 = 39° 19' 24''$ และ $c_2 = 122° 0' 30''$, $B_2 = 131° 38' 33''$, $b_2 = 140° 40' 36''$

ข้อสังเกต ผลลัพธ์ของการแก้ปัญหาทั้ง 2 วิธี จะมีค่าคลาดเคลื่อนอยู่เล็กน้อย

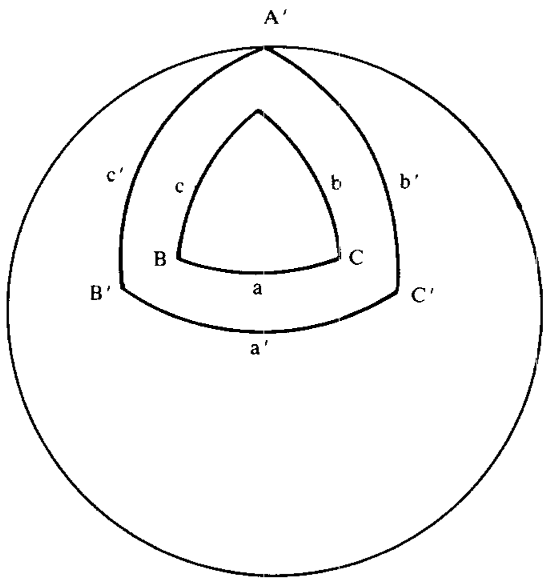
แบบฝึกหัด 3.6

จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ซึ่งมีมุมฉากที่ C และมีส่วนที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

1. $b = 138° 46' 24''$, $B = 125° 10' 36''$
2. $a = 46° 46' 24''$, $A = 57° 28' 18''$
3. $b = 162° 53' 24''$, $B = 138° 14' 54''$
4. $b = 35° 44'$, $B = 37° 28'$
5. $b = 129° 33'$, $B = 104° 59'$
6. $b = 21° 39'$, $B = 42° 10' 10''$
7. $a = 77° 21' 50''$, $A = 83° 56' 40''$
8. $a = 160°$, $A = 150°$
9. $b = 42° 18' 45''$, $B = 46° 15' 25''$

3.7 สามเหลี่ยมเชิงขั้ว (polar triangles)

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งมี A, B, C เป็นจุดยอด ถ้าจุดยอดเหล่านี้เป็นจุดขั้วของด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม A′B′C′ ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งแล้ว จะเรียก A′B′C′ ว่าเป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของ ABC ดังรูป 3.7.1



รูป 3.7.1

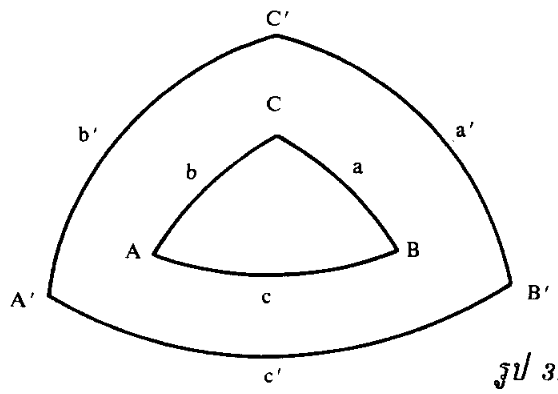
จากรูป 3.7.1 ให้ ABC กับ A′B′C′ เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมสองรูป ถ้า A เป็นจุดขั้วของด้าน B′C′, B เป็นจุดขั้วของด้าน A′C′ และ C เป็นจุดขั้วของด้าน A′B′ แล้ว เรียกสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม A′B′C′ ว่าเป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยม ABC และมักเขียนแทนด้านของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว A′B′C′ ด้วย a′, b′, c′ ดังรูป 3.7.1 และรูป 3.7.2

ทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวกับสามเหลี่ยมเชิงขั้วมีดังนี้

ทฤษฎีบท 3.7.1 ถ้า A′B′C′ เป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC แล้ว ABC ย่อมเป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม A′B′C′

