บทที่ 1
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตสามมิติ

1.0 บทนำ

ในการศึกษาวิชาตรีโกณมิติเชิงทรงกลมนั้น จะต้องอาศัยความรู้พื้นฐานบางอย่างเกี่ยวกับเรขาคณิตสามมิติ ดังนั้น ก่อนที่จะศึกษาวิชาตรีโกณมิติเชิงทรงกลม จึงจะทบทวนความรู้เบื้องต้นที่จำเป็นบางอย่างเกี่ยวกับเรขาคณิตสามมิติ ซึ่งจะนำมาใช้เป็นความรู้พื้นฐานในการศึกษาวิชาตรีโกณมิติเชิงทรงกลมต่อไป

1.1 เส้นและระนาบ

ในวิชาเรขาคณิตเชิงระนาบ ได้กำหนดบทนิยามเกี่ยวกับจุด เส้น พื้นผิว และทรงสามมิติไว้ดังนี้

(i) **จุด** (point) เป็นสิ่งที่ไม่มีขนาด มีแต่เพียงตำแหน่งเท่านั้น จึงอาจกล่าวได้ว่า จุดเป็นสิ่งที่ไม่มีความกว้าง ไม่มีความยาว และไม่มีความหนา จึงได้ว่า จุดไม่มีมิติ (no dimension)

(ii) **เส้น** (line) เป็นสิ่งที่เกิดจากทางเดินของจุดที่เคลื่อนที่ไป จึงอาจกล่าวได้ว่า เส้นไม่มีความกว้าง ไม่มีความหนา มีเฉพาะความยาวเท่านั้น จึงได้ว่า เส้นมีเพียง 1 มิติ (one dimension)-และเมื่อเส้นตัดกัน จะเกิดเป็นจุด

(iii) **พื้นผิว** (surface) เป็นสิ่งที่เกิดจากการล้อมรอบด้วยเส้น จึงอาจกล่าวได้ว่า พื้นผิวเป็นสิ่งที่มีความกว้างและความยาว แต่ไม่มีความหนา จึงได้ว่า พื้นผิวมี 2 มิติ (two dimensions) และเมื่อพื้นผิวตัดกันจะเกิดเป็นเส้น

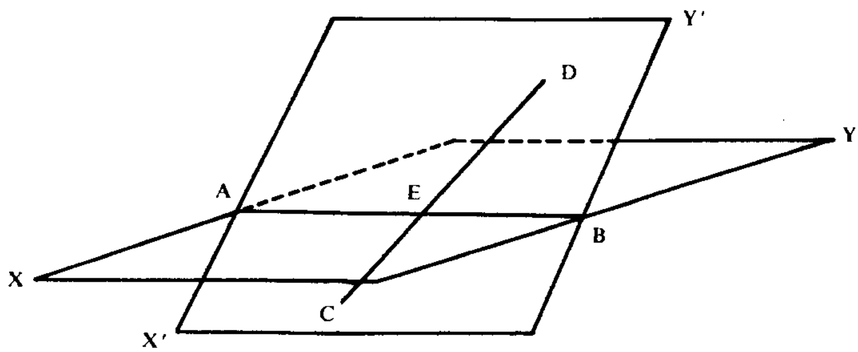
(iv) **ทรงสามมิติ** (solid) เป็นสิ่งที่เกิดจากการล้อมรอบด้วยพื้นผิว จึงอาจกล่าวได้ว่า ทรงสามมิติเป็นสิ่งที่มีทั้งความกว้าง ความยาว และความหนา จึงได้ว่า ทรงสามมิติมี 3 มิติ (three dimensions)

ระนาบ (plane) คือ พื้นผิวราบ ซึ่งถ้าลากเส้นเชื่อมจุด 2 จุดใด ๆ ซึ่งอยู่บนพื้นผิวแล้ว เส้นตรงที่เชื่อมจุดทั้งสองนี้จะต้องอยู่ในพื้นผิวราบตลอดทั้งเส้น

เส้นร่วมระนาบ (co-planar) คือ เส้นซึ่งลากอยู่ในระนาบเดียวกัน หรือสามารถให้ระนาบเดียวกันผ่านได้

เส้นไขว้ต่างระนาบ (skew lines) คือ เส้นซึ่งไม่สามารถให้ระนาบเดียวกันผ่านได้

ทฤษฎีบท 1.1.1 มีระนาบเพียงระนาบเดียวเท่านั้น ที่สามารถผ่านเส้นตรงสองเส้นใด ๆ ซึ่งตัดกัน



รูป 1.1.1

จากรูป 1.1.1 กำหนดให้ AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้น ซึ่งตัดกันที่จุด E แล้วจะได้ว่า มีระนาบ XY เพียงระนาบเดียวเท่านั้นที่ผ่านเส้นตรง AEB ให้ระนาบนี้หมุนรอบเส้นตรง AB จนกระทั่งระนาบผ่านจุด C ซึ่งอยู่ในตำแหน่งของระนาบ X'Y' แล้วระนาบที่หมุนนี้ก็จะตรึงอยู่กับที่ ดังนั้น จะมีระนาบเพียงระนาบเดียวเท่านั้นที่สามารถผ่านเส้นตรง AB และจุด C และเพราะว่า จุด E และ C เป็นจุดที่อยู่ในระนาบ X'Y' ดังนั้น เส้นตรง CED จึงอยู่ในระนาบ X'Y' ด้วย นั่นคือ มีระนาบเพียงระนาบเดียวเท่านั้น ที่สามารถผ่านเส้นตรงสองเส้นใด ๆ ซึ่งตัดกัน

บทแทรก เส้นตรงสามเส้นใด ๆ ซึ่งแต่ละเส้นตัดกัน เส้นตรงทั้งสามนี้ต้องเป็นเส้นร่วมระนาบ

ข้อสังเกต ตำแหน่งของระนาบจะตรึงอยู่กับที่ ถ้า

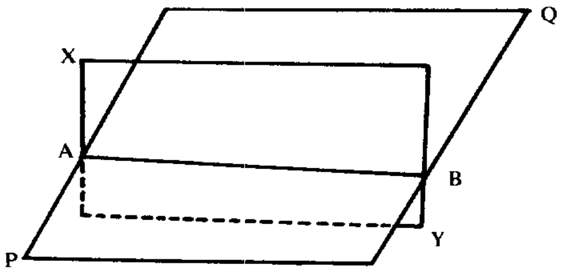
(i) ระนาบนั้นผ่านเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ และจุด ๆ หนึ่งซึ่งอยู่ภายนอกเส้นตรงเส้นนี้

(ii) ระนาบนั้นผ่านเส้นตรงสองเส้นซึ่งตัดกัน

(iii) ระนาบนั้นผ่านจุดสามจุดซึ่งไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

(iv) ระนาบนั้นผ่านเส้นตรงสองเส้นซึ่งขนานกัน

ทฤษฎีบท 1.1.2 ระนาบสองระนาบย่อมตัดกันเป็นเส้นตรง และไม่มีจุดตัดอื่นใดที่อยู่ภายนอกเส้นตรงนี้



รูป 1.1.2

จากรูป 1.1.2 ให้ระนาบ PQ และ XY ตัดกัน ให้ A และ B เป็นจุดที่อยู่ทั้งในระนาบ PQ และ XY ดังนั้น เส้นตรงที่เชื่อมจุด A และจุด B ย่อมอยู่ในระนาบทั้งสอง นั่นคือ ระนาบทั้งสองตัดกันเป็นเส้นตรง และเพราะว่าระนาบทั้งสองผ่านเส้นตรง AB ระนาบทั้งสองจึงไม่สามารถมีจุดร่วมอื่นใดภายนอกเส้นตรง AB ได้ มิฉะนั้นแล้วระนาบทั้งสองจะทับกัน

