เฉลยแบบฝึกหัด 3.8

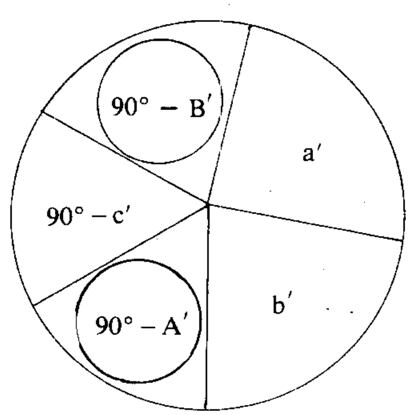
จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC ซึ่งมี $c = 90°$ ต่อไปนี้

1. $a = 115° 24' 36''$, $b = 60° 18' 24''$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 3.7.2 จะได้ส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ของสามเหลี่ยม ABC ดังนี้

$$\begin{aligned}
A' &= 180° - a \\
&= 180° - 115° 24' 36'' \\
&= 64° 35' 24'' \\
B' &= 180° - b \\
&= 180° - 60° 18' 24'' \\
&= 119° 41' 36'' \\
C' &= 180° - c' \\
&= 180° - 90 \\
&= 90
\end{aligned}$$

จึงสามารถเขียนวงกลมห้าส่วนของสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ได้ดังนี้



โดยกฎของเนเปียร์ จะได้ดังนี้

หา a'

จาก $\sin(90° - A') = \cos a' \cos(90° - B')$

$$\cos A' = \cos a' \sin B'$$

$$\therefore \quad \cos a' = \frac{\cos A'}{\sin B'}$$

$$= \frac{\cos 64° 35' 24''}{\sin 119° 41' 36''}$$

$$= \frac{\cos 64° 35' 24''}{\sin(180° - 60° 18' 24'')}$$

$$= \frac{\cos 64° 35' 24''}{\sin 60° 18' 24''}$$

$$= \frac{0.42910}{0.86869}$$

$$= 0.49396$$

$$\therefore \quad a' = \cos^{-1} 0.49396$$

$$= 60° 23' 55''$$

หา b'

จาก $\sin(90° - B') = \cos b' \cos(90° - A')$

$$\cos B' = \cos b' \sin A'$$

$$\therefore \quad \cos b' = \frac{\cos B'}{\sin A'}$$

$$= \frac{\cos 119° 41' 36''}{\sin 64° 35' 24''}$$

$$= \frac{\cos(180° - 60° 18' 24'')}{\sin 64° 35' 24''}$$

$$= \frac{-\cos 60° 18' 24''}{\sin 64° 35' 24''}$$

$$= \frac{-0.49536}{0.90326}$$

$$= -0.54841$$

$$\therefore \quad b' = \cos'(-0.54841)$$

$$= 180° - 56° 44' 31''$$

$$= 123° 15' 29''$$

หา c'

จาก $\sin(90° - c') = \tan(90° - A') \tan(90° - B')$

$$\cos c' = \cot A' \cot B'$$
$$= (\cot 64° 35' 24'')(\cot 119° 41' 36'')$$
$$= (\cot 64° 35' 24'') \cot(180° - 60° 18' 24'')$$
$$= (\cot 64° 35' 24'')(-\cot 60° 18' 24'')$$
$$= (0.47505)(-0.57022)$$
$$= -0.27088$$
$$c' = \cos^{-1}(-0.27088)$$
$$= 180° - 74° 17'$$
$$= 105° 43'$$

โดยทฤษฎีบท 3.7.2 จึงได้ส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่ต้องการ คือ

$$A = 180° - a'$$
$$= 180° - 60° 23' 55''$$
$$= 119° 36' 5''$$
$$B = 180° - b'$$
$$= 180° - 123° 15' 29''$$
$$= 56° 44' 31''$$

และ $C = 180° - c'$
$$= 180° - 105° 43'$$
$$= 74° 17'$$

2. $B = 69° 45'$, $A = 94° 40'$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 3.7.2 จะได้ส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ดังนี้

$$b' = 180° - B$$
$$= 180° - 69° 45'$$
$$= 110° 15'$$
$$a' = 180° - A$$
$$= 180° - 94° 40'$$