พิสูจน์

ให้ A′B′C′ เป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ดังรูป 3.7.2



รูป 3.7.2

เพราะว่า B เป็นจุดขั้วของด้าน A′C′ และ C เป็นจุดขั้วของด้าน A′B′ ดังนั้น จุด A′ อยู่ห่างจากจุด B และ C เป็นระยะจตุตถภาค (90°) จึงได้ว่า A′ เป็นจุดขั้วของส่วนโค้ง BC

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า จุด B′ เป็นจุดขั้วของส่วนโค้ง AC และจุด C′ เป็นจุดขั้วของส่วนโค้ง AB

นั่นคือ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยม A′B′C′

ทฤษฎีบท 3.7.2 ในสามเหลี่ยมเชิงขั้วสองรูป มุมแต่ละมุมของรูปหนึ่ง เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของด้านตรงข้ามมุมของอีกรูปหนึ่ง

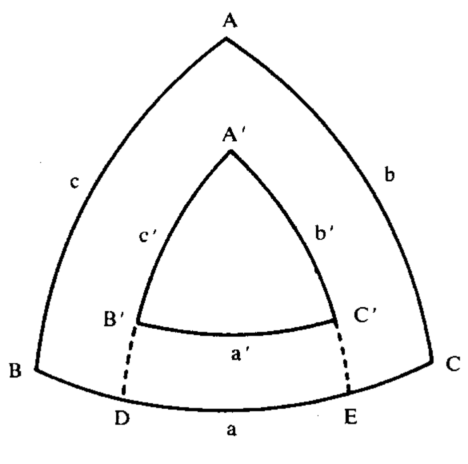
นั่นคือ $A = 180° - a'$, $A' = 180° - a$

$B = 180° - b'$, $B' = 180° - b$

$C = 180° - c'$, $C' = 180° - c$

พิสูจน์

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงขั้ว ABC และ A′B′C′ ดังรูป 3.7.3



รูป 3.7.3

จะพิสูจน์ว่า $A' = 180^\circ - a$

ต่อส่วนโค้ง $A'B'$ และ $A'C'$ ไปตัด BC ที่จุด D และ E ตามลำดับ แล้วส่วนโค้ง DE ถูกวัดขนาดด้วยมุม A'

ในที่นี้ $BE + DC = BC + DE = a + A'$

และเพราะว่า B เป็นจุดขั้วของ $A'E$ และ C เป็นจุดขั้วของ $A'D$

ดังนั้น $BE = DC = 90^\circ$

จึงได้ $a + A' = 180^\circ$

นั่นคือ $A' = 180^\circ - a$

จึงกล่าวได้ว่า มุม A' เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของด้าน a

สำหรับในกรณีอื่น ๆ ก็พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.7.1 จงหาส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่ง $A = 156^\circ 56'$, $B = 83^\circ 11'$, $C = 90^\circ$; $a = 157^\circ 55'$, $b = 72^\circ 22'$ และ $c = 106^\circ 18'$

วิธีทำ

จากทฤษฎีบท 3.7.2 ได้ว่า

1) A’= 180° – a

= 180° 157” 55’

A ’ = 22” 5’

2) B′ = 180° – b

= 180” – 72” 22’

∴ B′ = 107” 38’

3) C′ = 180° – c

= 180” – 106” 18’

∴ C′ = 73” 42’

4) a′ = 180° – A

= 180” – 156” 56’

∴ a′ = 23° 4′

5) $b' = 180° - B$

$= 180" - 83" \ 11'$

$\therefore b' = 96° \ 49'$

6) $c' = 180° - C$

$= 180" - 90"$

$\therefore c' = 90"$

ดังนั้น จึงได้ว่า $A' = 22° \ 5'$, $B' = 107° \ 38'$, $C' = 73" \ 42'$, $a' = 23° \ 4'$, $b' = 96° \ 49'$, $c' = 90"$

แบบฝึกหัด 3.7

1. จงหาส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว A′B′C′ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งมีส่วนที่กำหนดให้ดังนี้

   1.1) A = 44° 59′, B = 112° 47′, C = 85° 7′;

   a = 43” 17′, b = 116” 36′, c = 105” 15’

   1.2) A = 67°, 19′, B = 48” 29′, C = 77” 17’;

   a = 43” 18′, b = 33” 49′, c = 46” 28’