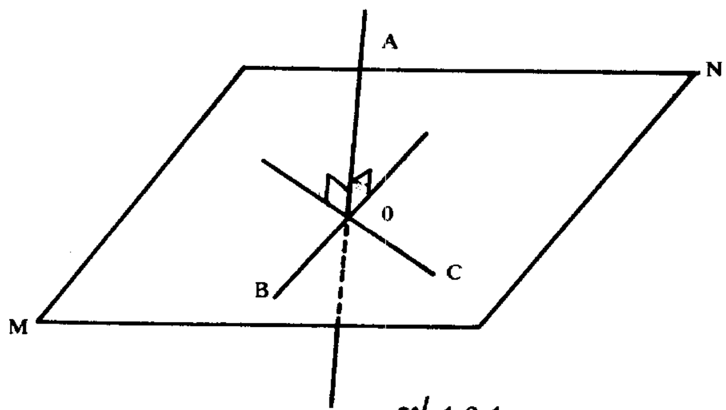
ข้อสังเกต

(i) ถ้าเส้นตรงสามเส้นหรือมากกว่าสามเส้นต่างก็ตัดเส้นตรงที่กำหนดให้แล้ว เส้นตรงทั้งหลายย่อมเป็นเส้นตรงร่วมระนาบ (co-planar)

(ii) ถ้าเส้นตรงสามเส้นหรือมากกว่าสามเส้นซึ่งขนานกัน ตัดกับเส้นตรงที่กำหนดให้แล้ว เส้นตรงทั้งหลายย่อมเป็นเส้นตรงร่วมระนาบ

1.2 จุดตัดของเส้นกับระนาบ

จุดตัดของเส้นกับระนาบ เราเรียกว่า **ฐานของเส้น** (foot of the line) จากรูป 1.2.1 ได้ว่า 0 เป็นจุดตัดของเส้น A กับระนาบ MN จึงเรียก 0 ว่าเป็นฐานของเส้น

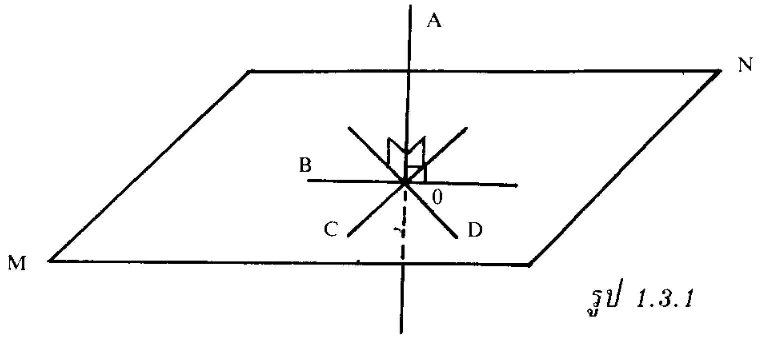


รูป 1.2.1

1.3 การตั้งฉากระหว่างเส้นตรงกับระนาบ และระนาบกับระนาบ

นิยาม 1.3.1 เส้นตรงที่กำหนดให้จะตั้งฉากกับระนาบที่กำหนดให้ที่เส้นตรงเส้นนั้นตัด ถ้าเส้นตรงทุก ๆ เส้นที่บรรจุในระนาบและผ่านฐานของเส้นตรงที่กำหนดให้ตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นนั้น

อนึ่ง ถ้าเส้นตรงตั้งฉากกับเส้นตรงสองเส้นซึ่งตัดกัน ณ. ที่จุดตัดแล้ว เส้นตรงเส้นนั้นย่อมตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วยเส้นตรงสองเส้นนั้นด้วย ดูรูป 1.3.1



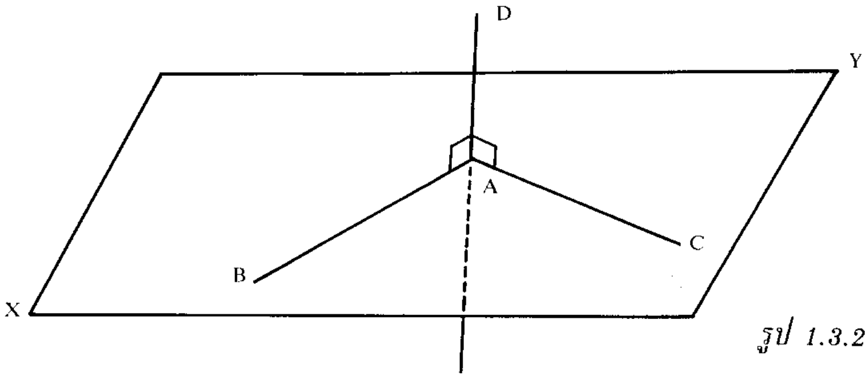
รูป 1.3.1

จากรูป 1.3.1 ได้ว่า เส้นตรง B, เส้นตรง C และเส้นตรง D ต่างก็เป็นเส้นตรงที่บรรจุอยู่ในระนาบ MN และต่างก็ผ่านจุดปลาย 0 ของเส้นตรง A อีกทั้งยังตั้งฉากกับเส้นตรง A ณ. ที่จุด 0 ด้วย ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า เส้นตรง A กับระนาบ MN ตั้งได้ฉากกัน

ข้อสังเกต

การที่จะแสดงว่าเส้นตรงตั้งฉากกับระนาบนั้น จะต้องแสดงให้ได้ว่าเส้นตรงนั้นตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่บรรจุอยู่ในระนาบอย่างน้อยสองเส้น

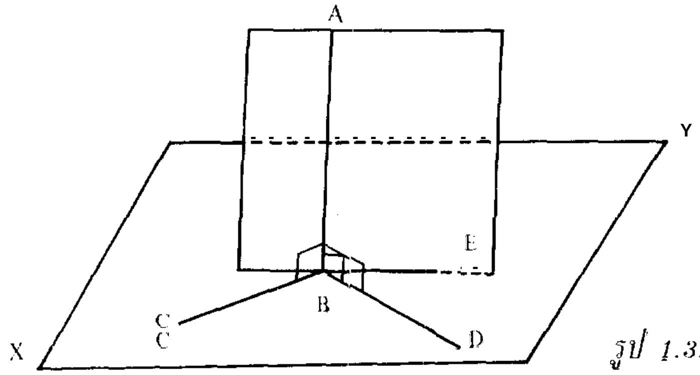
ทฤษฎีบท 1.3.1 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งฉากกับเส้นตรงอีกสองเส้นซึ่งตัดกันที่จุดตัดแล้ว เส้นตรงเส้นนั้นย่อมตั้งฉากกับระนาบ ซึ่งเส้นตรงสองเส้นนั้นบรรจุอยู่ด้วย ดังรูป 1.3.2



รูป 1.3.2

จากรูป 1.3.2 AD เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง AB และ AC ที่จุด A ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นตรง AB กับ AC และ XY เป็นระนาบที่บรรจุเส้นตรง AB และ AC อยู่ เราจะได้ว่า AD ย่อมตั้งฉากกับระนาบ XY ด้วย

ทฤษฎีบท 1.3.2 เส้นตรงทุกเส้นที่ลากมาตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ ณ. จุดที่กำหนดให้ ย่อมเป็นเส้นตรงร่วมระนาบกัน

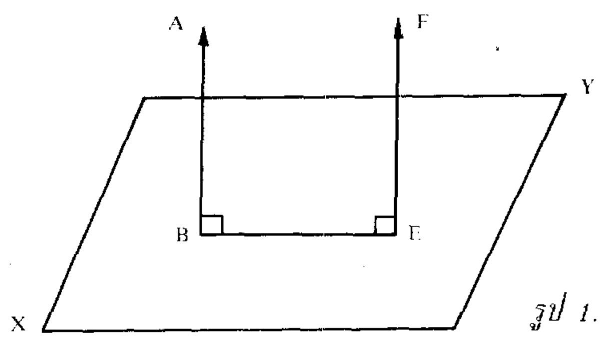


รูป 1.3.3

จากรูป 1.3.3 เส้นตรง BC, BD และ BE แต่ละเส้นต่างก็ตั้งฉากกับเส้นตรง AB ที่จุด B จึงได้ว่า เส้นตรง BC, เส้นตรง BD และเส้นตรง BE เป็นเส้นตรงร่วมระนาบ หรืออยู่ในระนาบ XY เดียวกัน

บทแทรก ถ้าหมุนแขนใดแขนหนึ่งของมุมฉากรอบแขนอีกแขนหนึ่งแล้ว แขนที่หมุนย่อมทำให้เกิดระนาบขึ้นหนึ่งระนาบ

