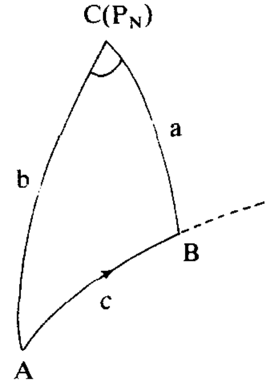
เฉลยแบบฝึกหัด 6.4

1. จงหาระยะทาง แนวทางเริ่มต้นและแนวทางขณะถึง ในการเดินทางจากโฮโนลูลู (ซึ่งมีละติจูด 21°18′18″ เหนือ, ลองจิจูด 157°52′18″ ตะวันตก) ไปยังซานฟรานซิสโก (ซึ่งมีละติจูด 37°47′30″ เหนือ, ลองจิจูด 122°25′42″ ตะวันตก)

วิธีทำ ให้ A คือโฮโนลูลู และ B คือ ซานฟรานซิสโก ดังรูป



ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

$$a = 90° - 37°47'30''$$
$$= 52°12'30''$$
$$b = 90° - 21°18'18''$$
$$= 68°41'42''$$

และ $C = 157°52'18'' - 122°25'42''$

$$= 35°26'36''$$

นั่นคือเราจะต้องแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ในกรณีที่กำหนดด้านให้สองด้านและมุมระหว่างด้านคู่นี้ โดยเราจะต้องหา A, B และ c

ซึ่งจะได้ว่า c จะเป็นระยะทาง, A เป็นแนวทางเริ่มต้น และ B เป็นแนวทางขณะถึงของเรือ

โดยอุปมานของเนเปียร์จะได้ว่า

สำหรับ A กับ B หาได้จาก

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(B+A)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}(b+a)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$,\ \frac{\tan\frac{1}{2}(B-A)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

สำหรับ c หาได้จาก

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(b-a)}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

จาก (1) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(B+A) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)\cot\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$= \frac{\cos 8°14'36'' \cot 17°43'18''}{\cos 60°27'6''}$$

$$= \frac{(0.98967)(3.1296)}{0.49315}$$

$$= 6.2806$$

$$\therefore \frac{1}{2}(B+A) = \tan^{-1} 6.2806$$

$$= 80°57'12'' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(B-A) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)}\cot\frac{1}{2}c$$

$$= \frac{\sin 8°14'36'' \cot 17°43'18''}{\sin 60°27'6''}$$

$$= \frac{(0.14337)(3.1296)}{(0.86994)}$$

$$= 0.51577$$

$$\therefore \frac{1}{2}(B-A) = \tan^{-1} 0.51577$$

$$= 27°17' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$(4)+(5)$ ได้ $B = 80°57'12'' + 27°17'$

$= 108°14'\ 12''$

(4) − (5) ได้ $A = 80°57'12'' - 27°17'$

$= 53°40'12''$

และจาก (3) ได้

$$\tan\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+A)\tan\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(B-A)}$$

$$= \frac{\sin 80°57'6''\tan 8°14'36''}{\sin 27°16'54''}$$

$$= \frac{(0.98756)(0.14487)}{0.45836}$$

$$= 0.31213$$

$$\therefore \frac{1}{2}c = \tan^{-1} 0.31213$$

$$= 17°20'6''$$

$$c = 34°40'12''$$

$$= 2080.2'$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(1) ระยะทาง (c) ที่ต้องการคือ 2080.2 ไมล์ทะเล

(2) แนวทางเริ่มต้น (A) คือ เหนือ 53°40′12″ ตะวันออก

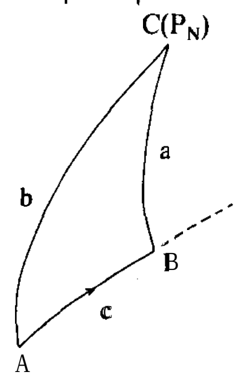
(3) แนวทางขณะถึง (B) คือ เหนือ (180° − 108°14′12″) ตะวันออก หรือเหนือ 71°45′48″ ตะวันออก

2. เรือลำหนึ่งแล่นออกจากนิวยอร์ค (ซึ่งมีละติจูด 40°48′36″ เหนือ, ลองจิจูด 73°57′30″ ตะวันตก) ไปตามวงกลมใหญ่ด้วยแนวทางเริ่มต้น 36°

2.1 จงหาละติจูดและลองจิจูดของตำแหน่งที่เรือเดินทางไปได้ 500 ไมล์ทะเล

2.2 จงบอกจุดเหนือสุด (northern − most point) ของเส้นทางเดินเรือ

วิธีทำ 2.1 ให้ A คือ นิวยอร์ค, B เป็นจุดสิ้นสุดของเรือ ดังรูป



ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

$$b = 90° - 40°48'36''$$
$$= 49°11'24''$$
$$c = 500 \text{ ไมล์ทะเล}$$
$$= 8°20'$$

และ $A = 36°$

เราต้องการหาละติจูดและลองจิจูดของ B ดังนั้น จึงต้องหาด้าน a และมุม C ของสามเหลี่ยมโลก ABC

โดยกฎโคไซน์สำหรับด้าน ได้ว่า

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad \text{.........(1)}$$

และ $$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad \text{.........(2)}$$

จาก (1) ได้ว่า

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$= \cos 49'' 11'24'' \cos 8°20' + \sin 49°11'24'' \sin 8°20' \cos 36''$$
$$= (0.65355)(0.98944) + (0.75688)(0.14493)(0.80902)$$
$$= 0.73539$$
$$\therefore a = \cos^{-1} 0.73539$$
$$= 42°39'36''$$

และจาก (2) ได้ว่า

$$\cos c = \frac{\text{cost-cosacosb}}{\sin a \sin b}$$
$$= \frac{\cos 8°20' - \cos 42°39'36'' \cos 49°11'24''}{\sin 42°39'36'' \text{ Bin } 49°11'24''}$$
$$= \frac{(0.98944) - (0.73539)(0.65355)}{(0.67765)(0.75688)}$$
$$= 0.99206$$
$$\therefore C = \cos^{-1} 0.99206$$
$$= 7913'30''$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

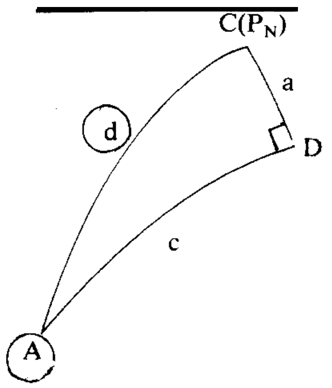
ละติจูดของ B คือ (90” -a) เหนือ = 90” − 42°39'36" เหนือ

= 47°20'24" เหนือ

และลองจิจูดของ B คือ $(73°57'30'' - C)$ ตะวันตก $= (73°57'30'' - 7°13'30'')$ ตะวันตก

$= 66°44'$ ตะวันตก

2.2 จุดเหนือสุดของเส้นทางเดินเรือก็คือจุด D ซึ่งเป็นจุดที่เส้นเมริเดียนตั้งฉากกับเส้นทางเดินเรือ ดังรูป



ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ACD มี $d = 49°11'24''$ และ $A = 36°$ เราจะหาจุดเหนือสุดคือหาละติจูดและลองจิจูดของจุด D ดังนั้น จึงต้องหา a และ C

โดยกฎของเนเปียร์จะได้ว่า

(1) $\sin a = \cos(90° - d)\cos(90° - A)$

หรือ $\sin a = \sin d \sin A$

$= \sin 49°11'24'' \sin 36°$

$= (0.75688)(0.58779)$

$= 0.44489$

$\therefore\ a = \sin^{-1} 0.44489$

$= 26°24'58''$

(2) sin (90”   d) = tan(90° -A) tan(90° – C)

หรือ $\cot C = \cos d \tan A$

= cos 49” 11’24” tan 36”

$= (0.65355)(0.72654)$

$= 0.47483$

.C = cot-’ 0.47483

$= 64°36'$

ดังนั้น จึงได้ว่าจุด D ซึ่งเป็นจุดเหนือสุดของเส้นทางเดินเรือ โดยละติจูดของ D คือ

$$(90^\circ - a) = (90^\circ - 26^\circ 24' 58'') \text{ เหนือ}$$
$$= 63^\circ 35' 2'' \text{ เหนือ}$$

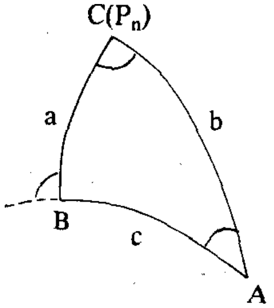
และลองจิจูดของ D คือ

$$(73^\circ 57' 30'' - C) = (73^\circ 57' 30'' - 64^\circ 36') \text{ ตะวันตก}$$
$$= 9^\circ 21' 30'' \text{ ตะวันตก}$$

3. จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง

3.1 ชิคาโก (ซึ่งมี ละติจูด $41^\circ 50'$ เหนือ, ลองจิจูด $87^\circ 31'$ ตะวันตก) กับท่าเรือดัชท์ (ซึ่งมี ละติจูด $53^\circ 54'$ เหนือ, ลองจิจูด $166^\circ 30'$ ตะวันตก)

วิธีทำ ให้ A คือ ชิคาโก และ B คือท่าเรือดัชท์ ดังรูป



ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

$$a = 90'' \quad 53^\circ 54'$$
$$= 36^\circ 6'$$
$$b = 90^\circ - 41^\circ 50'$$
$$= 48^\circ 10'$$

และ $$C = 166^\circ 30' - 87^\circ 31'$$
$$= 78^\circ 59'$$

โดยมี c เป็นระยะทางระหว่าง A กับ B

จาก $$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

$$\therefore \cos c = \cos 36^\circ 6' \cos 48^\circ 10' + \sin 36^\circ 6' \sin 48^\circ 10' \cos 78^\circ 59'$$
$$= (0.80799)(0.66697) + (0.58920)(0.74509)(0.19109)$$
$$= 0.62279$$

$\therefore c = \cos^{-1} 0.62279$

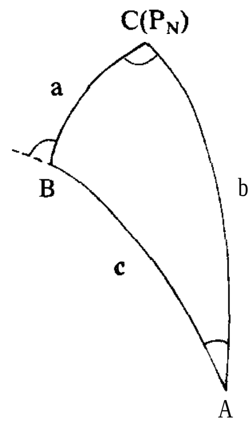
$= 51°28.7'$

$= 3088.7'$

ดังนั้น จึงได้ว่าระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างชิคาโกกับท่าเรือดัชท์คือ 3088.7′ ไมล์ทะเล

3.2 นิวยอร์ค (ซึ่งมีละติจูด 40°43′ เหนือ, ลองจิจูด 74° ตะวันตก) กับริโอเดจาเนโร (ซึ่งมีละติจูด 22°54′ ใต้, ลองจิจูด 43°11′ ตะวันตก)

วิธีทำ ให้ A คือ ริโอเดจาเนโร และ B คือ นิวยอร์ค ดังรูป



ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

$a = 90° - 40°43'$

$= 49°17'$

$b = 90” + 22°54'$

$= 112’54’$

และ $c = 74° - 43°11'$

$= 30°49'$

โดยมี c เป็นระยะทางระหว่าง A กับ B

จาก $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

$= \cos 49°17' \cos 112°54' + \sin 49°17' \sin 112°54' \cos 30°49'$

$= (\cos 49°17')(-\cos 67°6') + (\sin 39°17')(\sin 67°6')(\cos 30°49')$

$= (0.65232)(-0.38912) + (0.75794)(0.92119)(0.85881)$

$= 0.34580$

$\therefore c = \cos^{-1} 0.34580$

$= 69°46.10'$

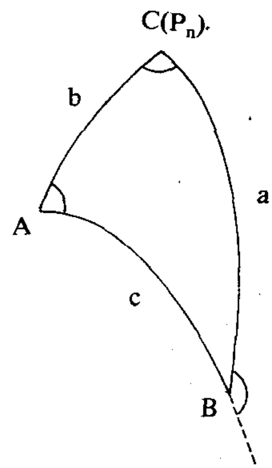
$= 4186.1'$

ดังนั้น จึงได้ว่าระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างนิวยอร์คกับริโอเดจาเนโร คือ 4186.1 ไมล์ทะเล