   1.3) A = 122° 7′, B = 32” 24′, C = 41” 36’;

   a = 73” 44′, b = 37° 25′, c = 48” 48’

   1.4) A = 135” 59.1 ′, B = 100” 10.1′, C = 98” 43.3’;

   a = 135” 20′, b = 98” 31.5′, c = 90”

   1.5) a = 54” 16′, b = 114” 47′, c = 90”;

   A = 49” 57.9′, B = 121” 5.5′, C = 70° 35.9’

   1.6) a = 116” 35.6′, b = 105° 14.8′, c = 43” 17.2’;

   A = 112” 47.4’. B = 84” 6.7′, C = 44” 59.1’

   1.7) a = 136” 19’ 36″, b = 43” 18’ 30″, c = 114” 43’ 18”;

   A = 132” 15’ 18″, B = 47” 19’ 30″, C = 76” 48’ 24”

2. จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสาม คือ A, B และ C ตามลำดับดังนี้

   2.1) 60°, 70°, 90”

   2.2) 60°, 115°, 145”

   2.3) 60°, 20°, 90”

   2.4) 30°, 37°, 128”

3. จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดด้าน a, b และ c ตามลำดับดังนี้

   3.1) 160°, 110°, 85”

   3.2) 170°, 150°, 10”

   3.3) 170°, 150°, 50”

   3.4) 30°, 50°, 70”

4. จงพิสูจน์ว่า ผลรวมของมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมย่อมมากกว่า 180° และน้อยกว่า 540°

5. จงพิสูจน์ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ใด ๆ $A + B < 180^\circ + C$

6. สำหรับสูตรแต่ละสูตรของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ต่อไปนี้ จงเขียนสูตรใหม่ให้เกี่ยวข้องกับสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$

6.1) $\sin a = \sin c \sin A$

6.2) $\tan b = \tan c \cos A$

6.3) $\tan a = \sin b \tan A$

6.4) $\cos c = \cos b \cos a$

6.5) $\sin b = \sin c \sin B$

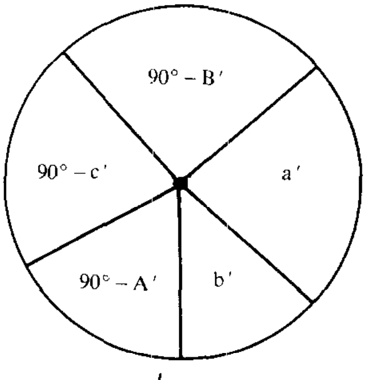
6.6) $\cos a = \cos b \cos a + \sin b \sin c \cos A$

3.8 สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก (Quadrantal triangles)

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีด้าน ๆ หนึ่งยาวเท่ากับ 90° เราเรียกว่า **สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก** จะเห็นได้โดยง่ายว่า สามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉากก็คือสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ดังนั้นจึงสามารถแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงขั้วได้ โดยใช้สูตรพื้นฐานที่ใช้แก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากทั้งสิบสูตร และส่วนที่ต้องการหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก หาได้จากความสัมพันธ์ ตามทฤษฎีบท 3.7.2

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC ที่มีด้าน c ยาวเท่ากับ 90° จะได้สูตรพื้นฐานสิบสูตร สำหรับแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ซึ่งได้มาจากสูตรพื้นฐานทั้งสิบสูตรของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ในหัวข้อ 3.2 ดังนี้

กำหนดให้ $A'B'C'$ เป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC ดังนั้น $A'B'C'$ จึงเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก และจะเขียนส่วนวงกลมห้าส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก $A'B'C'$ ได้ดังรูป 3.8.1



รูป 3.8.1

โดยกฎของเนเปียร์ จะได้สูตรพื้นฐานทั้งสิบสูตร สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก $A'B'C'$ ดังนี้