ทฤษฎีบท 1.3.3 ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และถ้าเส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่งตั้งฉากกับระนาบแล้ว เส้นตรงอีกเส้นหนึ่งย่อมตั้งฉากกับระนาบนั้นด้วย



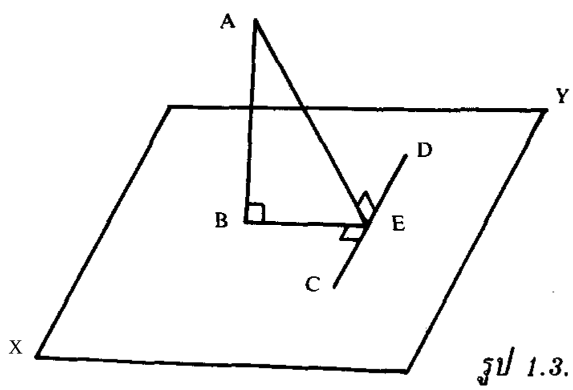
รูป 1.3.4

จากรูป 1.3.4 ให้เส้นตรง AB กับ FE ขนานกัน และตัดระนาบ XY ที่จุด B และ E ตามลำดับ ถ้าเส้นตรง AB ตั้งฉากกับระนาบ XY แล้ว เส้นตรง FE ย่อมตั้งฉากกับระนาบ XY ด้วย

บทกลับ ถ้าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกับระนาบเดียวกันแล้ว เส้นตรงทั้งสองนั้นย่อมขนานกัน

จากรูป 1.3.4 ให้เส้นตรง AB และ FE ต่างก็ตั้งฉากกับระนาบ XY แล้วย่อมได้ว่า เส้นตรง AB กับ FE ย่อมขนานกัน

บทแทรก ถ้าเส้นตรง AB ตั้งฉากกับระนาบ XY และจากจุด B ซึ่งเป็นฐานของเส้นตั้งฉาก ลากเส้น BE ไปตั้งฉากกับเส้นตรง CD ใด ๆ ซึ่งอยู่ในระนาบ XY แล้ว จะได้ว่า เส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง A กับ E (คือ เส้นตรง AE) ย่อมตั้งได้ฉากกับ CD ด้วย

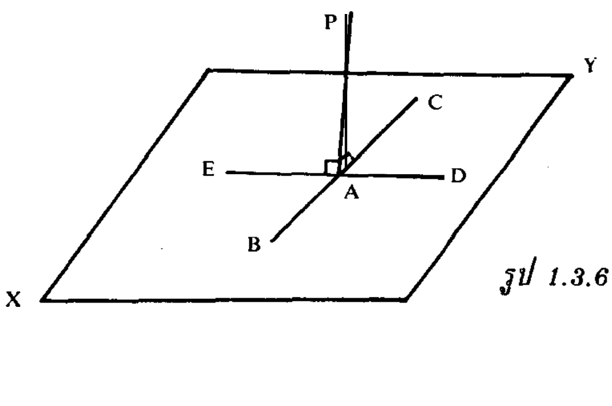


รูป 1.3.5

จากรูป 1.3.5 ถ้าทำให้ระยะทางระหว่าง EC กับ ED เท่ากัน แล้วลากเส้นเชื่อม BC, BD, AC และ AD โดยทฤษฎีบท 1.3.3 ก็จะได้ว่า AD ตั้งฉากกับ CD

ทฤษฎีบท 1.3.4 จากจุดใด ๆ ซึ่งอยู่ภายในหรือภายนอกระนาบ จะมีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้น ที่สามารถลากผ่านจุดนี้ และตั้งฉากกับระนาบ

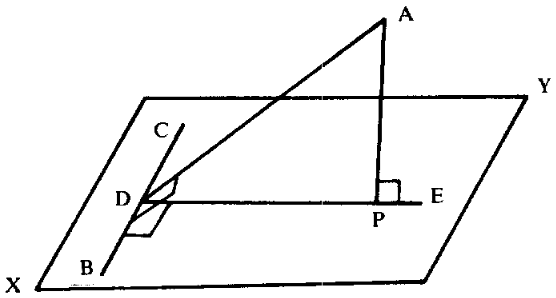
กรณีที่ 1 ในรูป 1.3.6



รูป 1.3.6

ให้ A เป็นจุดที่กำหนดให้ ซึ่งอยู่ในระนาบ XY และ BC เป็นเส้นตรงใด ๆ ที่ผ่านจุด A ให้ AP ตั้งฉากกับเส้นตรง BC และหมุนรอบเส้นตรง BC แล้วเส้นตรง AP ทำให้เกิดระนาบที่ตั้งฉากกับเส้นตรง BC ให้ระนาบนี้ตัดกับระนาบ XY เป็นเส้นตรง DAE ขณะที่ AP หมุนจาก AD ไปยัง AE AP จะต้องผ่านตำแหน่งที่มันตั้งฉากกับ DE นั่นคือ AP ตั้งฉากทั้ง BC และ DE จึงกล่าวได้ว่า AP ตั้งฉากกับระนาบ XY

กรณีที่ 2 ในรูป 1.3.7



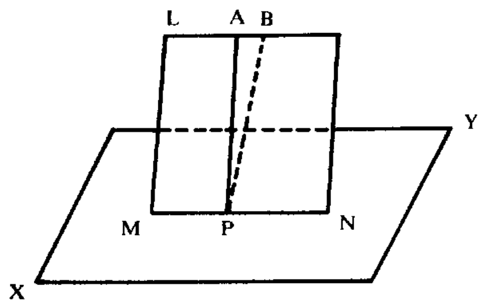
รูป 1.3.7

ให้ A เป็นจุดที่กำหนดให้ ซึ่งอยู่ภายนอกระนาบ XY BC เป็นเส้นตรงใด ๆ ที่อยู่ในระนาบ XY และให้ AD เป็นเส้นที่ลากจากจุด A มาตั้งฉากกับ BC

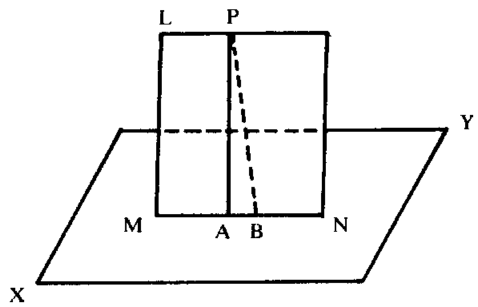
ลาก DE ให้มาตั้งฉากกับ BC ที่อยู่ในระนาบ XY

ให้ AP เป็นเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด A มายัง DE แล้วจะได้ว่า AP ตั้งฉากกับระนาบ XY

กรณีที่ 3 จากจุด P จะมีเส้นตั้งฉากกับระนาบ XY เพียงเส้นเดียวเท่านั้น ไม่ว่าจุด P นั้นจะอยู่ภายในหรือภายนอกระนาบก็ตาม



รูป 1.3.8 (a)



รูป 1.3.8 (b)

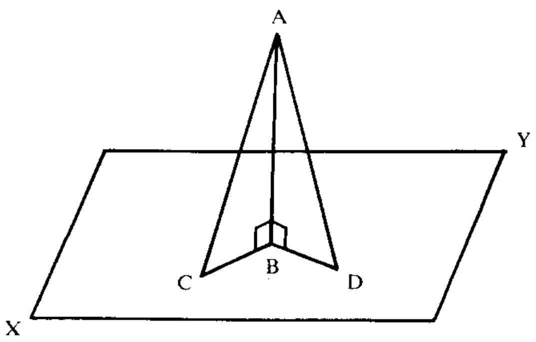
จากรูป 1.3.8 (a) และรูป 1.3.8 (b) ถ้าเป็นไปได้ สมมุติให้มีเส้นตั้งฉาก 2 เส้น คือ PA กับ PB ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ลากจากจุด P มายังระนาบ XY และให้ระนาบที่บรรจุเส้นตรง PA และ PB ตัดระนาบ XY เป็นเส้นตรง MN แล้วทั้งเส้นตรง PA และ PB ตั้งฉากกับ MN และอยู่ในระนาบเดียวกันกับ MN ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้นจึงได้ว่า จากจุด P จะมีเส้นตั้งฉากกับระนาบ XY เพียงเส้นเดียวเท่านั้น ไม่ว่าจุด P นั้นจะอยู่ภายในระนาบ ดังรูป 1.3.8 (a) หรืออยู่ภายนอกระนาบ ดังรูป 1.3.8 (b) ก็ตาม