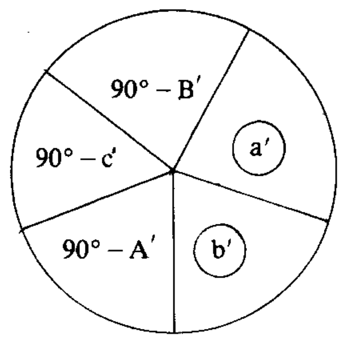
$$= 85° 20'$$

และ $C' = 180° - c$

$$= 180° - 90°$$

$$= 90°$$

จึงสามารถสร้างวงกลมห้าส่วนของสามเหลี่ยม A′B′C′ ได้ดังนี้



โดยกฎของเนเปียร์จะได้ดังนี้

หา A′

จาก $\sin b' = \tan a' \tan(90° - A')$

$$= \tan a' \cot A'$$

$$\therefore \cot A' = \frac{\sin b'}{\tan a'}$$

$$= \frac{\sin 110° 15'}{\tan 85° 20'}$$

$$= \frac{\sin(180° - 69° 45')}{\tan 85° 20'}$$

$$= \frac{\sin 69° 45'}{\tan 85° 20'}$$

$$= \frac{0.93819}{12.251}$$

$$= 0.07658$$

$$\therefore A' = \cot^{-1} 0.07658$$

$$= 85° 37' 14''$$

หา c′

$$\sin(90° - c') = \cos a' \cos b'$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \cos c' &= \cos a' \cos b' \\
&= (\cos 85^\circ\ 20')(\cos 110^\circ\ 15') \\
&= (\cos 85^\circ\ 20')(\cos 180^\circ - 69^\circ\ 45') \\
&= (\cos 85^\circ\ 20')(-\cos 69^\circ\ 45') \\
&= (0.08136)(-0.34612) \\
&= -0.02816 \\
\therefore\ c' &= \cos^{-1}(-0.02816) \\
&= 180^\circ - 88^\circ\ 23'\ 12'' \\
&= 91^\circ\ 36'\ 48''
\end{aligned}
$$

หา B'

$$
\begin{aligned}
\sin a' &= \tan b' \tan(90^\circ - B') \\
&= \tan b' \cot B' \\
\therefore\ \cot B' &= \frac{\sin a'}{\tan b'} \\
&= \frac{\tan 85^\circ\ 20'}{\tan 110^\circ\ 15'} \\
&= \frac{\sin 85^\circ\ 20'}{\tan(180^\circ - 69^\circ\ 45')} \\
&= \frac{\sin 85^\circ\ 20'}{-\tan 69^\circ\ 45'} \\
&= \frac{0.99668}{-2.7106} \\
&= -0.36770 \\
\therefore\ B' &= \cot^{-1}(-0.36770) \\
&= 180^\circ - 69^\circ\ 48'\ 42'' \\
&= 110^\circ\ 11'\ 18''
\end{aligned}
$$

โดยทฤษฎีบท 3.7.2 จึงได้ส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่ต้องการ คือ

$$
\begin{aligned}
a &= 180^\circ - A' \\
&= 180^\circ - 85^\circ\ 37'\ 14'' \\
&= 94^\circ\ 22'\ 46'' \\
C &= 180^\circ - c' \\
&= 180^\circ - 91^\circ\ 36'\ 48''
\end{aligned}
$$

$$= 88^\circ\ 23'\ 12''$$

และ $\qquad b = 180^\circ - B'$

$$= 180^\circ - 110^\circ\ 11'\ 18''$$

$$= 69^\circ\ 48'\ 42''$$

สำหรับข้อ 3 ถึง 5 ได้คำตอบดังนี้ (ค่าอาจคลาดเคลื่อนเล็กน้อย)

3. $B = 117^\circ\ 54'\ 30''$, $a = 95^\circ\ 42'\ 20''$

ตอบ $\quad b = 117^\circ\ 45'\ 28''$

$A = 96^\circ\ 27'\ 1''$

$C = 93^\circ\ 0'\ 51''$

4. $A = 153^\circ\ 16'$, $b = 19^\circ\ 3'$

ตอบ $\quad a = 106^\circ\ 56'\ 53''$

$B = 8^\circ\ 49'\ 46''$

$C = 28^\circ\ 3'\ 4''$

5. $b = 159^\circ\ 33'\ 40''$, $a = 95^\circ\ 18'\ 20''$

ตอบ $\quad A = 105^\circ\ 21'\ 16''$

$B = 160^\circ\ 13'\ 48''$

$C = 104^\circ\ 25'\ 45''$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.1

1. จงตรวจสอบดูว่าสิ่งที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นส่วนประกอบของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมได้หรือไม่ (โดยใช้กฎของไซน์)