(1) $\sin a' = \sin A' \sin c'$

(2) $\tan a' = \tan A' \sin b'$

(3) $\tan a' = \cos B' \tan c'$

(4) $\sin b' = \sin B' \sin c'$

(5) $\tan b' = \tan B' \sin a'$

(6) $\tan b' = \cos A' \tan c'$

(7) $\cos c' = \cos b' \cos a'$

(8) $\cos c' = \cot A' \cot B'$

(9) $\cos A' = \sin B' \cos a'$

(10) $\cos B' = \sin A' \cos b'$

และโดย ทฤษฎีบท 3.7.2 ได้ความสัมพันธ์ว่า

$$A' = 180° - a, \quad B' = 180° - b, \quad C' = 180° - c$$

$$a' = 180° - A, \quad b' = 180° - B, \quad c' = 180° - C$$

เมื่อแทนค่า A', B', a', b' และ c' ลงในสูตรที่ (1) ถึงสูตรที่ (10) ข้างต้น จะได้สูตรทั้งสิบสำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC ที่มี $c = 90°$ ตามลำดับดังนี้

1. จาก $\sin a' = \sin A' \sin c'$

ได้ว่า $\sin(180° - A) = \sin(180° - a)\sin(180° - C)$

ดังนั้น $\sin A = \sin a \sin C$ สูตร (11)

2. จาก $\tan a' = \tan A' \sin b'$

ได้ว่า $\tan(180° - A) = \tan(180° - a)\sin(180° - B)$

$-\tan A = -\tan a \sin B$

ดังนั้น $\tan A = \tan a \sin B$ ....สูตร (12)

3. จาก $\tan a' = \cos B' \tan c'$

ได้ว่า $\tan(180° - A) = \cos(180° - b)\tan(180° - C)$

$-\tan A = (-\cos b)(-\tan C)$

ดังนั้น $\tan A = -\cos b \tan C$ ....สูตร (13)

4. จาก $\sin b' = \sin B' \sin c'$

ได้ว่า $\sin(180° - B) = \sin(180° - b)\sin(180° - C)$

ดังนั้น $\sin B = \sin b \sin C$ ....สูตร (14)

5. จาก $\tan b' = \tan B' \sin a'$

K-h $\tan(180° - B) = \tan(180° - b)\sin(180° - A)$

หรือ $-\tan B = -\tan b \sin A$

ดังนั้น $\tan B = \tan b \sin A$ ....สูตร (15)

6. จาก $\tan b' = \cos A' \tan c'$

ได้ว่า $\tan(180° - B) = \cos(180° - a)\tan(180° - C)$

หรือ $-\tan B = (-\cos a)(-\tan C)$

ดังนั้น $\tan B = -\cos a \tan C$ ....สูตร (16)

7. จาก $\cos c' = \cos b' \cos a'$

ได้ว่า $\cos(180° - C) = \cos(180° - B)\cos(180° - A)$

หรือ $-\cos C = (-\cos B)(-\cos A)$

ดังนั้น $\cos c = \cos B \cos A$ ....สูตร (17)

8. จาก $\cos c' = \cot A' \cot B'$

ได้ว่า $\cos(180° - C) = \cot(180° - a)\cot(180° - b)$

หรือ $-\cos C = (-\cot a)(-\cot b)$

ดังนั้น $\cos c = -\cot a \cot b$ ....สูตร (18)

9. จาก $\cos A' = \sin B' \cos a'$

ได้ว่า $\cos(180° - a) = \sin(180° - b)\cos(180° - A)$

หรือ $-\cos a = (\sin b)(-\cos A)$

ดังนั้น $\cos a = \sin b \cos A$ ....สูตร (19)

10. จาก $\cos B' = \sin A' \cos b'$

ได้ว่า $\cos(180° - b) = \sin(180° - a)\cos(180° - B)$

หรือ $-\cos b = (\sin a)(-\cos B)$

ดังนั้น $\cos b = \sin a \cos B$ ....สูตร (20)

กฎจตุตถภาคของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC ซึ่งมี $c = 90°$ จะได้ว่า

กฎที่ 1 ด้าน a และมุม A (ด้าน b และมุม B) ย่อมอยู่ในจตุตถภาค (quadrant) เดียวกัน

พิสูจน์

จากสูตรที่ (19) สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC ได้ว่า

$$\cos a = \cos A \sin b$$

เพราะว่า $b < 180°$, $\sin b$ จึงมีค่าเป็นบวกทุกกรณี

จึงได้ว่า $\cos a$ และ $\cos A$ เป็นบวกทั้งคู่ (นั่นคือ $a < 90°$ และ $A < 90°$)