ทฤษฎีบท 1.3.5

(i) ในบรรดาเส้นตรงทั้งหลายที่ลากจากจุดภายนอกมายังระนาบ เส้นที่ตั้งได้ฉากย่อมเป็นเส้นที่สั้นที่สุด

(ii) ในบรรดาเส้นเฉียงทั้งหลายที่ลากจากจุดที่กำหนดให้ เส้นซึ่งตัดระนาบและห่างจากฐานของเส้นตั้งฉากเท่ากัน ย่อมยาวเท่ากัน



รูป 1.3.9

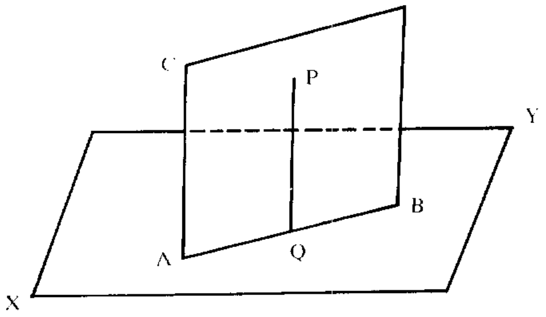
จากรูป 1.3.9

(i) ให้ AB เป็นเส้นตั้งฉากกับระนาบ XY และ AC เป็นเส้นเฉียงใด ๆ ซึ่งลากจากจุดภายนอก A มายังระนาบ XY แล้วย่อมได้ว่า AB ย่อมสั้นกว่า AC

(ii) ให้ AC และ AD เป็นเส้นเฉียงที่ตัดระนาบ XY ที่จุด C และ D ตามลำดับ โดยมีระยะ BC, BD ห่างจากฐานของเส้นตั้งฉาก AB เท่ากัน แล้วย่อมได้ว่า AC = AD

นิยาม 1.3.2 ระนาบ 2 ระนาบตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อระนาบหนึ่งบรรจุเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบอีกระนาบหนึ่ง

ทฤษฎีบท 1.3.6 ถ้าเส้นตรงตั้งฉากกับระนาบที่กำหนดให้แล้วระนาบใด ๆ ที่บรรจุเส้นตั้งฉากนั้น ย่อมตั้งฉากกับระนาบที่กำหนดให้ด้วย



รูป 1.3.10

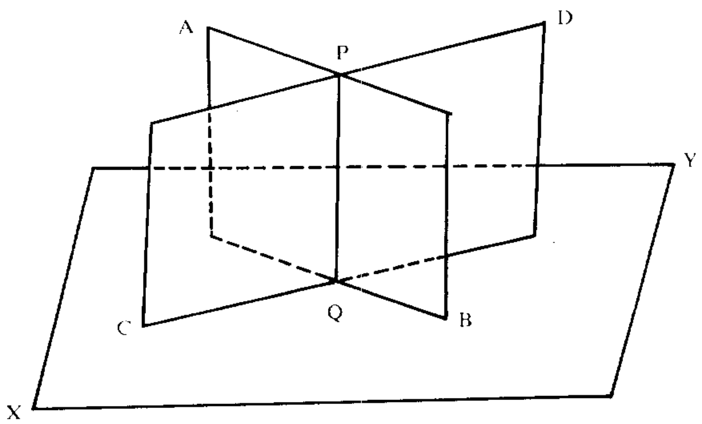
จากรูป 1.3.10 ให้ PQ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบ XY และให้ CB เป็นระนาบใด ๆ ที่บรรจุเส้นตรง PQ แล้วจะได้ว่า ระนาบ CB ย่อมตั้งฉากกับระนาบ XY ด้วย

บทแทรก

(i) ถ้าระนาบ CB และ XY ตั้งฉากซึ่งกันและกันแล้ว เส้นตรง PQ ใด ๆ ที่อยู่ในระนาบ CB และตั้งฉากกับเส้นตรง AB ซึ่งเป็นเส้นตัดระหว่างระนาบ CB กับระนาบ XY ย่อมตั้งฉากกับระนาบ XY ด้วย

(ii) ถ้าระนาบ CB ตั้งฉากกับระนาบ XY และจากจุด P ใด ๆ ซึ่งอยู่ในระนาบ CB ลากเส้น PQ มาตั้งฉากกับระนาบ XY แล้ว เส้นตั้งฉาก PQ ย่อมบรรจุอยู่ในระนาบ CB ด้วย

ทฤษฎีบท 1.3.7 ถ้าระนาบ 2 ระนาบตัดกัน และต่างก็ตั้งฉากกับระนาบที่สามแล้ว เส้นตัดของระนาบทั้งสองย่อมตั้งฉากกับระนาบที่สามด้วย



รูป 1.3.11

จากรูป 1.3.11 ให้ระนาบ AB และ CD ต่างก็ตั้งได้ฉากกับระนาบ XY โดยระนาบ AB กับ CD ตัดกันเป็นเส้นตรง PQ แล้ว จะได้ว่า เส้นตรง PQ ย่อมตั้งฉากกับระนาบ XY ด้วย

1.4 เส้นขนานและระนาบขนาน

นิยาม 1.4.1 เส้นตรง 2 เส้น ขนานกันก็ต่อเมื่อเส้นตรงทั้งสองเป็นเส้นร่วมระนาบและไม่ตัดกัน แม้ว่าจะต่อเส้นออกไปเท่าไรก็ตาม

นิยาม 1.4.2 ระนาบ 2 ระนาบ ขนานกันก็ต่อเมื่อระนาบทั้งสองไม่ตัดกัน แม้ว่าจะต่อระนาบออกไปเท่าไรก็ตาม

นิยาม 1.4.3 เส้นตรงและระนาบ ขนานกันก็ต่อเมื่อเส้นตรงและระนาบไม่ตัดกัน แม้ว่าจะต่อเส้นตรงและระนาบออกไปเท่าไรก็ตาม

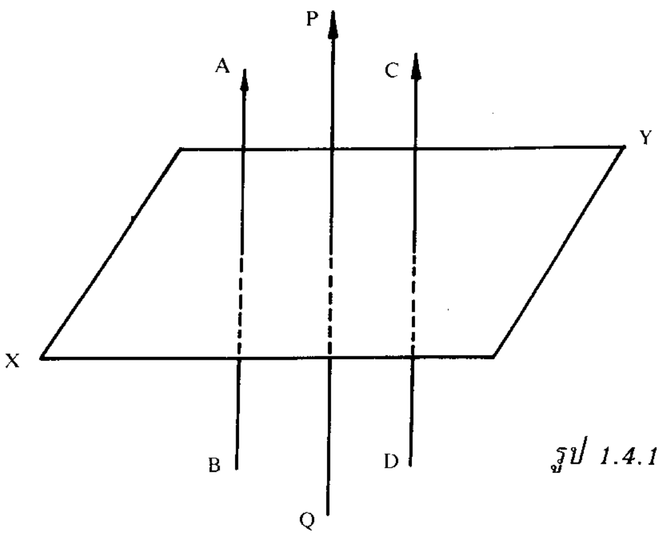
ข้อสังเกต

(1) ในระนาบหนึ่ง ๆ ย่อมได้ว่า เส้นตรงสองเส้นจะทับกัน หรือตัดกัน หรือขนานกันอย่างใดอย่างหนึ่ง

(2) สำหรับระนาบ 2 ระนาบใด ๆ ย่อมได้ว่า ระนาบทั้งสองนั้นอาจทับกัน หรือตัดกัน หรือขนานกันอย่างใดอย่างหนึ่ง