3.3 ท่าเรือดัชท์กับริโอเดจาเนโร

วิธีทำ ท่าเรือดัชท์ (มีละติจูด 53°54′ เหนือ, ลองจิจูด 166°30′ ตะวันตก) และริโอเดจาเนโร (มีละติจูด 22°54′ ใต้, ลองจิจูด 43°11′ ตะวันตก)

ให้ A คือท่าเรือดัชท์ และ B คือ ริโอเดจาเนโร ดังรูป



ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

$a = 90° + 22°54'$

$= 112°54'$

$b = 90” - 53°54'$

$= 36°6'$

และ $C = 166°30' - 43°11'$

$= 123°19'$

โดยมี c เป็นระยะทางระหว่าง A กับ B

จาก $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

$= \cos 112°54' \cos 36°6' + \sin 112°54' \sin 36°6' \cos 123°19'$

$= (-\cos 67°6') \cos 36°6' + \sin 67°6' \sin 36°6' (-\cos 56°41')$

$= (-0.38912)(0.80799) + (0.92119)(0.58920)(-0.54927)$

$= -0.61253$

$\therefore$ c = cm-'(-0.61253)

$= 180° - 52°13.6'$

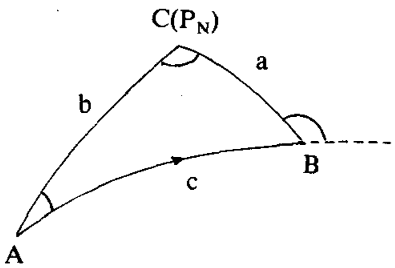
$= 127°46.4'$

$= 7666.4'$

ดังนั้น จึงได้ว่าระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างท่าเรือดัชท์ กับริโอเดจาเนโร คือ 7666.4 ไมล์ทะเล

4. จงหาระยะทางตามแนววงกลมใหญ่ แนวทางเริ่มต้น และแนวทางขณะถึงในการเดินทางจากวอชิงตัน (ซึ่งมีละติจูด 38°55′ เหนือ, ลองจิจูด 77°4′ ตะวันตก) ไปยังมอสโคว์ (ซึ่งมีละติจูด 55°45′ เหนือ, ลองจิจูด 37°34′ ตะวันออก)

วิธีทำ ให้ A คือวอชิงตัน และ B คือมอสโคว์ ดังรูป



ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

$a = 90° - 55°45'$

$= 34°15'$

$b = 90° - 38°55'$

$= 51°5'$

และ $C = 77°4' + 37°34'$

$= 114°38'$

นั่นคือ เราต้องแก้ปัญหาสามเหลี่ยม ABC ในกรณีที่กำหนด ด้าน a, ด้าน b และมุม C มาให้ คือหา c, A และ B ซึ่ง c จะเป็นระยะทางตามแนววงกลมใหญ่, A เป็นแนวทางเริ่มต้น และ B เป็นแนวทางขณะถึง

(1) หา c

โดยกฎโคไซน์สำหรับด้านจะได้ว่า

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \qquad \text{..........(1)}$$

$\therefore \cos c = (\cos 34°15')(\cos 51°5') + (\sin 34°15')(\sin 51°5')(\cos 114°38')$

$= (0.82659)(0.62819) + (0.56280)(0.77806)(-0.41681)$

$= 0.51925 - 0.18252$

$= 0.33673$

$\therefore c = \cos^{-1} 0.33673$

$= 70°19'20''$

$= 70°19.33'$

$= 4219.33'$

ดังนั้น จึงได้ว่าระยะทางตามแนววงกลมใหญ่คือ 4219.33 ไมล์ทะเล

(2) หา A

จากกฎโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

หรือ $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

$$\therefore \cos A = \frac{\cos 34°15' - \cos 51°5' \cos 70°19'20''}{\sin 51°5' \sin 70°19'20''}$$

$$= \frac{(0.82659) - (0.62819)(0.33673)}{(0.77806)(0.94160)}$$

$$= \frac{0.82659 - 0.21153}{0.73262}$$

$= 0.83953$

$\therefore A = \cos^{-1} 0.83953$

$= 32°54'34''$

ดังนั้น แนวทางเริ่มต้นของการเดินทางคือ 32°54'34" หรือเหนือ 32°54'34" ตะวันออก

(3) หา B

จากกฎโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

หรือ $\cos B = \dfrac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$

$$\therefore \cos B = \frac{\cos 51°5' - (\cos 34°15')(\cos 70°19'20'')}{(\sin 34°15')(\sin 70°19'20'')}$$

$$= \frac{(0.62819) \quad (0.82659)(0.33673)}{(0.56280)(0.94160)}$$

$$= \frac{0.62819 - 0.27834}{0.52993}$$

$$= 0.66018$$

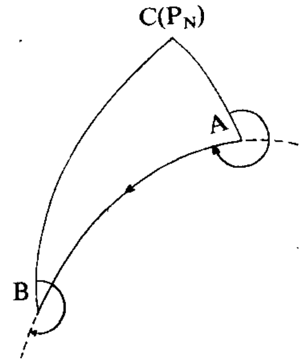
$$\therefore\ B = \cos^{-1} 0.66018$$

$$= 48^\circ 41' 11''$$

ดังนั้น จึงได้ว่าแนวทางขณะถึงของการเดินทาง (B) คือ เหนือ $(180^\circ - 48^\circ 41' 11'')$ ตะวันออก หรือเหนือ $131^\circ 18' 49''$ ตะวันออก

5. จงหาระยะทางตามแนววงกลมใหญ่, แนวทางเริ่มต้น และแนวทางขณะถึงในการเดินทางจากกัลกัตตา (ซึ่งมีละติจูด $22^\circ 35'$ เหนือ, ลองจิจูด $88^\circ 27'$ ตะวันออก) ไปยังเมลเบอร์น (ซึ่งมีละติจูด $37^\circ 48'$ ใต้, ลองจิจูด $144^\circ 58'$ ตะวันออก)

วิธีทำ ให้ A คือกัลกัตตา และ B คือ เมลเบอร์น ดังรูป



ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ได้ว่า

$$a = 90'' + 37^\circ 48'$$

$$= 127^\circ 48'$$

$$b = 90^\circ - 22^\circ 35'$$

$$= 67^\circ 25'$$

และ $$C = 144^\circ 58' - 88^\circ 27'$$

$$= 56^\circ 31'$$

จากสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่เราทราบ a, b และ C จะต้องหา c, A, B ซึ่ง c เป็นระยะทางตาม

แนววงกลมใหญ่ A เป็นแนวทางเริ่มต้น และ B เป็นแนวทางขณะถึง

(1) หา c ซึ่งคือระยะทางตามแนววงกลมใหญ่

จากกฎโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \\
&= (\cos 127°48')(\cos 67°25') + (\sin 127°48')(\sin 67°25')(\cos 56°31') \\
&= (-\cos 52°12')(\cos 67°25') + (\sin 52°12')(\sin 67°25')(\cos 56°31') \\
&= (-0.61291)(0.38403) + (0.79016)(0.92332)(0.55169) \\
&= -0.23538 + 0.40250 \\
&= 0.16712 \\
\therefore c &= \cos^{-1} 0.16712 \\
&= 80°22'57'' \\
&= 80°22.95' \\
&= 4822.95'
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จึงได้ว่าระยะทางตามแนววงกลมใหญ่คือ 4822.95 ไมล์ทะเล

(2) หา A ซึ่งคือแนวทางเริ่มต้น

จากกฎโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

หรือ $$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \cos A &= \frac{(\cos 127°48') - (\cos 67°25')(\cos 80°22'57'')}{(\sin 67°25')(\sin 80°22'57'')} \\
&= \frac{(-0.61291) - (0.38403)(0.16712)}{(0.92332)(0.98595)} \\
&= \frac{-0.61291 - 0.06418}{0.91035} \\
&= -0.74377 \\
\therefore A &= \cos^{-1}(-0.74377) \\
&= 180° - 41°56'47'' \\
&= 138°3'13''
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จึงได้ว่าแนวทางเริ่มต้นคือ ใต้ 138°3′13″ ตะวันตก หรือเหนือ 360° − 138°3′13″ ตะวันออก

นั่นคือแนวทางเริ่มต้นคือ เหนือ 221°56′47″ ตะวันออก

(3) **หา** B ซึ่งคือแนวทางขณะถึง

จากกฎโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$\cos\ b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

หรือ
$$\cos\ B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

$$\therefore \cos\ B = \frac{(\cos 67°25') - (\cos 127°48')(\cos 80''\ 22'57'')}{(\sin 127°48')(\sin 80°22'57'')}$$

$$= \frac{(\cos 67°25') \quad (-\cos 52°12')(\cos 80°22'57'')}{(\sin 52°12')(\sin 80°22'57'')}$$

$$= \frac{0.38403-(-0.61291)(0.16712)}{(0.79016)(0.98595)}$$

$$= \frac{0.38403-(-0.10243)}{0.77906}$$

$$= 0.62442$$

$$\therefore B = \cos^{-1} 0.62442$$

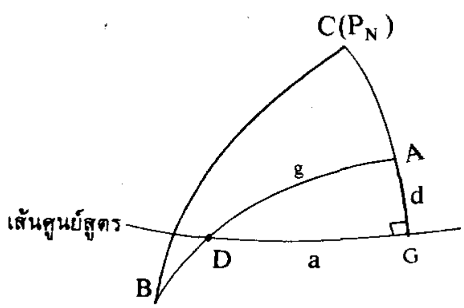
$$= 51°21'36''$$

ดังนั้น จึงได้ว่าแนวทางขณะถึงคือ ใต้ 51°21′36″ ตะวันตก หรือเหนือ $180° + 51°21'36''$ ตะวันออก

นั่นคือ แนวทางขณะถึงคือ เหนือ 231°21′36″ ตะวันออก

6. จงหาตำแหน่งของเรือในโจทย์ข้อ 5 เมื่อเรือแล่นผ่านเส้นศูนย์สูตร และจงหาระยะทางจากจุดที่เรือแล่นผ่านเส้นศูนย์สูตรกับกัลกัตตา

วิธีทำ ให้ A คือ กัลกัตตา และ B คือเมลเบอร์น ดังรูป



ให้ D เป็นจุดตัดของเส้นทางเดินเรือกับเส้นศูนย์สูตร

G เป็นจุดตัดของเส้นเมริเดียนที่ผ่าน A กับเส้นศูนย์สูตร

พิจารณาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก AGD ซึ่งมี G เป็นมุมฉาก

และ $d = $ ส่วนโค้ง $GA = 22°35'$

$A = \angle DAG = 180° - 138°3'13''$

$\doteq 41°56'47''$

ต้องการหา D และ g

(1) หา D ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เรือแล่นผ่านเส้นศูนย์สูตร (โดยต้องหา a ก่อน)

โดยกฎของเนเปียร์จะได้ว่า

$$\sin d = \tan a \tan(90° - A)$$

หรือ $\tan a = \sin d \tan A$

$\therefore \tan a = (\sin 22°35')(\tan 41'56'47'')$

$= (0.38403)(0.89871)$

$= 0.34513$

$\therefore a = \tan^{-1} 0.34513$

$= 19°2'28''$

ดังนั้น จึงได้ว่าตำแหน่งของเรือที่แล่นผ่านเส้นศูนย์สูตร (จุด D) มีลองจิจูดเท่ากับ $88°27' + 19°2'28'' = 107°29'28''$ ตะวันออก