หรือ $\cos a$ และ $\cos A$ ต้องเป็นลบทั้งคู่ (นั่นคือ $a > 90°$ และ $A > 90°$)

ดังนั้น ด้าน a และมุม A ย่อมอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน

ในทำนองเดียวกัน จากสูตร (20)

$\cos b = \sin a \cos B$

ก็สามารถแสดงได้ว่า ด้าน b และมุม B ก็อยู่ในจตุตถภาคเดียวกันด้วย

กฎที่ 2 ถ้า $C < 90°$ แล้ว มุม A และมุม B ย่อมอยู่ต่างจตุตถภาคกัน และถ้า $C > 90°$ แล้วมุม A และมุม B ย่อมอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน

พิสูจน์

จากสูตร (17) สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC ได้ว่า

$\cos C = -\cos B \cos A$

ถ้า $C < 90°$ ได้ว่า $\cos C$ มีเครื่องหมายเป็นบวก

ดังนั้น $\cos B$ และ $\cos A$ ต้องมีเครื่องหมายตรงกันข้าม (คือ $\cos B$ เป็นบวก และ $\cos A$ เป็นลบ หรือ $\cos B$ เป็นลบ และ $\cos A$ เป็นบวก)

นั่นคือ A และ B อยู่ต่างจตุตถภาคกัน

ถ้า $C > 90°$ ได้ว่า $\cos C$ มีเครื่องหมายเป็นลบ

ดังนั้น ทั้ง $\cos B$ และ $\cos A$ ย่อมมีเครื่องหมายเหมือนกัน (คือเป็นบวกทั้งคู่ หรือเป็นลบทั้งคู่)

นั่นคือ A และ B อยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน

ข้อสังเกต

จากกฎที่ 2 อาจกล่าวได้ว่า สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ถ้าสองในสามส่วนของ A, B และ C อยู่ในจตุตถภาคเดียวกันแล้ว ส่วนที่สามย่อมอยู่ในจตุตถภาคที่สอง ถ้าสองในสามส่วน A, B และ C อยู่ต่างจตุตถภาคกันแล้วส่วนที่สามย่อมอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง

ตัวอย่าง 3.8.1 ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉากรูปหนึ่ง ซึ่งมี $c = 90°$, $A = 115° 38'$ และ $b = 139° 58'$

1) จงหาส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$

2) จงหาส่วนที่ขาดของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC จากสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$

วิธีทำ

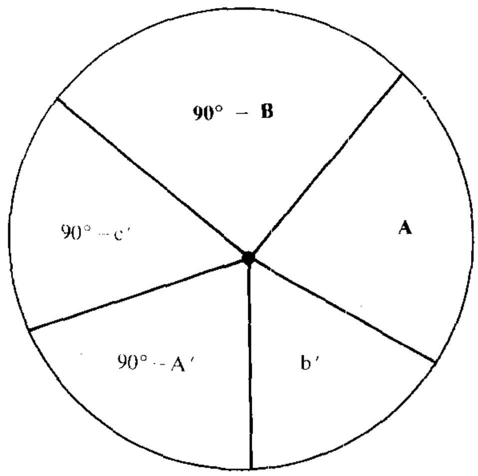
1) จากโจทย์ และ ทฤษฎีบท 3.7.2 จะได้ส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ดังนี้ คือ

$$C' = 180° - c = 180° - 90° = 90°$$

$$a' = 180° - A = 180° - 115° 38' = 64° 22'$$

$$B' = 180° - b = 180° - 139° 58' = 40° 2'$$

ต่อไปจะคำนวณหาค่า c', b' และ A' ของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ เนื่องจากสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก จึงได้สูตรที่ใช้คำนวณและตรวจสอบดังนี้



รูป 3.8.2

หา c'