(3) เส้นตรง 2 เส้นที่แต่ละเส้นอยู่ในระนาบที่ขนานกัน ไม่จำเป็นจะต้องขนานกัน

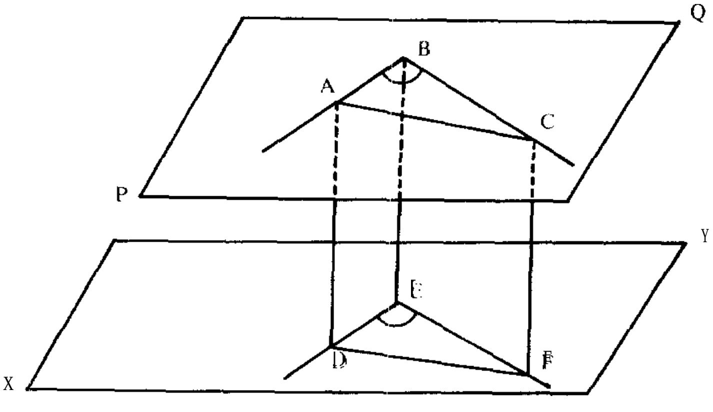
ทฤษฎีบท 1.4.1 เส้นตรงทั้งหลายซึ่งขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นเดียวกัน ย่อมขนานกัน



รูป 1.4.1

จากรูป 1.4.1 ให้เส้นตรง AB และ CD ต่างก็ขนานกับเส้นตรง PQ แล้วจะได้ว่า AB กับ CD ย่อมขนานกัน

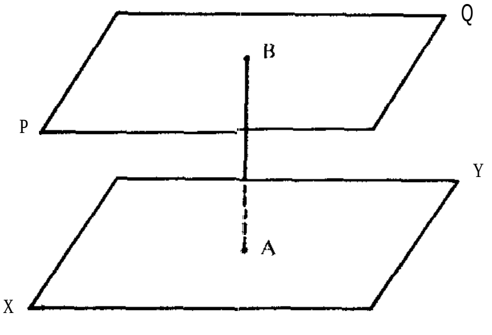
ทฤษฎีบท 1.4.2 ถ้าเส้นตรง 2 เส้น ตัดกันและขนานกับ เส้นตรงอีก 2 เส้นที่ตัดกันตามลำดับ โดยเส้นตรงทั้งสองคู่ไม่ได้อยู่ในระนาบเดียวกันแล้ว มุมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรงคู่แรก และคู่ที่สอง ย่อมกางเท่ากัน



รูป 1.4.2

จากรูป 1.4.2 ให้เส้นตรง AB และ BC ขนานกับเส้นตรง DE และ EF ตามลำดับ โดยเส้นตรง AB, BC กับเส้นตรง DE, EF ไม่ได้อยู่ในระนาบเดียวกัน ให้ $\angle ABC$ เป็นมุมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง AB กับ BC และ $\angle DEF$ ปืนมุมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง DE กับ EF แล้วจะได้ว่า $\angle ABC = \angle DEF$

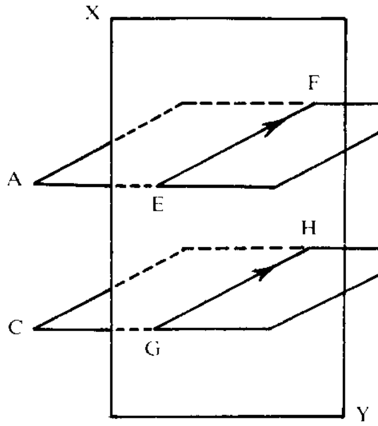
ทฤษฎีบท 1.4.3 ระนาบทั้งหลายที่ตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นเดียวกัน ย่อมขนานกัน



รูป 1.4.3

จากรูป 1.4.3 ให้ระนาบ XY และระนาบ PQ ต่างก็ตั้งฉากกับเส้นตรง AB แล้วจะได้ว่า ระนาบ XY กับระนาบ PQ ขนานกัน

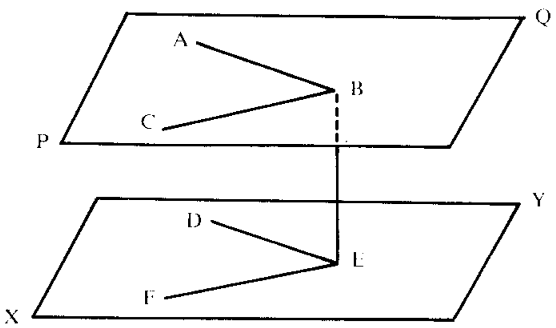
ทฤษฎีบท 1.4.4 ถ้าระนาบ 2 ระนาบ ที่ขนานกัน ถูกตัดด้วยระนาบที่สามแล้ว เส้นตัดทั้งสองย่อมขนานกัน



รูป 1.4.4

จากรูป 1.4.4 ให้ระนาบ AB กับระนาบ CD ขนานกัน และให้ระนาบ XY ตัดระนาบ AB และระนาบ CD โดย EF เป็นเส้นตัดระหว่างระนาบ XY กับระนาบ AB และ GH เป็นเส้นตัดระหว่างระนาบ XY กับระนาบ CD แล้วจะได้ว่า เส้นตรง EF กับเส้นตรง GH ขนานกัน

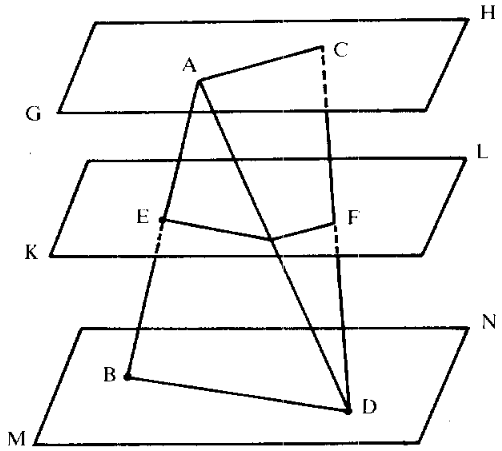
ทฤษฎีบท 1.4.5 ถ้าเส้นตรง 2 เส้นที่ตัดกัน ขนานกับเส้นตรงอีก 2 เส้นที่ตัดกันตามลำดับ โดยเส้นตรงทั้ง 2 คู่ นั้นไม่อยู่ในระนาบเดียวกันแล้ว ระนาบที่บรรจุเส้นตรงคู่แรก ย่อมขนานกับระนาบที่บรรจุเส้นตรงคู่ที่สอง



รูป 1.4.5

จากรูป 1.4.5 ให้เส้นตรง AB และ BC ขนานกับเส้นตรง DE และ EF ตามลำดับ โดยเส้นตรง AB, BC และเส้นตรง DE, EF ไม่อยู่ในระนาบเดียวกัน มีจุด B เป็นจุดตัดระหว่างเส้นตรง AB กับ BC และจุด E เป็นจุดตัดระหว่างเส้นตรง DE กับ EF แล้วจะได้ว่า ระนาบที่บรรจุเส้นตรง AB, BC ย่อมขนานกับระนาบที่บรรจุเส้นตรง DE, EF

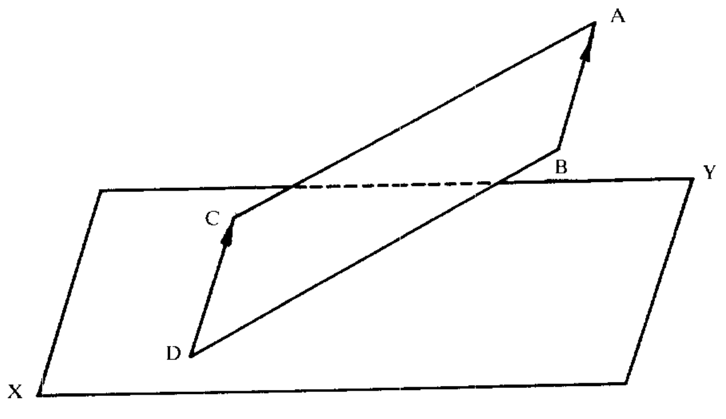
ทฤษฎีบท 1.4.6 เส้นตรงที่ถูกตัดด้วยระนาบที่ขนานกัน ย่อมเป็นสัดส่วนกัน



รูป 1.4.6

จากรูป 1.4.6 ให้ระนาบ GH, ระนาบ KL และระนาบ MN ขนานกัน และให้ AB และ CD เป็นเส้นตรงที่ถูกตัดด้วยระนาบ GH, ระนาบ KL, ระนาบ MN ที่จุด A, จุด E, จุด B และจุด C, จุด F, จุด D ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า AE : EB = CF : FD