(2) หา g หรือระยะทางระหว่าง D กับ A

โดยกฎเนเปียร์จะได้ว่า

$$\sin(90° - A) = \tan d \tan(90° - g)$$

หรือ $\tan g = \dfrac{\tan d}{\cos A}$

$\therefore \tan g = \dfrac{\tan 22°35'}{\cos 41°56'47''}$

$\approx \dfrac{0.41592}{0.74377}$

$= 0.55920$

$\therefore g \approx \tan^{-1} 0.55920$

$\approx 29°12'50''$

$= 29°12.84'$

$= \quad 1752.84'$

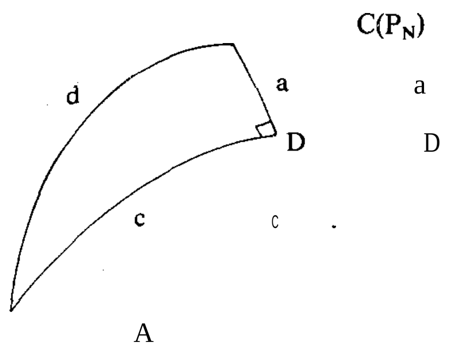
ดังนั้น จึงได้ว่าระยะทางจากจุดที่เรือแล่นผ่านเส้นศูนย์สูตรกับกัลกัตตาคือ 1752.84 ไมล์ทะเล

7. เครื่องบินลำหนึ่งบินจากโฮโนลูลู (ซึ่งมีละติจูด 21°18′ เหนือ, ลองจิจูด 157°52′ ตะวันตก) ด้วยแนวทาง 40°43′

7.1 จงหาจุดบนเส้นทางการบินที่อยู่ใกล้ขั้วโลกเหนือมากที่สุด

วิธีทำ จุดบนเส้นทางบินที่อยู่ใกล้ขั้วโลกเหนือมากที่สุดก็คือจุด D ซึ่งเป็นจุดที่เส้นเมริเดียนตั้งฉากกับเส้นทางการบิน

ให้ A คือ โฮโนลูลู ดังรูป



ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ACD ซึ่งมี D เป็นมุมฉาก จะได้ว่า

$$d = 90° - 21°18'$$
$$= 68°42'$$

และ $A = 40°43'$

จะหาจุดใกล้ขั้วโลกเหนือมากที่สุดคือ หาละติจูดและลองจิจูดของ D ดังนั้น จึงต้องหา a และ C

(1) Ml a

โดยกฎของเนเปียร์จะได้ว่า

$$\sin a = \cos(90° - d)\cos(90° - A)$$

หรือ $\sin a = \sin d \sin A$

$$= (\sin 68°42')(\sin 40°43')$$

$= (0.93169)(0.65232)$

$= 0.60776$

$\therefore\ a = \sin^{-1}\ 0.60776$

$= 37°25'39''$

(2) หา C

จาก $\sin(90° - d) = \tan(90° - A)\tan(90° - C)$

หรือ $\cot C = \cos d \tan A$

$= (\cos 68°42')(\tan 40°43')$

$= (0.36325)(0.86064)$

$= 0.31263$

$\therefore\ C = \cot^{-1} 0.31263$

$= 72°38'21''$

ดังนั้น จึงได้ว่าจุด D ซึ่งเป็นจุดบนเส้นทางบินที่อยู่ใกล้ขั้วโลกเหนือมากที่สุด โดยละติจูดของ D คือ

$90° - a = (90° - 37°25'39'')$ เหนือ

$= 52°34'21''$ เหนือ

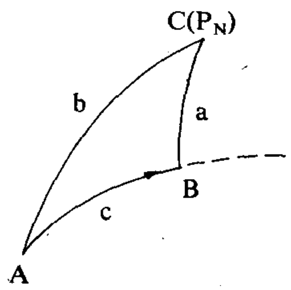
และลองจิจูดของ D คือ

$157°52' - C = 157°52' - 72°38'21''$ ตะวันตก

$= 85°13'39''$ ตะวันตก

7.2 จงหาตำแหน่งบนเส้นทางบินเมื่อมีค่าลองจิจูดเป็น 74° ตะวันตก

วิธีทำ ให้ A คือ โฮโนลูลู และ B คือตำแหน่งบนเส้นทางบินเมื่อมีค่าลองจิจูดเป็น 74° ตะวันตก ดังรูป



จากสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

$$b = 90° - 21°18'$$

$$= 68°42'$$

$$A = 40'43$$

และ $c = 157°52' - 74°$

$$= 83°52'$$

ในที่นี้ต้องการหาตำแหน่งของ B คือหาละติจูดของ B เมื่อมีค่าลองจิจูดเป็น 74" ตะวันตก (คือต้องหา a)

หา a

จากกฎของโคไซน์สำหรับด้าน จะได้ว่า

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\therefore \cos a = (\cos 68°42')(\cos 83°52') + (\sin 68°42')(\sin 83°52')(\cos 40°43')$$

$$= (0.36325)(0.10684) + (0.93169)(0.99428)(0.75794)$$

$$= 0.03881 + 0.70213$$

$$= 0.74094$$

$$\therefore a = \cos^{-1} 0.74094$$

$$= 42°11'18''$$

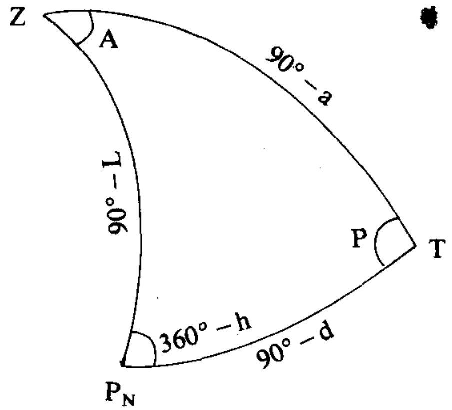
ดังนั้น จึงได้ว่าละติจูดของ B คือ $(90° - 42°11'18'')$ เหนือ ซึ่งก็คือ $47°48'42''$ เหนือนั่นเอง

เฉลยแบบฝึกหัด 7.4

1. จงแปลงค่าพิกัดจากระบบเส้นขอบฟ้าของวัตถุ T ไปเป็นระบบมุมชั่วโมง ถ้ากำหนดให้

   1.1 $A = 44°49'41''$, $a = 51°46'36''$ และ $L = 44°45'$ เหนือ

วิธีทำ เนื่องจาก A น้อยกว่า 180° จึงได้ว่า T อยู่ทางทิศตะวันออกของเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตการณ์ และ $L = 44°45'$ เหนือ T จึงอยู่ในครึ่งทรงกลมเหนือ จึงได้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ดังนี้



จากสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ P_NZT เราทราบค่า A, 90° − a และ 90° − L ตามกฎโคไซน์สำหรับด้านจึงได้ว่า

$$\cos(90° - d) = \cos(90° - a)\cos(90° - L) + \sin(90° - a)\sin(90° - L)\cos A$$

หรือ $\sin d = \sin a \sin L + \cos a \cos L \cos A$ ....(1)

และจากกฎของไซน์จะได้ว่า

$$\frac{\sin(90° - d)}{\sin A} = \frac{\sin(90° - a)}{\sin(360° - h)}$$

หรือ $$\frac{\cos d}{\sin A} = \frac{\cos a}{-\sin}$$

$\therefore \cos d \sin h = -\cos a \sin A$ ....(2)

และตามกฎห้าส่วนได้ว่า

$$\sin(90^\circ - d)\cos(360^\circ - h) = \cos(90^\circ \quad a)\sin(90^\circ - L) - \sin(90^\circ - a)\cos(90^\circ - L)\cos A$$

$$\therefore (\cos d)(\cos h) = \sin a \cos L - \cos a \sin L \cos A \quad \text{.........(3)}$$

หาร (2) ด้วย (3) ได้

$$\tan h = \frac{-\cos a \sin A}{\sin a \cos L - \cos a \sin L \cos A} \quad \text{..I......(4)}$$

จาก (1) ได้ว่า

$$\sin d = \sin a \sin L + \cos a \cos L \cos A$$

$$\therefore \sin d = (\sin 51^\circ 46' 36'')(\sin 44^\circ 45') + (\cos 51^\circ 46' 36'')(\cos 44^\circ 45')(\cos 44^\circ 49' 41'')$$

$$= (0.78561)(0.70401) + (0.61873)(0.71019)(0.70923)$$

$$= 0.55308 + 0.31165$$

$$= 0.86473$$

$$\therefore d = \sin^{-1} 0.86473$$

$= 59^\circ 51' 8''$ เหนือ

จาก (4) ได้ว่า

$$\tan h = \frac{-\cos a \sin A}{\sin a \cos L - \cos a \sin L \cos A}$$

$$= \frac{(-\cos 51^\circ 46' 36'')(\sin 44^\circ 49' 41'')}{(\sin 51^\circ 46' 36'')(\cos 44^\circ 45') - (\cos 51^\circ 46' 36'')(\sin 44^\circ 45')(\cos 44^\circ 49' 41'')}$$

$$= \frac{(-0.61873)(0.70498)}{(0.78561)(0.71019) - (0.61873)(0.70401)(0.70923)}$$

$$= \frac{-0.43619}{0.55793 - 0.30893}$$

$$\frac{0.43619}{0.24900}$$

$$= -1.7518$$

$$\therefore h = \tan^{-1}(-1.7518)$$

$= 360^\circ - 60^\circ 16' 50''$ ($\because$ ค่า tan h มีเศษเป็นลบและส่วนเป็นบวก)

$= 299^\circ 43' 10''$

ในที่นี้ T อยู่ทางทิศตะวันออกของเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตการณ์ (เพราะ A น้อยกว่า 180°) จึงได้

$h = 299^\circ 43' 10''$ หรือ $60^\circ 16' 50''$ ตะวันออก

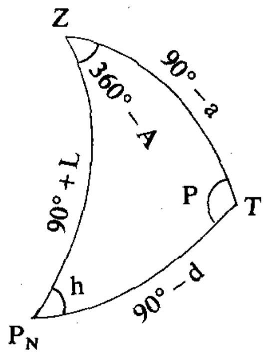
ดังนั้นจึงได้ว่า

ความบ่ายเบนของ T คือ 59°51′8″ เหนือ

และมุมชั่วโมงของ T คือ 299°43′10″ ตะวันตก

1.2 $A = 312°14'53''$, $a = 31°13'20''$ และ $L = 35''$ ได้

วิธีทำ เนื่องจาก A มากกว่า 180″ จึงได้ว่า T อยู่ทางทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตการณ์ และอยู่ในครึ่งทรงกลมใต้ จึงได้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ P_NZT ดังนี้



จากสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ P_NZT เราทราบค่า $360° - A$, $90° - a$ และ $90° + L$ ตามกฎโคไซน์สำหรับด้านจึงได้ว่า

$$\cos(90° \quad d) = \cos(90° - a)\cos(90° + L) + \sin(90° - a)\sin(90° + L)(\cos 360'' - A)$$

หรือ $$\sin d = \sin a(-\sin L) + \cos a \cos L \cos A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

และจากกฎของไซน์ จะได้ว่า

$$\frac{\sin(90° - d)}{\sin(360° - A)} = \frac{\sin(90° - a)}{\sin h}$$

หรือ $$\frac{\cos d}{-\sin A} = \frac{\cos a}{\sin h}$$

$$\therefore \cos d \sin h = -\cos a \sin A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

และตามกฎห้าส่วนได้ว่า

$$\sin(90° - d)\cos h = \cos(90° - a)\sin(90° + L) - \sin(90° - a)\cos(90° + L)\cos(360° - A)$$

$$\therefore \cos d \cos h = \sin a \cos L - \cos a(-\sin L)\cos A$$

$$= \sin a \cos L + \cos a \sin L \cos A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