ให้ $90° - B'$ เป็นส่วนกลาง, $90° - c'$ กับ a' เป็นส่วนประชิด

$$\sin(90° - B') = \tan(90° - c')\tan a'$$

หรือ $$\cos B' = \cot c' \tan a'$$

ดังนั้น $$\cot c' = \cot a' \cos B' \qquad \text{..........(1)}$$

หา b'

ให้ a' เป็นส่วนกลาง, $90° - B'$ กับ b' เป็นส่วนประชิด

$$\sin a' = \tan(90° - B')\tan b'$$

$$= \cot B' \tan b'$$

ดังนั้น $$\tan b' = \sin a' \tan B' \qquad \text{..........(2)}$$

หา A'

ให้ $90° - A'$ เป็นส่วนกลาง, $90° - B'$ กับ a' เป็นส่วนตรงข้าม

$$\sin(90° - A') = \cos(90° - B')\cos a'$$

ดังนั้น $$\cos A' = \sin B' \cos a' \qquad \text{..........(3)}$$

สูตรตรวจสอบ

ให้ $90° - A'$ เป็นส่วนกลาง, $90° - c'$ กับ b' เป็นส่วนประชิด

$$\sin (90" - A') = \tan (90° - c') \tan b'$$

ดังนั้น

$$\cos A' = \cot c' \tan b' \qquad \dots\dots\dots\dots (4)$$

หา c' :

จาก (I,) ได้ว่า

$$\cot c' = \cot a' \cos B'$$

$$= (\cot 64" 22')(\cos 40" 2')$$

$$= (0.47984)(0.76567)$$

$$= 0.36740$$

$$c' = \cot\text{-}' (0.36740)$$

$$= 69" \ 49' \ 37"$$

หา b' :

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan b' = \sin a' \tan B'$$

$$= (\sin 64" 22')(\tan 40" 2')$$

$$= (0.90158)(0.84009)$$

$$= 0.75740$$

$$b' = \tan\text{-}' (0.75740)$$

$$= 37" \ 8' \ 25"$$

หา A' :

จาก (3) ได้ว่า

$$\cos A' = \sin B' \cos a'$$

$$= (\sin 40" 2')(\cos 64" 22')$$

$$= (0.64323)(0.43261)$$

$$= 0.21827$$

$$A' = \cos^{-1} (0.27827)$$

$$= 73" \ 50' \ 34"$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

c′ = 69” 49’ 37″, b’ = 37” 8’ 25” และ A’ = 73” 50’ 34”

ตรวจสอบ

จาก (4) ได้ว่า

$$\cos A' = \cot c' \tan b'$$

cos A’ = cos 73” 51 34”

= 0.27827

cot c’ tan b’ = (cot 69° 49’ 37″)(tan 37” 8’ 25”)

= (0.36740)(0.75740)

= 0.27827

จึงได้ว่า ส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว A’B’C’ ที่ขาดไปคือ c’ = 69” 49’ 37″, b’ = 37” 8’ 25” และ A’ = 73” 50’ 34”

2) โดย ทฤษฎีบท 3.7.2 จึงได้ส่วนที่ขาดของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC คือ

$$C = 180^\circ - c' = 180^\circ - 69^\circ 49' 37'' = 110^\circ 10' 23''$$

$$B = 180^\circ - b' = 180^\circ - 37^\circ 8' 25'' = 142^\circ 51' 35''$$

$$a = 180^\circ - A' = 180^\circ - 73^\circ 50' 34'' = 106^\circ 9' 26''$$

ข้อสังเกต การแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก นอกจากจะแก้โดยอาศัยสามเหลี่ยมเชิงขั้ว ดังในตัวอย่าง 3.8.1 แล้ว ก็ยังสามารถแก้ปัญหาโดยตรงได้โดยการใช้สูตรพื้นฐานทั้งสิบ คือ สูตรที่ (11) ถึงสูตรที่ (20) ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก

แบบฝึกหัด 3.8

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC ซึ่งมี c = PO” ต่อไปนี้

1. a = 115” 24’ 36″, b = 60” 18’ 24”
2. B = 69” 45′, A = 94” 40’
3. B = 117” 54’ 30″, a = 95° 42’ 20″
4. A = 153” 16′, b = 19” 3’
5. b = 159° 33’ 40″, a = 95° 18’ 20″