ทฤษฎีบท 1.4.7 ถ้าเส้นตรงที่อยู่ภายนอกระนาบที่กำหนดให้ ขนานกับเส้นตรงใด ๆ ที่อยู่ในระนาบนั้นแล้ว เส้นตรงนั้นกับระนาบย่อมขนานกัน



รูป 1.4.7

จากรูป 1.4.7 ให้ CD เป็นเส้นตรงอยู่ในระนาบ XY และ AB เป็นเส้นตรงที่อยู่ภายนอกระนาบ XY โดยที่ AB ขนานกับ CD แล้วจะได้ว่า เส้นตรง AB ขนานกับระนาบ XY ด้วย

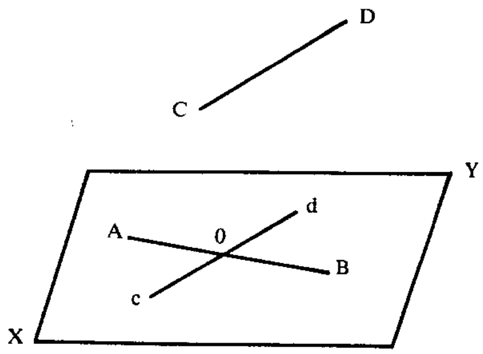
บทกลับ ถ้าเส้นตรงขนานกับระนาบแล้ว ระนาบใด ๆ ที่บรรจุเส้นตรงนั้น และตัดกับระนาบที่กำหนดให้ ย่อมตัดระนาบเป็นเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้

จากรูป 1.4.7 ให้เส้นตรง AB ขนานกับระนาบ XY และให้ AD เป็นระนาบใด ๆ ที่บรรจุเส้นตรง AB โดยที่ระนาบ AD ตัดกับระนาบ XY เป็นเส้นตรง CD แล้วจะได้ว่า เส้นตรง CD ย่อมขนานกับเส้นตรง AB

1.5 เส้นตรงไขว้ต่างระนาบ (skew straight lines)

นิยาม 1.5.1 เส้นตรงไขว้ต่างระนาบ คือ เส้นตรงที่ไม่สามารถให้ระนาบเดียวกันผ่านได้ หรือไม่สามารถบรรจุอยู่ในระนาบเดียวกันได้

ทฤษฎีบท 1.5.1 สำหรับเส้นตรงไขว้ต่างระนาบ 2 เส้น ย่อมมีระนาบเพียงหนึ่งระนาบเท่านั้นที่บรรจุเส้นตรงไขว้ต่างระนาบเส้นหนึ่งที่ขนานกับเส้นตรงไขว้ต่างระนาบอีกเส้นหนึ่ง



รูป 1.5.1

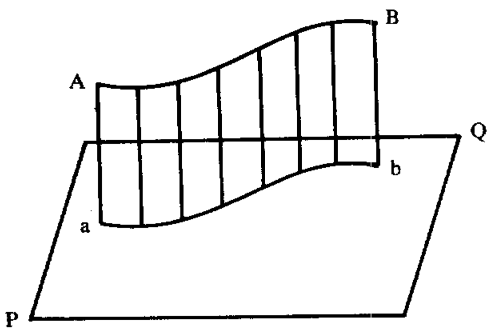
จากรูป 1.5.1 ให้ AB และ CD เป็นเส้นตรงไขว้ต่างระนาบ นั่นคือ AB และ CD ไม่เป็นเส้นตรงร่วมระนาบ

0 เป็นจุดใด ๆ ในเส้นตรง AB ลาก c0d ขนานกับเส้นตรง CD แล้ว AB และ cd ย่อมทำให้เกิดระนาบ XY เนื่องจาก เส้นตรง CD ขนานกับเส้นตรง cd ซึ่งอยู่ในระนาบ XY แล้วจะได้ว่า เส้นตรง CD ขนานกับระนาบ XY ซึ่งมีเส้นตรง AB บรรจุอยู่ในระนาบด้วย

นิยาม 1.5.2 มุมระหว่างเส้นตรงไขว้ต่างระนาบ 2 เส้น คือ มุมระหว่างเส้นตรงไขว้ต่างระนาบเส้นหนึ่งที่ตัดกับเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงไขว้ต่างระนาบอีกเส้นหนึ่ง

จากรูป 1.5.1 มุมระหว่างเส้นตรงไขว้ต่างระนาบ AB กับ CD คือ มุมระหว่างเส้นตรง AB กับเส้นตรง cd ซึ่งลากผ่านจุด 0 ใด ๆ ในเส้นตรง AB และขนานกับเส้นตรง CD

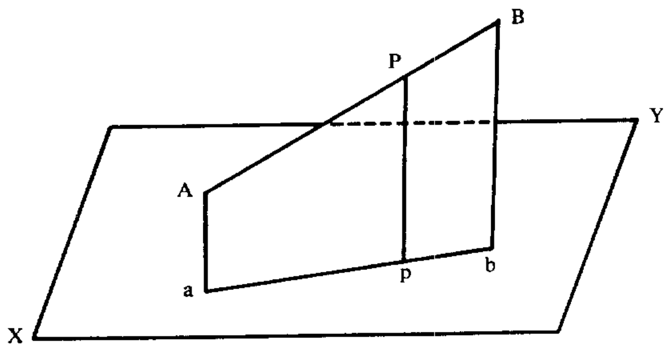
นิยาม 1.5.3 โปรเจกชัน (projection) ของเส้นบนระนาบ คือ โลกัส (locus) ของฐานของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดทั้งหมดในเส้นตรงที่กำหนดให้มายังระนาบ



รูป 1.5.2

จากรูป 1.5.2 ได้ว่า โปรเจกชันของเส้น AB บนระนาบ PQ ก็คือ เส้น ab

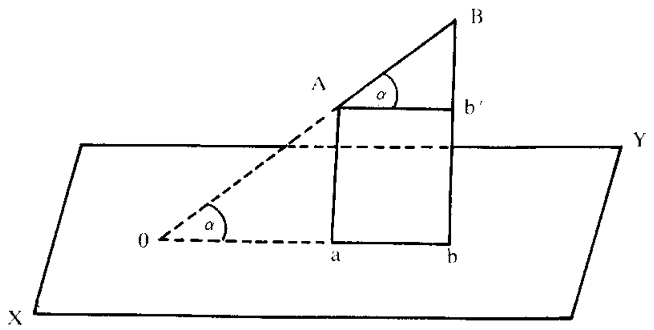
ทฤษฎีบท 1.5.2 โปรเจกชันของเส้นตรงบนระนาบย่อมเป็นเส้นตรง



รูป 1.5.3

จากรูป 1.5.3 ให้ AB เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ และ XY เป็นระนาบที่กำหนดให้ จากจุด P ซึ่งเป็นจุดใด ๆ ในเส้นตรง AB ให้ Pp เป็นเส้นตั้งฉากกับระนาบ XY และตัดระนาบ XY ที่จุด p ให้ Aa และ Bb เป็นเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด A และ B มาตั้งฉากกับระนาบ XY ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า โปรเจกชันของเส้นตรง AB บนระนาบ XY ก็คือ เส้นตรง ab ซึ่งเป็นโลกัสของจุด p นั่นเอง

บทแทรกที่ 1 มุมที่เส้นตรง AB ทำกับระนาบ XY ก็คือ มุมระหว่าง เส้นตรง AB กับเส้นตรง ab ซึ่งเป็นโปรเจกชันของ AB บนระนาบ XY โดยเส้นตรงกับโปรเจกชันของเส้นตรงนั้นจะต้องอยู่ในระนาบเดียวกัน



รูป 1.5.4

จากรูป 1.5.4 ให้ AB เป็นเส้นตรง และ ab เป็นโปรเจกชันของเส้นตรง AB บนระนาบ XY ถ้าต่อเส้นตรง AB และ ab ไปตัดกันที่จุด 0 มุมระหว่างเส้นตรง AB กับระนาบ XY ก็คือ มุม B0b

บทแทรกที่ 2 ความยาวของโปรเจกชันของเส้นตรง AB บนระนาบ XY ยาวเท่ากับผลคูณระหว่างความยาวของเส้นตรง AB กับโคไซน์ (cosine) ของมุมระหว่างเส้นตรง AB กับระนาบ XY