หาร (2) ด้วย (3) ได้

$$\tan h = \frac{-\cos a \sin A}{\sin a \cos L + \cos a \sin L \cos A} \qquad \text{........ ..(4)}$$

จาก (1) ได้ว่า

$$\sin d = (\sin a)(-\sin L) + \cos a \cos L \cos A$$

$$\therefore \sin d = (\sin 31°13'20'')(-\sin 35°) + (\cos 31°13'20'')(\cos 35°)(\cos 312°14'53'')$$

$$= (\sin 31°13'20'')(-\sin 35°) + (\cos 31°13'20'')(\cos 35°)(\cos 47°45'7'')$$

$$= (0.51836)(-0.57358) + (0.85516)(0.81915)(0.67234)$$

$$= -0.29732 + 0.47098$$

$$= 0.17366$$

$$\therefore d = \sin^{-1} 0.17366$$

$$= 10°$$ เหนือ

จาก (4) ได้ว่า

$$\tan h = \frac{-\cos a \sin A}{\sin a \cos L + \cos a \sin L \cos A}$$

$$\therefore \tan h = \frac{(-\cos 31°13'20'')(\sin 312°14'53'')}{(\sin 31°13'20'')(\cos 35°) + (\cos 31°13'20'')(\sin 35°)(\cos 312°14'53'')}$$

$$= \frac{(-\cos 31°13'20'')(-\sin 47°45'7'')}{(\sin 31°13'20'')(\cos 35°) + (\cos 31°13'20'')(\sin 35°)(\cos 47°45'7'')}$$

$$= \frac{(-0.85516)(-0.74024)}{(0.51836)(0.81915) + (0.85516)(0.57358)(0.67234)}$$

$$= \frac{0.63302}{0.42461 + 0.32978}$$

$$= 0.83911$$

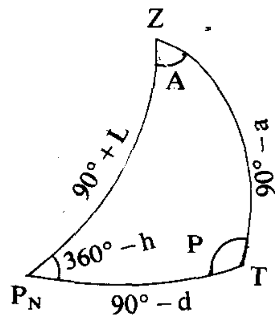
$$\therefore h = \tan^{-1} 0.83911$$

$$= 40°$$ ตะวันตก

ดังนั้นจึงได้ว่า ความบ่ายเบนของ T คือ 10° เหนือ และมุมชั่วโมงของ T คือ 40° ตะวันตก

1.3 $A = 85°59'35''$, $a = 36°40'18''$ และ $L = 45°$ ใต้

วิธีทำ เนื่องจาก A น้อยกว่า 180° จึงได้ว่า T อยู่ทางทิศตะวันออกของเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตการณ์และ L = 45° ใต้ T จึงอยู่ในครึ่งทรงกลมใต้ จึงได้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยม-ดาราศาสตร์ดังนี้



จากสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ P_NZT เราทราบค่า A, 90° − a และ 90° + L ตามกฎโคไซน์สำหรับด้านจึงได้ว่า

$$\cos(90^\circ - d) = \cos(90^\circ - a)\cos(90^\circ + L) + \sin(90^\circ - a)\sin(90^\circ + L)\cos A$$

หรือ $\sin d = \sin a(-\sin L) + \cos a \cos L \cos A$

$$\therefore \sin d = \sin 36^\circ40'18''(-\sin 45^\circ) + \cos 36^\circ40'18'' \cos 45^\circ \cos 85^\circ59'35''$$

$$= (0.59723)(-0.70711) + (0.80207)(0.70711)(0.06988)$$

$$= (-0.42231) + (0.03963)$$

$$= -0.38268$$

$$\therefore d = \sin^{-1}(-0.38268)$$

$= -22^\circ30'$ หรือ $22^\circ30'$ ใต้ หรือ $202^\circ30'$ เหนือ

ดังนั้น ความบ่ายเบน คือ $22^\circ30'$ ใต้ หรือ $202^\circ30'$ เหนือ และจากกฎของไซน์ได้ว่า

$$\frac{\sin(90^\circ - d)}{\sin A} = \frac{\sin(90^\circ - a)}{\sin(360^\circ - h)}$$

หรือ $\dfrac{\cos d}{\sin A} = -\dfrac{\cos a}{\sin h}$

$$\therefore \cos d \sin h = -\cos a \sin A \qquad \text{..........(1)}$$

และจากกฎห้าส่วนได้ว่า

$$\sin(90^\circ - d)\cos(360^\circ - h) = \cos(90^\circ - a)\sin(90^\circ + L) - \sin(90^\circ - a)\cos(90^\circ + L)\cdot\cos A$$

$$\therefore \cos d \cos h = \sin a \cos L - \cos a(-\sin L)\cos A \qquad \text{..........(2)}$$

หาร (1) ด้วย (2) ได้

$$\tan h = \frac{-\cos a \sin A}{\sin a \cos L + \cos a \sin L \cos A}$$

$$\therefore \tan h = \frac{(-\cos 36°40'18'')(\sin 85°59'35'')}{(\sin 36°40'18'')(\cos 45°)+(\cos 36°40'18'')(\sin 45°)(\cos 85°59'35'')}$$

$$= \frac{(-0.80207)(0.99755)}{(0.59723)(0.70711)+(0.80207)(0.70711)(0.06988)}$$

$$= \frac{-0.80010}{0.42231+0.03963}$$

$$= -1.7320$$

$$\therefore h = \tan^{-1}(-1.7320)$$

$= 360° - 60°$ ($\because$ ค่า $\tan h$ มีเศษเป็นลบ และส่วนเป็นบวก)

$= 300°$

ดังนั้น มุมชั่วโมงคือ $360° - 60° = 300°$ ตะวันตกหรือ $60°$ ตะวันออก

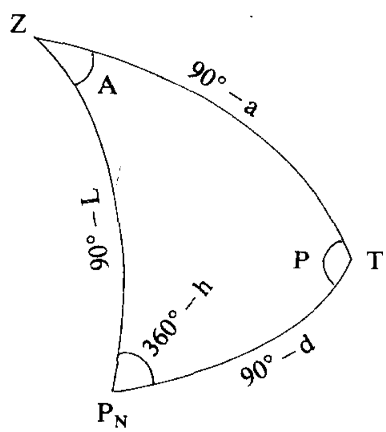
นั่นคือความบ่ายเบนของ T คือ $22°30'$ ใต้ หรือ $202°30'$ เหนือ และมุมชั่วโมงของ T คือ $300°$ ตะวันตก หรือ $60°$ ตะวันออก

2. จงแปลงค่าพิกัดจากระบบมุมชั่วโมงของวัตถุ T ไปเป็นระบบเส้นขอบฟ้า ถ้ากำหนดให้

2.1 $d = 59°56'$ เหนือ, $h = 299°28'$ ตะวันตก และ $L = 44°45'$ เหนือ

วิธีทำ ในที่นี้ T อยู่ในครึ่งทรงกลมเหนือ และอยู่ทางทิศตะวันออกของเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตการณ์ โดย $h = 299°28'$ ตะวันตก

พิจารณารูป



จากรูปสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ P_NZT เราทราบค่า $90° - d$, h และ $90° - L$

หา a ตามกฎโคไซน์สำหรับด้านจะได้ว่า

$$\cos(90° - a) = \cos(90° - d)\cos(90° - L) + \sin(90° - d)\sin(90° - L)\cos(360° - h)$$

หรือ $\sin a = \sin d \sin L + \cos d \cos L \cos h$

$\therefore \sin a = (\sin 59°56')(\sin 44°45') + (\cos 59°56')(\cos 44°45')(\cos 60°32')$

$= (0.86544)(0.70401) + (0.50101)(0.71019)(0.49192)$

$= 0.60928 + 0.17503$

$= 0.78431$

$\therefore a = \sin^{-1} 0.78431$

$= 51°39'23''$

Ml A

จากกฎของโคไซน์จะได้ว่า

$$\frac{\sin(90° - d)}{\sin A} = \frac{\sin(90° - a)}{\sin(360° - h)}$$

$$\frac{\cos d}{\sin A} = \frac{\cos a}{-\sin h}$$

$\therefore \cos a \sin A = -\cos d \sin h$ ....(1)

ตามกฎห้าส่วนได้ว่า

$\sin(90° - a)\cos A = \cos(90° - d)\sin(90° - L) - \sin(90° - d)\cos(90° - L)\cos(360° - h)$

$\therefore \cos a \cos A = \sin d \cos L - \cos d \sin L \cos h$ ....(2)

หาร (1) ด้วย (2) ได้

$$\tan A = \frac{-\cos d \sin h}{\sin d \cos L - \cos d \sin L \cos h}$$ ....(3)

$$\therefore \tan A = \frac{(-\cos 59°56')(\sin 299'28')}{(\sin 59°56')(\cos 44°45') - (\cos 59°56')(\sin 44°45')\cos(299°28')}$$

$$= \frac{(-\cos 59°56')(-\sin 60'32')}{(\sin 59°56')(\cos 44°45') - (\cos 59°56')(\sin 44°45')(\cos 60'32')}$$

$$= \frac{(-0.50101)(-0.87064)}{(0.86544)(0.71019) - (0.50101)(0.70401)(0.49192)}$$

$$\frac{0.43620}{0.61463 - 0.17351}$$

$$\frac{0.43620}{0.44112}$$

$= 0.98885$

$\therefore A = \tan^{-1} 0.98885$

$= 44040'43''$

ดังนั้น จึงได้ว่าระดับความสูงของ T คือ 51°39′23″ และแอซิมัทของ T คือ 44°40′43″

2.2 d = 10° เหนือ, h = 40° ตะวันตก และ L = 35° ใต้

วิธีทำ ในที่นี้ T อยู่ในครึ่งทรงกลมใต้ และอยู่ทางทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตการณ์ ในสามเหลี่ยม P_NZT จึงใช้ด้าน $P_NZ = 90° + L$ และ $\angle ZP_NT$ คือ h และ $\angle P_NZT$ คือ $360° - A$

หา a

จาก $\cos(90° - a) = \cos(90° - d)\cos(90° + L) + \sin(90° - d)\sin(90° + L)\cos h$

หรือ $\sin a = (\sin d)(-\sin L) + \cos d \cos L \cos h$

$\therefore \sin a = (\sin 10°)(-\sin 35°) + (\cos 10°)(\cos 35°)(\cos 40°)$

$= (0.17365)(-0.57358) + (0.98481)(0.81915)(0.76604)$

$= (-0.09960 + 0.61797)$

$= 0.51837$

$\therefore a = \sin^{-1} 0.51837$

$= 31°13'22''$

หา A

จาก $\tan A = \dfrac{-\cos d \sin h}{\sin d \cos L - \cos d(-\sin L)\cos h}$

$\therefore \tan A = \dfrac{(-\cos 10°)(\sin 40°)}{(\sin 10°)(\cos 35°) + (\cos 10°)(\sin 35°)(\cos 40°)}$

$= \dfrac{(-0.98481)(0.64279)}{(0.17365)(0.81915) + (0.98481)(0.57358)(0.76604)}$

$= \dfrac{-0.63302}{0.14224 + 0.43271}$

$= \dfrac{-0.63302}{0.57495}$ (เศษเป็นลบ, ส่วนเป็นบวก)

$= -1.101$

$\therefore A = \tan^{-1}(-1.101)$

$= 360° - 47°45'8''$

$= 312°14'52''$

ดังนั้น จึงได้ว่า ระดับความสูงของ T คือ 31°13′22″ และแอซิมัทของ T คือ 312°14′52″

2.3 $d = 22°30'$ ใต้, $h = 300°$ ตะวันตก และ $L = 45°$ ใต้

วิธีทำ ในที่นี้ T อยู่ในครึ่งทรงกลมใต้ และอยู่ทางทิศตะวันออกของเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตการณ์ และความบ่ายเบนอยู่ใต้เส้นขอบฟ้า ในสามเหลี่ยม P_NZT จึงใช้ด้าน $P_NZ = 90° + L$, $\angle ZP_NT$ คือ $360° - h$, $\angle P_NZT$ คือ A และด้าน $P_NT = 90° + d$