จากรูป 1.5.4 ให้ α เป็นมุมระหว่างเส้นตรง AB กับระนาบ XY ลากเส้นตรง Ab′ ให้ขนานกับเส้นตรง ab ไปตัดกับเส้นตรง Bb ที่จุด b′

แล้ว $\angle BAb' = \angle B0b = \alpha$

เนื่องจาก สามเหลี่ยม BAb′ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้น $\dfrac{Ab'}{AB} = \cos\alpha$

หรือ $Ab' = AB\cos\alpha$

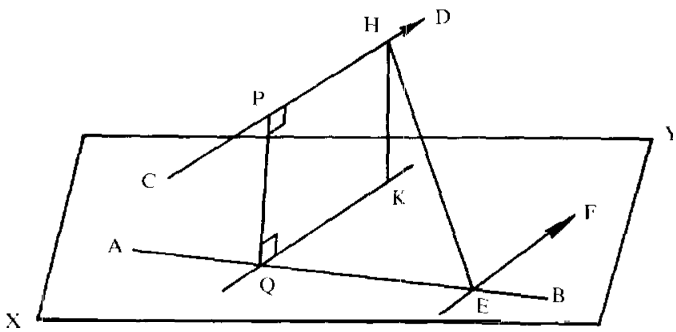
นั่นคือ $ab = AB\cos\alpha$

ข้อสังเกต เนื่องจากขณะที่ α เพิ่มขึ้นจาก $0°$ ไปยัง $90°$ ค่า $\cos\alpha$ จะลดลง ดังนั้นจึงได้ว่าขณะที่ความเอียงของเส้นตรง AB ที่ทำกับระนาบ XY เพิ่มขึ้นนั้น โปรเจกชันของเส้นตรง AB (คือ เส้นตรง ab) จะมีความยาวลดลง

ทฤษฎีบท 1.5.3 ถ้าเส้นตรงสองเส้นไม่ตัดกัน และไม่ขนานกันแล้ว จะได้ว่า

(1) ย่อมมีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ตั้งฉากกับเส้นตรงทั้งสอง

(2) เส้นตั้งฉากร่วมของเส้นตรงทั้งสอง ย่อมเป็นเส้นตรงที่สั้นที่สุดที่อยู่ระหว่างเส้นตรงที่กำหนดให้ทั้งสองนั้น



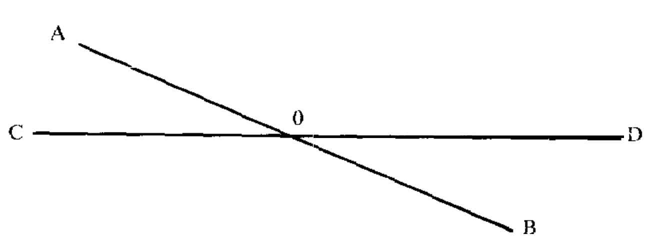
รูป **1.5.5**

(1) จากรูป 1.5.5 ให้ AB และ CD เป็นเส้นตรง 2 เส้นที่ไม่ตัดกันและไม่ขนานกัน โดยเป็นเส้นตรงไขว้ต่างระนาบกัน ให้ E เป็นจุดใด ๆ ในเส้นตรง AB ลาก EF ขนานกับ CD และให้ XY เป็นระนาบที่บรรจุเส้นตรง AB และ EF สมมุติให้โปรเจกชันของ CD บนระนาบ XY คือ QK ซึ่งตัดเส้นตรง AB ที่จุด Q และให้ P เป็นจุดซึ่ง Q เป็นโปรเจกชัน แล้วจะได้ว่า PQ-จะตั้งฉากกับทั้ง AB และ CD

(2) จากรูป 1.5.5 ให้ HE เป็นเส้นตรงใด ๆ ที่ลากจาก CD ไปยัง AB และให้ HK เป็นเส้นตั้งฉากจาก H ไปยังระนาบ XY แล้ว เส้นตั้งฉาก HK ย่อมสั้นกว่าเส้นเฉียง HE (ตามทฤษฎีบท 1.3.5) ดังนั้น จึงได้ว่า PQ ซึ่งเป็นเส้นตรงที่มีความยาวเท่ากับ HK และขนานกับ HK ย่อมสั้นกว่าเส้นตรง HE ด้วย

1.6 มุมสามมิติ (solid angles)

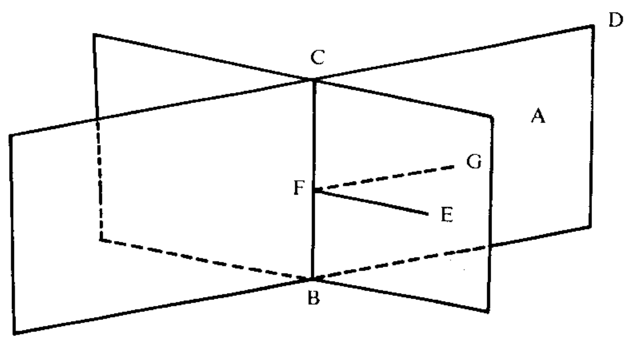
มุมระนาบ (plane angle) เป็นมุมที่เกิดจากเส้นตรงสองเส้นที่อยู่ในระนาบเดียวกันตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง ซึ่งจะเกิดมุมระนาบขึ้น 4 มุม ดังรูป 1.6.1 คือ



รูป **1.6.1**

จากรูป 1.6.1 ให้ AB และ CD เป็นเส้นตรงที่อยู่ในระนาบเดียวกัน ซึ่งตัดกันที่จุด 0 จะได้มุมระนาบ 4 มุม คือ มุม A0C, A0D, B0C และ B0D

มุมระหว่างสองระนาบ (dihedral angle) เป็นมุมที่เกิดจากระนาบ 2 ระนาบตัดกันเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง ระนาบทั้งสองนี้ทำให้เกิดมุมระหว่างสองระนาบ (dihedral angle) 4 มุม ดังรูป 1.6.2



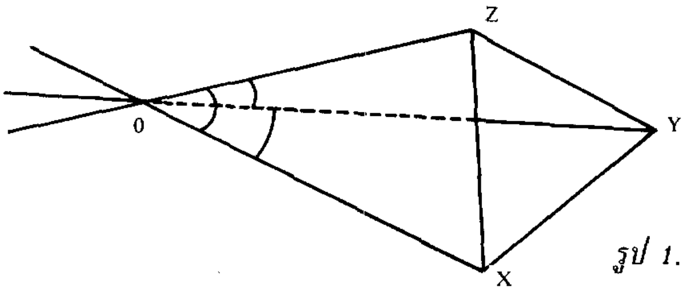
รูป 1.6.2

จากรูป 1.6.2 ให้ BC เป็นเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ 2 ระนาบ ในที่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะมุมระหว่างสองระนาบ A – BC – D ระนาบ ABC และระนาบ DBC เรียกว่า หน้า (face) ของมุมระหว่างสองระนาบ A – BC – D เส้น BC เรียกว่า ขอบ (edge) ของมุมระหว่างสองระนาบ A – BC – D

มุมระนาบที่เกิดจากเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งแต่ละเส้นอยู่ในแต่ละหน้าของมุมระหว่างสองระนาบตั้งฉากกับขอบที่จุด ๆ เดียวกัน เรียกว่า มุมระนาบ (plane angle) ของมุมระหว่างสองระนาบ และเราใช้มุมระนาบของมุมระหว่างสองระนาบ บอกขนาดของมุมระหว่างสองระนาบ จากรูป 1.6.2 ได้ว่า มุม EFG เป็นมุมที่เกิดจากเส้นตรง 2 เส้น คือ เส้นตรง FE กับ FG โดยเส้นตรง FE อยู่ในหน้า ABC และเส้นตรง FG อยู่ในหน้า DBC และ FE กับ FG ตั้งฉากกับขอบ BC ที่จุด F จึงได้ว่า มุม EFG เป็นมุมระนาบของมุมระหว่างสองระนาบ A – BC – D เราจึงใช้มุม EFG บอกขนาดของมุม A – BC – D และเราจะกล่าวว่า มุมระหว่างสองระนาบเป็นมุมแหลม มุมฉาก หรือมุมป้าน เมื่อมุมระนาบมีขนาดเป็นมุมแหลม มุมฉาก หรือมุมป้าน ตามลำดับ

มุมสามมิติ (solid angle) เป็นมุมที่เกิดจากระนาบตั้งแต่สามระนาบขึ้นไป ตัดกันที่จุดเดียวกัน โดยที่ระนาบเหล่านั้น เป็นระนาบที่ถัดกันไป โดยจะเรียกจุดร่วมที่ตัดกันว่า จุดยอด

(vertex), เรียกเส้นตัดระหว่างระนาบสองระนาบที่ติดกันว่า ขอบ (edge), เรียกมุมระหว่างสองระนาบที่ติดกันว่า มุมระหว่างสองระนาบ (dihedral angle), เรียกมุมระนาบที่เกิดจากขอบสองขอบติดกันว่า มุมหน้า (face angle) มุมสามมิติที่เกิดจากระนาบสามระนาบ เรียกว่า มุมระหว่างสามระนาบ (trihedral angle) ส่วนมุมสามมิติที่เกิดจากระนาบมากกว่าสามระนาบขึ้นไป เรียกว่า มุมระหว่างหลายระนาบ (polyhedral angle)



รูป 1.6.3

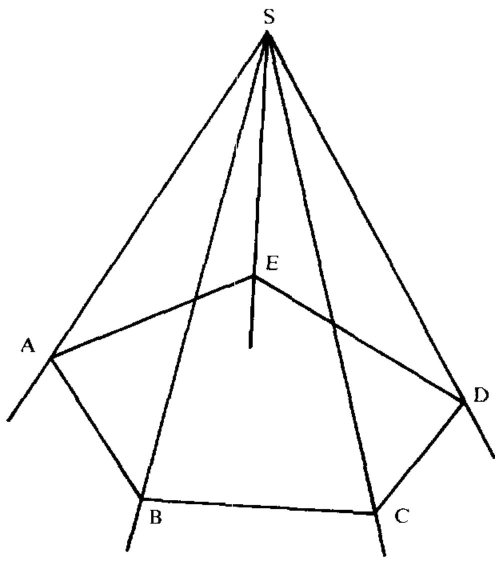
จากรูป 1.6.3 ได้ว่า จุด 0 เป็นจุดที่เกิดจากระนาบ 3 ระนาบตัดกัน ซึ่งจะทำให้เกิดมุมระหว่างสามระนาบ (trihedral angle) 8 มุม ในที่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะมุมระหว่างสามระนาบ $0-XYZ$ โดย

เรียกจุดร่วม 0 ว่า จุดยอดของมุมระหว่างสามระนาบ $0-XYZ$

เรียกระนาบ 0XY 0YZ และ 0ZX ว่า หน้าของมุม $0-XYZ$

เรียก 0X, 0Y และ 0Z ว่า ขอบของมุม $0-XYZ$

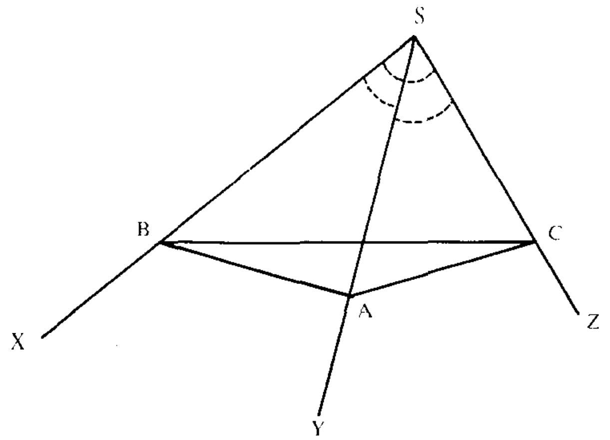
เรียกมุมระนาบ X0Y, Y0Z และ Z0X ว่า มุมหน้า



รูป 1.6.4

จากรูป 1.6.4 จึงได้ว่า ระนาบ ASB, BSC, CSD, DSE และ ESA เป็นระนาบที่ถัดกันไป 5 ระนาบ ซึ่งตัดกันเป็นขอบ SB, SC, SD, SE และ SA ตามลำดับ โดยมี จุด S เป็นจุดร่วม จึงทำให้เกิดมุมสามมิติที่จุดยอด S ซึ่งจะเขียนสัญลักษณ์แทนมุมสามมิตินี้ด้วย S – ABCDE หรือ (S, ABCDE)

ทฤษฎีบท 1.6.1 ผลบวกของมุมหน้าสองมุมใด ๆ ของมุมระหว่างสามระนาบ ย่อมโตกว่ามุมหน้าที่สาม



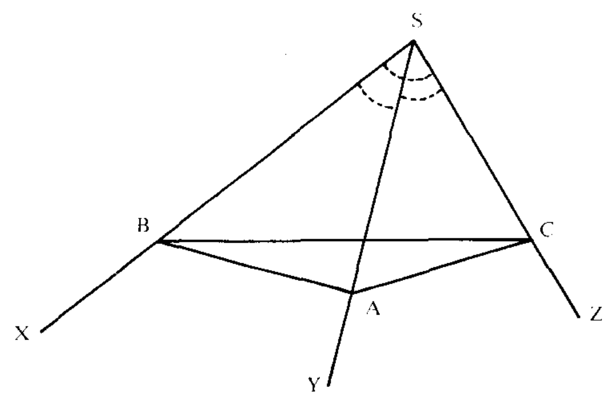
รูป 1.6.5

จากรูป 1.6.5 ให้ S – ABC เป็นมุมระหว่างสามระนาบ ซึ่งมีมุม ASB, BSC และ CSA เป็นมุมหน้า โดยให้มุม BSC เป็นมุมที่ใหญ่ที่สุด แล้วเราย่อมได้ว่า

$$\angle ASB + \angle CSA > \angle BSC$$

นั่นคือ ผลบวกของมุมหน้าสองมุมใด ๆ ของมุมระหว่างสามระนาบย่อมโตกว่ามุมหน้าที่สาม

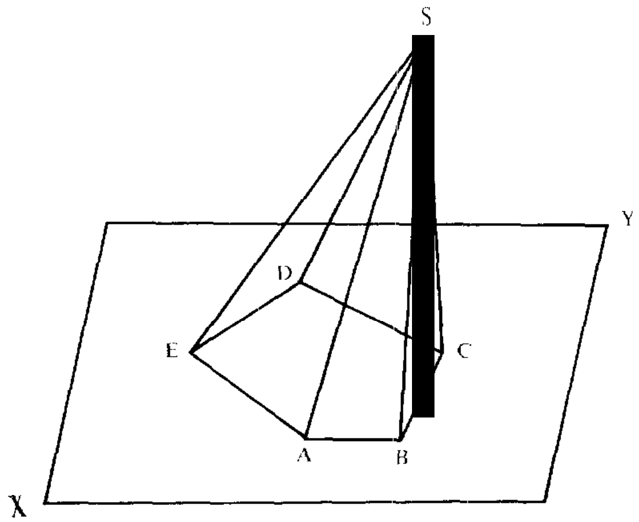
ทฤษฎีบท 1.6.2 ผลรวมของมุมหน้าของมุมระหว่างสามระนาบย่อมน้อยกว่า 360°



รูป 1.6.6

จากรูป 1.6.6 ให้ S – ABC เป็นมุมระหว่างสามระนาบ ซึ่งมีมุม ASB, BSC และ CSA เป็นมุมหน้า แล้วย่อมได้ว่า $\angle ASB + \angle BSC + \angle CSA < 360°$

ทฤษฎีบท 1.6.3 ผลรวมของมุมหน้าของมุมระหว่างหลายระนาบ ย่อมน้อยกว่า 360°



รูป 1.6.7

จากรูป 1.6.7 ให้ S – ABCDE เป็นมุมระหว่างหลายระนาบ ซึ่งมีมุม ASB, BSC, CSD, DSE และ ESA เป็นมุมหน้าแล้ว ย่อมได้ว่า

$$\angle ASB + \angle BSC + \angle CSD + \angle DSE + \angle ESA < 360°$$