หา a

จาก $\cos(90° - a) = \cos(90° \text{ t } d)(\cos 90\text{”} + L) \text{ t } \sin(90° \text{ t } d)\sin(90° + L)\cos(360° - h)$

$$\therefore \sin a = (-\sin d)(-\sin L) \text{ t } (\cos d)(\cos L)(\cos h)$$

$$= \sin d \sin L + \cos d \cos L \cosh$$

$$= (\sin 22°30')(\sin 45\text{”}) \text{ t } (\cos 22°30')(\cos 45°)(\cos 300\text{”})$$

$$= (\sin 22°30')(\sin 45\text{”}) \text{ t } (\cos 22°30')(\cos 45°)(\cos 60\text{”})$$

$$= (0.38268)(0.70711) \text{ t } (0.92388)(0.70711)(0.50000)$$

$$= 0.27060 + 0.32664$$

$$= 0.59724$$

$$\therefore a = \sin^{-1} 0.59724$$

$$= 36°40'21''$$

หา A

$$\tan A = \frac{-\cos d \sin h}{-\sin d \cos L + \cos d \sin L \cosh}$$

$$= \frac{(-\cos 22°30')(\sin 300\text{”})}{(-\sin 22°30')(\cos 45\text{”}) + (\cos 22°30')(\sin 45°)(\cos 300°)}$$

$$= \frac{(-\cos 22°30')(-\sin 60\text{”})}{(-\sin 22°30')(\cos 45\text{”}) \text{ t } (\cos 22°30')(\sin 45°)(\cos 60\text{”})}$$

$$= \frac{(-0.92388)(-0.86603)}{(-0.38268)(0.70711) \text{ t } (0.92388)(0.70711)(0.50000)}$$

$$= \frac{0.80011}{-0.27060 + 0.32664}$$

$$= \frac{\text{‘}0.80011}{0.05604}$$

$$= 14.277$$

$$\therefore A = \tan^{-1} 14.277$$

$$= 88°59'36''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า ระดับความสูงของ T คือ $36°40'21''$ และแอซิมัทของ T คือ $85°59'36''$

3. จงแปลงค่าพิกัดจากระบบไรท์แอสเซนชันของวัตถุ T ไปเป็นระบบมุมชั่วโมง เมื่อกำหนดให้

3.1 $S.T. = 4^h20^m30^s$, $a = 12^h31^m10^s$, $.d = 24°30'$

วิธีทำ จาก $S.T. = 4^h20^m30^s$

และ $a = 12^h31^m10^s$

$\therefore h = S.T. - \alpha$

$= -9^h49^m20^s + 24^h$

$= 15^h49^m20^s$

และ $\delta = 24°30'$

ดังนั้น ค่าพิกัดในระบบมุมชัวโมงคือ $d = 24°30'$ และ $h = 15^h49^m20^s$

3.2 $S.T. = 12^h15^m20^s$, $\alpha = 5^h4^m3^s$, $d = 15'16'20''$

วิธีทำ llfI $S.T. = 12^h15^m20^s$

และ $\alpha = 5^h4^m3^s$

.. $h = S.T. - \alpha$

$= 7^h11^m17^s$

และ $d = 15°16'20''$

ดังนั้น ค่าพิกัดในระบบมุมชัวโมงคือ $d = 15°16'20''$ และ $h = 7^h11^m17^s$

4. จงแปลงค่าพิกัดที่หาได้ในข้อ 3 จากระบบมุมชั่วโมงของวัตถุ T ไปเป็นระบบไรท์แอสเซนชัน

4.1 $S.T. = 4^h20^m30^s$, $h = 15^h49^m20^s$ และ $d = 24°30'$

9 4
วิธีทำ จาก $S.T. = 4^h20^m30^s$

และ $h = 15^h49^m20^s$

.: $\alpha = S\ T - h = -12^h31^m10^s + 24^h$

$= 12^h31^m10^s$

ดังนั้น ค่าพิกัดในระบบไรท์แอสเซนชันคือ $d = 24°30'$ และ $\alpha = 12^h31^m10^s$

4.2 $S.T. = 12^h15^m20^s$, $h = 7^h11^m17^s$ และ $d = 15°16'20''$

วิธีทำ จาก $S.T. = 12^h15^m20^s$

และ $h = 7^h11^m17^s$

$\therefore \alpha = S.T. - h$

$= 5^h4^m3^s$

ดังนั้น ค่าพิกัดในระบบไรท์แอสเซนชันคือ $d = 15°16'20''$ และ $\alpha = 5^h4^m3^s$

5. จงแปลงค่าพิกัดจากระบบไรท์แอสเซนชันของวัตถุ T ไปเป็นระบบอิคลิบติก เมื่อกำหนดให้

5.1 $a = 2^h15^m50^s$, $d = 89°6'$ และ $\varepsilon = 23°27'$

วิธีทำ จาก $a = 2^h15^m50^s$

จึงได้ว่า $\alpha = 33°57'30''$

หา β

จาก $\sin\beta = \sin d \cos\varepsilon - \cos d \sin\varepsilon \sin a$

$\therefore \sin\beta = (\sin 89°6')(\cos 23°27') - (\cos 89°6')(\sin 23°27')(\sin 33'57'30'')$

$= (0.99988)(0.91741) - (0.01571)(0.39795)(0.55859)$

$= 0.91730 - 0.00349$

$= 0.91381$

$\therefore \beta = \sin^{-1} 0.91381$

$= 66°2'15''$

หา λ

จาก $\tan\lambda = \dfrac{\sin d \sin\varepsilon + \cos d \cos\varepsilon \sin\alpha}{\cos a \cos d}$

$\therefore \tan\lambda = \dfrac{(\sin 89°6')(\sin 23°27') + (\cos 89°6')(\cos 23°27')(\sin 33°57'30'')}{(\cos 33°57'30'')(\cos 89°6')}$

$= \dfrac{(0.99988)(0.39795) + (0.01571)(0.91741)(0.55859)}{(0.82944)(0.01571)}$

$= \dfrac{0.39790 + 0.00805}{0.01303}$

$= 31.155$

$\therefore \lambda = \tan^{-1} 31.155$

$= \quad 88°9'41''$

ดังนั้น จึงได้ว่า อิคลิบติกละติจูดหรือละติจูดท้องฟ้า (β) ของ T คือ 66°2′15″ และอิคลิบติกลองจิจูดหรือลองจิจูดท้องฟ้า (α) ของ T คือ 88°9′41″

5.2 $a = 14^h1^m57^s$, $d = 64°48'48''$ และ $\varepsilon = 23°27'$

วิธีทำ จาก $\alpha = 14^h1^m57^s$

จึงได้ว่า $a = 210°29'15''$

หา β

จาก $\sin\beta = \sin d \cos\varepsilon - \cos d \sin\varepsilon \sin\alpha$

$= (\sin 64°48'48'')(\cos 23°27') - (\cos 64°48'48'')(\sin 23°27')(\sin 210°29'15'')$

$= (\sin 64°48'48'')(\cos 23°27') - (\cos 64°48'48'')(\sin 23°27')(\quad \sin 30°29'15'')$

$= (0.90490)(0.91741) \quad (0.42857)(0.39795)(-0.50735)$

$= 0.83016 + 0.08653$

$= 0.91669$

$\therefore \beta = \sin^{-1} 0.91669$

$= 66°26'49''$

หา λ

จาก $\tan\lambda = \dfrac{\sin d \sin\varepsilon + \cos d \cos\varepsilon \sin a}{\cos a \cos d}$

$\therefore$ "$\tan\lambda = \dfrac{(\sin 64°48'48'')(\sin 23°27') + (\cos 64°48'48'')(\cos 23°27')(\sin 210°29'15'')}{(\cos 210°29'15'')(\cos 64°48'48'')}$

$= \dfrac{(\sin 64°48'48'')(\sin 23°27') + (\cos 64°48'48'')(\cos 23°27')(-\sin 30°29'15'')}{(-\cos 30°29'15'')(\cos 64°48'48'')}$

$= \dfrac{(0.90490)(0.39795) + (0.42857)(0.91741)(-0.50735)}{(-0.86174)(0.42857)}$

$= \dfrac{0.36010-0.19948}{-0.36932}$

$= \dfrac{0.16062}{-0.36932}$ (เศษเป็นบวก ส่วนเป็นลบ)

$= -0.43491$

$\therefore \lambda = \tan^{-1}(-0.43491)$

$= 180° - 23°30'17''$ ($\because$ เศษเป็นบวกส่วนเป็นลบ)

$= \quad 156°29'43''$

ดังนั้นจึงได้ว่า อิคลิบติกละติจูดหรือละติจูดท้องฟ้า (β) ของ T คือ $66°26'49''$ และอิคลิบติกลองจิจูด หรือลองจิจูดท้องฟ้า (λ) ของ T คือ $156°29'43''$

6. จงแปลงค่าพิกัดที่หาได้ในข้อ 5. จากระบบอิคลิบติกของวัตถุ T ไปเป็นระบบไรท์แอสเซนชัน

6.1 $\beta = 66°2'15''$, $\lambda = 88°9'41''$ และ $\varepsilon = 23°27'$

วิธีทำ หา d

จาก $\sin d = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda$

$$\therefore \sin d = (\sin 66°2'15'')(\cos 23°27') + (\cos 66°2'15'')(\sin 23°27')(\sin 88°9'41'')$$

$$= (0.91381)(0.91741) + (0.40614)(0.39795)(0.99949)$$

$$= 0.83834 + 0.16154$$

$$= 0.99988$$

$$\therefore d = \sin^{-1} 0.99988$$

$$= 89°6'$$

หา α

จาก $\tan\alpha = \dfrac{-\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda}{\cos I\cos\beta}$

$$\therefore \tan a = \frac{(-\sin 66°2'15'')(\sin 23°27') + (\cos 66°2'15'')(\cos 23°27')(\sin 88°9'41'')}{(\cos 88°9'41'')(\cos 66°2'15'')}$$

$$= \frac{(-0.91381)(0.39795) + (0.40614)(0.91741)(0.99949)}{(0.03208)(0.40614)}$$

$$= \frac{-0.36365 + 0.37241}{0.01303}$$

$$= \frac{0.00876}{0.01303}$$

$$= 0.67229$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1} 0.67229$$

$$= 33°54'46''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า $d = 89°6'$ และ $a = 33°54'46''$

6 . 2 $\beta = 66°26'49''$, $\lambda = 156°29'43''$, $\varepsilon = 23°27'$

หา d

จาก $\sin d = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda$

$\therefore \sin d = (\sin 66°26'49'')(\cos 23°27') + (\cos 66°26'49'')(\sin 23°27')(\sin 156°29'43'')$

$= (\sin 66°26'49'')(\cos 23°27') + (\cos 66°26'49'')(\sin 23°27')(\cos 66°29'43'')$

$= (0.91669)(0.91741) + (0.39987)(0.39795)(0.39983)$

$= 0.84098 + 0.06362$

$= 0.90460$

$\therefore d = \sin^{-1} 0.90460$

$= 64°46'10''$

หา α

จาก $\tan\alpha = \dfrac{-\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda}{\cos\lambda\cos\beta}$

$\therefore \tan a = \dfrac{(-\sin 66°26'49'')(\sin 23°27') + (\cos 66°26'49'')(\cos 23°27')(\sin 156°29'43'')}{(\cos 156°29'43'')(\cos 66°26'49'')}$

$= \dfrac{(-\sin 66°26'49'')(\sin 23°27') + (\cos 66°26'49'')(\cos 23°27')(\cos 66°29'43'')}{(-\sin 66°29'43'')(\cos 66°26'49'')}$

$= \dfrac{(-0.91669)(0.39795) + (0.39987)(0.91741)(0.39983)}{(-0.91701)(0.39987)}$

$= \dfrac{-0.36480 + 0.14667}{-0.36668}$

$= \dfrac{-0.21813}{-0.36668}$ (เศษเป็นลบ, ส่วนเป็นลบ)

$\therefore a = \tan^{-1} 0.59488$

$= 180° + 30°44'51''$ (เพราะว่าเป็นมุมที่อยู่ในจตุตภาคที่สาม)

$= 210°44'51''$

ดังนั้น จึงได้ว่า $d = 64°46'10''$ และ $\alpha = 210°44'51''$

เฉลยแบบฝึกหัด 7.5

1. จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏทั้งก่อนเที่ยงวันและหลังเที่ยงวัน ของสถานที่แห่งหนึ่งซึ่งอยู่ที่ละติจูด 62°37′48″ เหนือ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 40°10′ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น 15°38′

วิธีทำ ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า

TZ = 90° − ระดับความสูง

$= 90° - 40°10'$

$= 49°50'$

TP_N = 90° − ความบ่ายเบน

$= 90° - 15°38'$

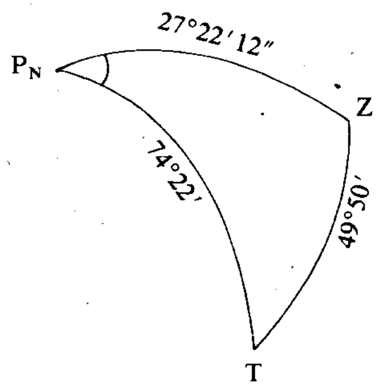
$= 74°22'$

และ ZP_N = 90° − ละติจูด

$= 90° - 62°37'48''$

$= 27°22'12''$

ดังรูป



จากสูตรโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$\cos TZ = \cos TP_N \cos ZP_N + \sin TP_N \sin ZP, \cos P_N$$

หรือ $\cos P_N = \dfrac{\cos TZ \quad \cos TP, \cos ZP,}{\sin TP, \sin ZP,}$

$$\therefore \cos P_N = \frac{\cos 49°50' - (\cos 74°22')(\cos 27°22'12'')}{(\sin 74°22')(\sin 27°22'12'')}$$

$$= \frac{(0.64501) - (0.26948)(0.88805)}{(0.96301)(0.45973)}$$

$$= \frac{0.40570}{0.44272}$$

$$= 0.91638$$

$$\therefore P_N = \cos^{-1} 0.91638$$

$$= 23°35'50''$$

นั่นคือ $\angle ZP_NT = 23°35'50''$

$$= 1^h34^m23.3^s$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

i) ก่อนเที่ยงวันเวลาท้องถิ่นปรากฏคือ

$$12^h - 1^h34^m23.3^s = 10^h25^m36.7^s$$

หรือ 10 : 25 : 36.7 A.M. (ก่อนเที่ยง)

ii) หลังเที่ยงวันเวลาท้องถิ่นปรากฏคือ

$$12^h + 1^h34^m23.3^s = 13^h34^m23.3^s$$

หรือ 1 : 34 : 23.3 P.M. (หลังเที่ยง)

2. จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏที่กรุงวอชิงตัน ดี.ซี. ซึ่งอยู่ที่ละติจูด 38°55′ เหนือ ในขณะเวลาหลังเที่ยงวันเมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 25°40′ เหนือ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น $-19°15'$

วิธีทำ ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า

$$TZ = 90° - \text{ระดับความสูง}$$

$$= 90° - 25°40'$$

$$= 64°20'$$

$$TP, = 90° - \text{ความบ่ายเบน}$$

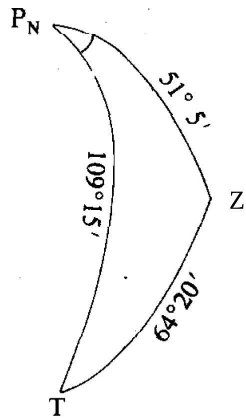
$= \quad 90° - (-19°15')$

$= \quad 109°15'$

และ $\quad ZP_N \quad = 90” \;-$ ละติจูด

$= \quad 90° - 38°55'$

$= \quad 51°5'$



จากสูตรโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$\cos TZ = \cos TP_N \cos ZP_N + \sin TP_N \sin ZP_N \cos P_N$$

หรือ $\quad \cos P_N = \dfrac{\cos TZ - \cos TP, \cos ZP,}{\sin TP_N \sin ZP_N}$

$$\therefore \cos P_N = \frac{\cos 64°20' - (\cos 109°15')(\cos 51°5')}{(\sin 109°15')(\sin 51°5')}$$

$$= \frac{\cos 64°20' - (-\sin 19°15')(\cos 51°5')}{(\cos 19°15')(\sin 51°5')}$$

$$= \frac{(0.43313) - (-0.32969)(0.62819)}{(0.94409)(0.77806)}$$

$$= \frac{0.64024}{0.73456}$$

$$= 0.87160$$

$$\therefore P_N = \cos^{-1} 0.87160$$

$$= 29°21'17''$$

นั่นคือ $\angle ZP_NT = 29°21'17''$

$$= 1^h57^m25.1^s$$

ดังนั้น จึงได้ว่า เวลาท้องถิ่นปรากฏที่กรุงวอชิงตัน ดี.ซี. ในขณะหลังเที่ยงวัน คือ $12^h + 1^h57^m25.1^s = 13^h57^m25.1^s$ หรือ 1 : 57 : 25.1 P.M.

3. จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏในตอนเช้าที่

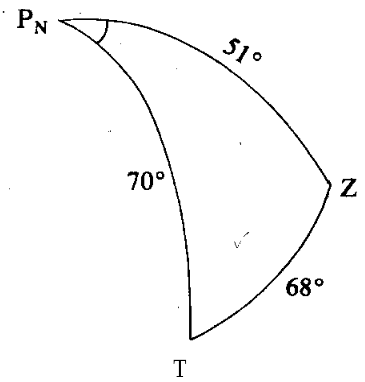
3.1 ละติจูด 39° เหนือ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 22° และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น +20°

วิธีทำ ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า

$$TZ = 90° - \text{ระดับความสูง}$$
$$= 90° - 22°$$
$$= 68°$$
$$TP_N = 90° - \text{ความบ่ายเบน}$$
$$= 90° - 20°$$
$$= 70°$$

และ
$$ZP_N = 90° - \text{ละติจูด}$$
$$= 90° - 39°$$
$$= 51°$$

ดังรูป



จากสูตรโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$\cos TZ = \cos TP, \cos ZP_N + \sin TP_N \sin ZP_N \cos P_N$$

หรือ
$$\cos P_N = \frac{\cos TZ - \cos TP_N \cos ZP_N}{\sin TP_N \sin ZP,}$$

$$\therefore \cos P_N = \frac{\cos 68" - (\cos 70°)(\cos 5\ 1")}{(\sin 70°)(\sin 5\ 1")}$$

$$= \frac{(0.37461) - (0.34202)(0.62932)}{(0.93969)(0.77715)}$$

$$= \frac{0.15937}{0.73028}$$

$$= 0.21823$$

$$P_N = \text{cod } 0.21823$$

$$= 77°23'41''$$

$$= 5^h9^m34.7^s$$

ดังนั้นจึงได้ว่า เวลาท้องถิ่นปรากฏในตอนเช้าคือ $12^h - 5^h9^m34.7^s = 6^h50^m25.3^s$ หรือ 6 : 50 : 25.3 A.M. (ก่อนเที่ยง)

3.2 ละติจูด $45°24'$ เหนือ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น $24°12'$ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น $+13°16'$

วิธีทำ ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า

$$TZ = 90" - \text{ระดับความสูง}$$

$$= 90" - 24°12'$$

$$= 65°48'$$

$$TP_N = 90" - \text{ความบ่ายเบน}$$

$$= 90° - 13°16'$$

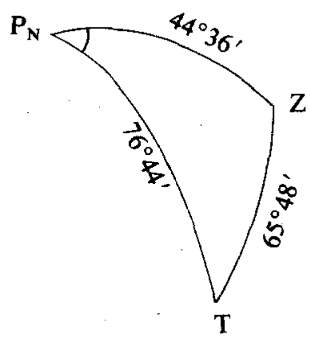
$$= 76°44'$$

และ $$ZP_N = 90" - \text{ละติจูด}$$

$$= 90" - 45°24'$$

$$= 44°36'$$

ดังรูป



จากสูตรโคไซน์สำหรับด้านจะได้ว่า

$$\cos TZ = \cos TP_N \cos ZP_N + \sin TP_N \sin ZP_N \cos P_N$$

หรือ $$\cos P_N = \frac{\cos TZ - \cos TP, \cos ZP,}{\sin TP, \sin ZP_N}$$

$$\therefore \cos P_N = \frac{\cos 65°48' - (\cos 76°44')(\cos 44'36')}{(\sin 76°44')(\sin 44°36')}$$

$$= \frac{(0.40992) \quad (0.22948)(0.71203)}{(0.97331)(0.70215)}$$

$$= \frac{0.24652}{0.68341}$$

$$= 0.36072$$

$$\therefore P_N = \cos^{-1} 0.36072$$

$$= 68°51'20''$$

$$= 4^h35^m25.3^s$$

ดังนั้นจึงได้ว่า เวลาท้องถิ่นปรากฏในตอนเช้าคือ $12^h - 4^h35^m25.3^s = 7^h24^m34.7^s$ หรือ 7 : 24 : 34.7 A.M. (ก่อนเที่ยง)

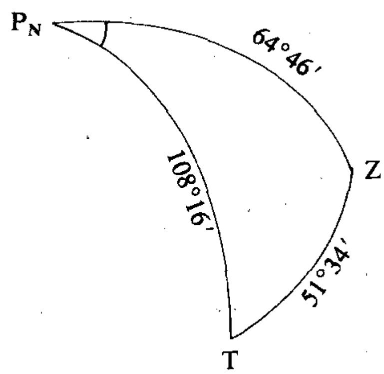
3.3 ละติจูด 25°14′ เหนือ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 38°26′ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น −18°16′

วิธีทำ ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า

$$TZ = 90° - \text{ระดับความสูง}$$
$$= 90° - 38°26'$$
$$= 51°34'$$
$$TP_N = 90° - \text{ความบ่ายเบน}$$
$$= 90° - (-18°16')$$
$$= 108°16'$$

และ $$ZP_N = 90° - \text{ละติจูด}$$
$$= 90° - 25°14'$$
$$= 64°46'$$

ดังรูป



จากสูตรโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$\cos TZ = \cos TP_N \cos ZP_N + \sin TP_N \sin ZP, \cos P_N$$

หรือ $\cos P_N = \dfrac{\cos TZ - \cos TP_N \cos ZP,}{\sin TP_N \sin ZP_N}$

$$\therefore \cos P_N = \frac{\cos 51°34' - (\cos 108°16')(\cos 64°46')}{(\sin 108°16')(\sin 64'46')}$$

$$= \frac{\cos 51°34' - (-\sin 18°16')(\cos 64°46')}{(\cos 18°16')(\sin 64°46')}$$

$$= \frac{(0.62160) - (-0.31344)(0.42631)}{(0.94961)(0.90458)}$$

$$= \frac{0.75522}{0.85900}$$

$$= 0.87918$$

$$\therefore P_N = \cos^{-1} 0.87918$$

$$= 28°27'21''$$

$$= 1^h53^m49.4^s$$

ดังนั้นจึงได้ว่า เวลาท้องถิ่นปรากฏในตอนเช้าคือ $12^h - 1^h53^m49.4^s = 10^h6^m10.6^s$ หรือ 10 : 6 : 10.6 A.M. (ก่อนเที่ยง)

4. จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏในตอนบ่ายที่

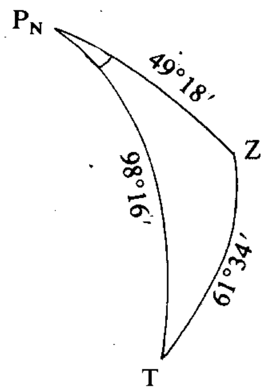
4.1 ละติจูด 40°42′ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 28°26′ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น $-8°16'$

วิธีทำ ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า

$$TZ = 90° - \text{ระดับความสูง}$$
$$= 90° - 28°26'$$
$$= 61°34'$$
$$TP_N = 90° - \text{ความบ่ายเบน}$$
$$= 90° - (-8°16')$$
$$= 98°16'$$

และ $ZP_N = 90° - \text{ละติจูด}$
$$= 90° - 40°42'$$
$$= 49°18'$$

ดังรูป



จากสูตรโคไซน์สำหรับด้านจะได้ว่า

$$\cos TZ = \cos TP_N \cos ZP_N + \sin TP_N \sin ZP_N \cos P_N$$

หรือ $$\cos P_N = \frac{\cos TZ - \cos TP_N \cos ZP_N}{\sin TP_N \sin ZP_N}$$

$$\therefore \cos P_N = \frac{\cos 61°34' - (\cos 98°16')(\cos 49°18')}{(\sin 98°16')(\sin 49°18')}$$

$$= \frac{\cos 61°34' - (-\sin 8°16')(\cos 49°18')}{(\cos 8°16')(\sin 49°18')}$$

$$= \frac{(0.47614) - (-0.14378)(0.65210)}{(0.98961)(0.75813)}$$

$$= \frac{0.56990}{0.75025}$$

$= 0.75961$

$\therefore P_N = \cos^{-1} 0.75961$

$= 40°34'13''$

$= 2^h42^m16.8^s$

ดังนั้น จึงได้ว่าเวลาท้องถิ่นปรากฏในตอนบ่ายคือ $12^h + 2^h42^m16.8^s = 14^h42^m16.8^s$ หรือ 2 : 42 : 16.8 P.M. (หลังเที่ยง)

4.2 ละติจูด 42°45′ เมื่อระดับความสูงของดวงอาทิตย์เป็น 38°36′ และความบ่ายเบนของดวงอาทิตย์เป็น +18°27′

วิธีทำ ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า

$TZ = 90° -$ ระดับความสูง

$= 90° - 38°36'$

$= 51°24'$

$TP_N = 90° -$ ความบ่ายเบน

$= 90° - 18°27'$

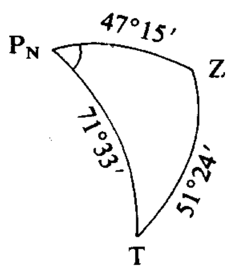
$= 71°33'$

และ $ZP_N = 90° -$ ละติจูด

$= 90° - 42°45'$

$= 47°15'$

ดังรูป



จากสูตรโคไซน์สำหรับด้านจะได้ว่า

$$\cos TZ = \cos TP_N \cos ZP_N + \sin TP_N \sin ZP_N \cos P_N$$

หรือ $$\cos P_N = \frac{\cos TZ - \cos TP_N \cos ZP_N}{\sin TP_N \sin ZP_N}$$

$$\therefore \cos P_N = \frac{\cos 51°24' - (\cos 71°33')(\cos 47°15')}{(\sin 71°33')(\sin 47°15')}$$

$$= \frac{(0.62388) - (0.31648)(0.67880)}{(0.94860)(0.73432)}$$

$$= \frac{0.40905}{0.69658}$$

$$= 0.58723$$

$$P_N = \cos^{-1} 0.58723$$

$$= 54°2'21''$$

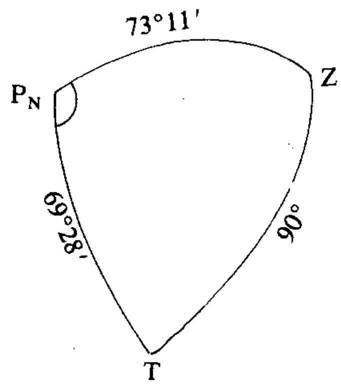
$$= 3^h36^m9.4^s$$

ดังนั้น จึงได้ว่าเวลาท้องถิ่นปรากฏในตอนบ่ายคือ $12^h + 3^h36^m9.4^s = 15^h36^m9.4^s$ หรือ 3 : 36 : 9.4 P.M. (หลังเที่ยง)

5. จงหาเวลาท้องถิ่นปรากฏขณะดวงอาทิตย์ขึ้นและขณะดวงอาทิตย์ตกในวันที่ดวงอาทิตย์มีความบ่ายเบนเป็น $+20°32'$ ที่

5.1 Acapulco ซึ่งมีละติจูดเป็น $16°49'$ เหนือ

วิธีทำ ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า



$$TZ = 90° - \text{ระดับความสูง}$$

$$= 90° - 0°$$

$$= 90°$$

$$TP_N = 90° - \text{ความบ่ายเบน}$$

$$= 90° - 20°32'$$

$$= 69°28'$$

และ $ZP_N = 90° -$ ละติจูด

$= 90° - 16°49'$

$= 73°11'$

จึงได้ว่า ZP_NT เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ซึ่งอาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎเนเปียร์กับสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $Z'P'_NT'$ ของสามเหลี่ยม ZP_NT ก็ได้ แต่ในที่นี้จะแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับด้าน กับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ZP_NT โดยจะได้ว่า

$$\cos TZ = \cos TP_N \cos ZP_N + \sin TP_N \sin ZP_N \cos P_N$$

หรือ $$\cos P_N = \frac{\cos TZ - \cos TP_N \cos ZP_N}{\sin TP_N \sin ZP_N}$$

$$\therefore \cos P_N = \frac{\cos 90° - (\cos 69°28')(\cos 73°11')}{(\sin 69°28')(\cos 73°11')}$$

$$= \frac{0-(0.35075)(0.28931)}{(0.93647)(0.95724)}$$

$$= \frac{-0.10147}{0.89643}$$

$$= -0.11319$$

$$\therefore P_N = \cos^{-1}(-0.11319)$$

$$= 180° - 83°30'2''$$

$$= 96°29'58''$$

$$= 6^h25^m56.1^s$$

ดังนั้น เวลาท้องถิ่นปรากฏขณะดวงอาทิตย์ขึ้น $= 12^h - 6^h25^m56.1^s$

$= 5 : 34 : 3.9$ A.M.

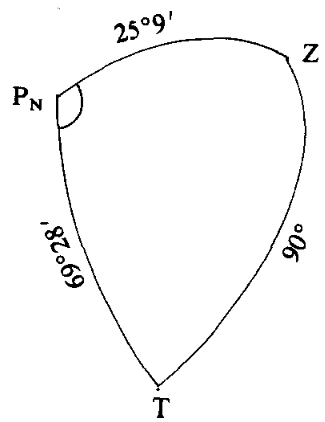
และเวลาท้องถิ่นปรากฏขณะดวงอาทิตย์ตก $= 12^h + 6^h25^m56.1^s$

$= 18^h25^m56.1^s$

$= 6 : 25 : 56.1$ P.M.

5.2 Fairbanks ซึ่งมีละติจูดเป็น $64°51'$ เหนือ

วิธีทำ ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า



$$TZ = 90° - \text{ระดับความสูง}$$
$$= 90° - 0°$$
$$= 90°$$
$$TP_N = 90° - \text{ความบ่ายเบน}$$
$$= 90° - 20°32'$$
$$= 69°28'$$
และ $ZP_N = 90° - \text{ละติจูด}$
$$= 90° - 64°51'$$
$$= 25°9'$$

ในข้อนี้จะแสดงการแก้ปัญหาโดยใช้กฎของเนเปียร์

จาก ZP_NT เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ดังนั้น สามเหลี่ยมเชิงขั้ว $Z'P_N'T$ ของสามเหลี่ยม ZP_NT ย่อมเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ซึ่งมี

$$\angle Z' = 180° - TP_N$$
$$= 180° - 69°28'$$
$$= 110°32'$$
$$\angle T' = 180° - ZP_N$$
$$= 180° - 25°9'$$
$$= 154°51'$$
และ $\angle P_N' = 180° - TZ$
$$= 180° - 90°$$
$$= 90°$$

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก $Z'P_N'T'$ โดยกฎของเนเปียร์จะได้ว่า

$$\sin(90° - p_N') = \tan(90° - T')\tan(90° - Z')$$

หรือ

$$\cos p_N' = \cot T' \cot Z'$$
$$= (\cot 154°51')(\cot 110'32')$$
$$= \cot(180° - 25°9')\cdot\cot(180° - 69°28')$$
$$= (-\cot 25°9')(-\cot 69'28')$$
$$= (-2.1299)(-0.37455)$$
$$= 0.79175$$

$$p_N' = \cos^{-1} 0.79775$$
$$= 37°5'3''$$

แต่ $\angle P_N = 180° - p_N'$

$$\therefore \angle P_N = 180° - 37°5'3''$$
$$= 142'54'57''$$

นั่นคือ $\angle ZP_NT = 142'54'57''$

$$= 9^h31^m39.8^s$$

ดังนั้น เวลาท้องถิ่นปรากฏขณะดวงอาทิตย์ขึ้น $= 12^h - 9^h31^m39.8^s$

$= 2 : 28 : 20.2$ A.M.

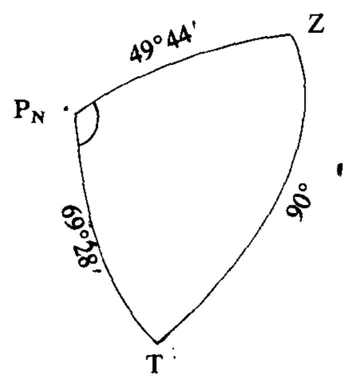
และเวลาท้องถิ่นปรากฏขณะดวงอาทิตย์ตก $= 12^h + 9^h31^m39.8^s$

$= 21^h31^m39.8^s$

$= 9 : 31 : 39.8$ P.M.

5.3 Harrisburg ซึ่งมีละติจูดเป็น 40°16′ เหนือ

วิธีทำ ในสามเหลี่ยมดาราศาสตร์ ZP_NT จะได้ว่า



$$TZ = 90° - \text{ระดับความสูง}$$
$$= 90° - 0°$$
$$= 90°$$
$$TP_N = 90° - \text{ความบ่ายเบน}$$
$$= 90° - 20°32'$$
$$= 69°28'$$
และ $$ZP_N = 90° - \text{ละติจูด}$$
$$= 90° - 40°16'$$
$$= 49°44'$$

โดยกฎสูตรโคไซน์สำหรับด้านจะได้ว่า

$$\cos TZ = \cos TP_N \cos ZP_N + \sin TP_N \sin ZP_N \cos P_N$$

หรือ $$\cos P_N = \frac{\cos TZ - \cos TP_N \cos ZP_N}{\sin TP_N \sin ZP_N}$$

$$\therefore \cos P_N = \frac{\cos 90° - (\cos 69°28')(\cos 49°44')}{(\sin 69°28')(\sin 49°44')}$$
$$= \frac{0 - (0.35075)(0.64635)}{(0.93647)(0.76304)}$$
$$= \frac{-0.22671}{0.71456}$$
$$= -0.31727$$
$$\therefore P_N = \cos^{-1}(-0.31727)$$
$$= 180° - 71°30'7''$$
$$= 108°29'53''$$
$$= 7^h13^h59.5^s$$

ดังนั้น เวลาท้องถิ่นปรากฏขณะดวงอาทิตย์ขึ้น $= 12^h - 7^h13^m59.5^s$

$= 4:46:0.5$ A.M.

และ เวลาท้องถิ่นปรากฏขณะดวงอาทิตย์ตก $= 12^h + 7^h13^m59.5^s$

$= 19^h13^m59.5^s$

$= 7:13:59.5$ P.M.

เฉลยแบบฝึกหัด 7.6

ให้วัตถุฟ้า T มีความบ่ายเบนเป็น d จงหามุมชั่วโมง (h) และแอซิมัท (A) ของดาว T ขณะที่กำลังขึ้นและตกผ่านเส้นขอบฟ้า ณ ละติจูด ϕ โดย d และ ϕ มีค่าดังนี้

1) $d = +15°38'$, $\phi = 62°37'$ เหนือ

วิธีทำ จาก $\cos h = -\tan d \tan \phi$

$$\therefore \cos h = -\tan 15°38' \cdot \tan 62°37'$$
$$= (-0.27983)(1.9306)$$
$$= -0.54024$$
$$h = \cos^{-1}(-0.54024)$$
$$= 180° + 57°18',\ 180° - 57°18'$$
$$= 237°18',\ 122°42'$$
$$= 15^h49.2^m,\ 8^h10.8^m$$

และจาก $\cos A = \dfrac{\sin d}{\cos \phi}$

$$\therefore \cos A = \frac{\sin 15°38'}{\cos 62°37'}$$
$$= \frac{0.26948}{0.45994}$$
$$= 0.58590$$
$$\therefore A = \cos^{-1}(0.58590)$$
$$= 54°8',\ 360° - 54°8'$$
$$= 54°8',\ 305°52'$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(1) ดาว T ขณะกำลังขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมงเป็น $h = 15^h49.2^m$ และมีแอซิมัท $A = 54°8'$

(2) ดาว T ขณะกำลังตกผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมงเป็น $h = 8^h10.8^m$ และมี

แอซิมัท A $= 305°52'$

2) $d = +20°,\ \phi = 39°$ เหนือ

วิธีทำ จาก $\cos h = -\tan d \tan \phi$

$\therefore \cos h = -\tan 20° \tan 39°$

$= (-0.36397)(0.80978)$

$= -0.29474$

$\therefore h = \cos^{-1}(-0.29474)$

$= 180° + 72°51'29'',\ 180° - 72°51'29''$

$= 252°51'29'',\ 107°8'31''$

$= 16^h51^m25.9^s,\ 7^h8^m34.1^s$

และจาก $\cos A = \dfrac{\sin d}{\cos \phi}$

$\therefore \cos A = \dfrac{\sin 20°}{\cos 39°}$

$= \dfrac{0.34202}{0.77715}$

$= 0.44009$

$\therefore A = \cos^{-1} 0.44009$

$= 63°53'25'',\ 360° - 63°53'25''$

$= 63°53'25'',\ 296°6'35''$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(1) ดาว T ขณะกำลังขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 16^h51^m25.9^s$ และมีแอซิมัท $A = 63°53'25''$

(2) ดาว T ขณะกำลังตกผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 7^h8^m34.1^s$ และมีแอซิมัท $A = 296°6'35''$

3) $d = +13°16',\ \phi = 45°24'$ เหนือ

วิธีทำ จาก $\cos h = -\tan d \tan \phi$

$\therefore \cos h = -\tan 13°16' \tan 45°24'$

$= (-0.23578)(1.0141)$

$= -0.23910$

$\therefore$ h = $\cos^{-1}(-0.23910)$

$= 180° + 76°10',\ 180° - 76°10'$

$= 256°10',\ 103°50'$

$= 17^h4.7^m,\ 6^h55.3^m$

และจาก $\cos A = \dfrac{\sin d}{\sin \phi}$

$\therefore \cos A = \dfrac{\sin 13°16'}{\cos 45°24'}$

$= \dfrac{0.22948}{0.70215}$

$= 0.32682$

$\therefore A = \cos^{-1} 0.32682$

$= 70°55'27'',\ 360° - 70°55'27''$

$= 70°55'27'',\ 289°4'33''$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(1) ดาว T ขณะกำลังขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 17^h4.7^m$ และมีแอซิมัท $A = 70°55'27''$

(2) ดาว T ขณะกำลังตกผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 6^h55.3^m$ และมีแอซิมัท $A = 289°4'33''$

4) $d = -18°16'$, $\phi = 25°14'$ เหนือ

วิธีทำ จาก $\cos h = -\tan d \tan \phi$

$\therefore \cos h = -\tan(-18°16') \tan 25°14'$

$= -(-0.33007)(0.47128)$

$= 0.15555$

$\therefore h = \cos^{-1} 0.15555$

$= 81°3'4'',\ 360° - 81°3'4''$

$= 81°3'4'',\ 278°56'56''$

$= 5^h24^m12.2^s,\ 18^h35^m47.8^s$

และจาก $\cos A = \dfrac{\sin d}{\cos \phi}$

$\therefore \cos A = \dfrac{\sin(-18°16')}{\cos(25°14')}$

$$= \frac{-0.31344}{0.90458}$$

$$= -0.34650$$

$\therefore A = \cos^{-1}(-0.34650)$

$$= 180° - 69°43'35'',\ 180° + 69°43'35''$$

$$= 110°16'25'',\ 249°43'35''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(1) ดาว T ขณะกำลังขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 18^h35^m47.8^s$ และมีแอซิมัท $A = 110°16'25''$

(2) ดาว T ขณะกำลังตกผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 5^h24^m12.2^s$ และมีแอซิมัท $A = 249°43'35''$

5) $d = -8°16'$, $\phi = 40°42'$ เหนือ

วิธีทำ จาก $\cos h = -\tan d \tan \phi$

$\therefore \cos h = -\tan(-8°16') \tan 40°42'$

$$= -(-0.14529)(0.86014)$$

$$= 0.12497$$

$\therefore h = \cos^{-1} 0.12497$

$$= 82°49'15'',\ 360° - 82°49'15''$$

$$= 82°49'15'',\ 277°10'45''$$

$$= 5^h31^m17^s,\ 18^h28^m43^s$$

และจาก $\cos A = \dfrac{\sin d}{\cos \phi}$

$\therefore \cos A = \dfrac{\sin(-8°16')}{\cos 40°42'}$

$$= \frac{-0.14378}{0.75813}$$

$$= -0.18965$$

$\therefore A = \cos^{-1}(-0.18965)$

$$= 180° - 79°4'4'',\ 180° + 79°4'4''$$

$$= 100°55'56'',\ 259°4'4''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(1) ดาว T ขณะกำลังขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 18^h28^m43^s$ และมีแอซิมัท $A = 100°55'56''$

(2) ดาว T ขณะกำลังตกผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 5^h31^m17^s$ และมีแอซิมัท $A = 259°4'4''$

6) $d = +20°32'$, $\phi = 16°49'$ เหนือ

วิธีทำ จาก $\cos h = -\tan d \tan \phi$

$\therefore \cos h = -\tan 20°32' \tan 16°49'$

$= (-0.37455)(0.30224)$

$= -0.11320$

$\therefore h = \cos^{-1}(-0.11320)$

$= 180° - 83°30',\ 180° + 83°30'$

$= 96°30',\ 263°30'$

$= 6^h26^m,\ 17^h34^m$

และจาก $\cos A = \dfrac{\sin d}{\cos \phi}$

$\therefore \cos A = \dfrac{\sin 20°32'}{\cos 16°49'}$

$= \dfrac{0.35075}{0.95124}$

$= 0.36642$

$\therefore A = \cos^{-1} 0.36642$

$= 68°30'18'',\ 360° - 68°30'18''$

$= 68°30'18'',\ 291°29'42''$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(1) ดาว T ขณะกำลังขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 17^h34^m$ และมีแอซิมัท $A = 68°30'18''$

(2) ดาว T ขณะกำลังตกผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 6^h26^m$ และมีแอซิมัท $A = 291°29'42''$

7) $d = -12°28'$, $\phi = 37°22'$ เหนือ

วิธีทำ จาก $\cos h = -\tan d \tan \phi$

$\therefore \cos h = -\tan(-12°28') \tan 37°22'$

$= -(-0.22108)(0.76364)$

$= 0.16882$

$\therefore h = \cos^{-1} 0.16882$

$= 80°16'51'', 360° - 80°16'51''$

$= 80°16'51'', 279°43'9''$

$= 5^h21^m7.4^s, 18^h38^m52.6^s$

และจาก $\cos A = \dfrac{\sin d}{\cos \phi}$

$\therefore \cos A = \dfrac{\sin(-12°28')}{\cos 37°22'}$

$= \dfrac{-0.21587}{0.79477}$

$= -0.27161$

$\therefore A = \cos^{-1}(-0.27161)$

$= 180° - 74°14'24'', 180° + 74°14'24''$

$= 105°45'36'', 254°14'24''$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(1) ดาว T ขณะกำลังขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 18^h38^m52.6^s$ และมีแอซิมัท $A = 105°45'36''$

(2) ดาว T ขณะกำลังตกผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 5^h21^m7.4^s$ และมีแอซิมัท $A = 254°14'24''$

8) $d = -10°48'$, $\phi = 26°18'$

วิธีทำ จาก $\cos h = -\tan d \tan \phi$

$\therefore \cos h = -\tan(-10°48') \tan 26°18'$

$= (-0.19076)(0.49423)$

$= 0.09428$

$\therefore h = \cos^{-1} 0.09428$

$= 84°35'25'', \ 360° - 84°35'25''$

$= 84°35'25'', \ 275°24'35''$

$= 5^h38^m21.6^s, \ 18^h21^m38.4^s$

และจาก $\cos A = \dfrac{\sin d}{\sin \phi}$

$\therefore \cos A = \dfrac{\sin(-10°48')}{\cos 26°18'}$

$= \dfrac{-0.18738}{0.89649}$

$= -0.20901$

$\therefore A = \cos^{-1}(-0.20901)$

$= 180° - 77°56'9'', \ 180° + 77°56'9''$

$= 102°3'51'', \ 257°56'9''$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(1) ดาว T ขณะกำลังขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 18^h21^m38.4^s$ และมีแอซิมัท $A = 102°3'51''$

(2) ดาว T ขณะกำลังตกผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 5^h38^m21.6^s$ และมีแอซิมัท $A = 257°56'9''$

9) $d = +14°30', \ \phi = 69°18'$

วิธีทำ จาก $\cos h = -\tan d \tan \phi$

$\therefore \cos h = -\tan 14°30' \tan 69°18'$

$= (-0.25862)(2.6464)$

$= -0.68441$

$\therefore h = \cos^{-1}(-0.68441)$

$= 180° - 46°48'40'', \ 180° + 46°48'40''$

$= 133°11'20'', \ 226°48'40''$

$= 8^h52^m45.3^s, \ 15^h7^m14.7^s$

และจาก $\cos A = \dfrac{\sin d}{\cos \phi}$

$\therefore \cos A = \dfrac{\sin 14°30°}{\cos 69°18'}$

$$= \frac{0.25038}{0.35347}$$

$$= 0.70835$$

$$\therefore A = \cos^{-1}0.70835$$

$$= 44°53'57'', 360° - 44°53'57''$$

$$= 44°53'57'', 315°6'3''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(1) ดาว T ขณะกำลังขึ้นผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 15^h7^m14.7^s$ และมีแอซิมัท $A = 44°53'57''$

(2) ดาว T ขณะกำลังตกผ่านเส้นขอบฟ้ามีมุมชั่วโมง $h = 8^h52^m45.3^s$ และมีแอซิมัท $A = 315°6'3''$