1.1 $A = 108°\,40'$, $B = 134°\,20'$, $C = 70°\,18'$

$a = 145°\,36'$, $b = 154°\,45'$, $c = 34°\,9'$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 145°\,36'}{\sin 108°\,40'} = \frac{\sin(180° - 34°\,24')}{\sin(180° - 71°\,20')} = \frac{\sin 34°\,24'}{\sin 71°\,20'} = \frac{0.56497}{0.94740} = 0.5963$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 154°\,45'}{\sin 134°\,20'} = \frac{\sin(180° - 25°\,15')}{\sin(180° - 45°\,40')} = \frac{\sin 25°\,15'}{\sin 45°\,40'} = \frac{0.42657}{0.71529} = 0.5964$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 34°\,9'}{\sin 70°\,18'} = \frac{0.56136}{0.94147} = 0.5963$$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า A, B, C และ a, b, c ที่กำหนดให้เป็นส่วนประกอบของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ได้

1.2 $A = 47° 21'$, $B = 22° 20'$, $C = 146° 40'$

$a = 117° 9'$, $b = 27° 22'$, $c = 138° 20'$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 117° 9'}{\sin 47° 21'} = \frac{\sin(180° - 62° 51')}{\sin 47° 21'} = \frac{\sin 62° 51'}{\sin 47° 21'} = \frac{0.88981}{0.73551} = 1.2097$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 27° 22'}{\sin 22° 20'} = \frac{0.45968}{0.37999} = 1.2097$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 138° 20'}{\sin 146° 40'} = \frac{\sin(180° - 41° 40')}{\sin(180° - 33° 20')} = \frac{\sin 41° 40'}{\sin 33° 20'} = \frac{0.66480}{0.54951} = 1.2098$$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า A, B, C และ a, b, c ที่กำหนดให้ เป็นส่วนประกอบของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ได้

1.3 $A = 110° 10'$, $B = 133° 18'$, $C = 70° 16'$

$a = 147° 6'$, $b = 155° 5'$, $c = 32° 59'$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 147° 6'}{\sin 110° 10'}$$

$$= \frac{\sin(180° - 32° 54')}{\sin(180° - 69° 50')}$$

$$= \frac{\sin 32° 54'}{\sin 69° 50'}$$

$$= \frac{0.54317}{0.93869}$$

$$= 0.578$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 155° 5'}{\sin 133° 18'}$$

$$= \frac{\sin(180° - 24° 55')}{\sin(180° - 46° 42')}$$

$$= \frac{\sin 24° 55'}{\sin 46° 42'}$$

$$= \frac{0.42130}{0.72777}$$

$$= 0.578$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 32° 59'}{\sin 70° 16'}$$

$$= \frac{0.54440}{0.94127}$$

$$= 0.578$$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า A, B, C และ a, b, c ที่กำหนดให้เป็นส่วนประกอบของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ได้

2. จงใช้กฎของไซน์คำนวณหาส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากต่อไปนี้

2.1 $a = 58° 8' 19''$, $b = 32° 49' 22''$

$B = 37° 12' 53''$, $c = 63° 40'$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 32° 49' 22''}{\sin 37° 12' 53''}$$

$$= \frac{0.54204}{0.60480}$$

$$= 0.89623$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 63° 40'}{\sin 90°}$$

$$= 0.89623$$

เนื่องจาก $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$

$$\therefore \quad \frac{\sin 58^\circ\, 8'\, 19''}{\sin A} = 0.89623$$

หรือ $\sin A = \frac{\sin 58^\circ\, 8'\, 19''}{0.89623}$

$$= \frac{0.84936}{0.89623}$$

$$= 0.94770$$

$$\therefore \quad A = \sin^{-1} 0.94770$$

$$= 71^\circ\, 23'\, 13'',\ 108^\circ\, 36'\, 47''$$

จึงได้ว่า ส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่ต้องการคือ $A = 71^\circ\, 23'\, 13''$ (เพราะว่า $a < 90^\circ$)

2.2 $a = 36^\circ\, 14'\, 6''$, $A = 49^\circ\, 29'\, 56''$

$b = 38^\circ\, 45''$, $c = 51^\circ\, 1'\, 11''$

ตอบ ส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่ต้องการ คือ $B = 53^\circ\, 37'\, 42''$

3. จงใช้กฎของไซน์คำนวณหาส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมต่อไปนี้

3.1 $A = 130^\circ\, 5'\, 22''$, $B = 32^\circ\, 26'\, 6''$

$C = 36^\circ\, 45'\, 26''$, $c = 51^\circ\, 6'\, 12''$

$a = 84^\circ\, 14'\, 29''$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 84^\circ\, 14'\, 29''}{\sin 130^\circ\, 5'\, 22''}$

$$= \frac{\sin 84^\circ\, 14'\, 29''}{\sin(180^\circ - 49^\circ\, 54'\, 38'')}$$

$$= \frac{\sin 84^\circ\, 14'\, 29''}{\sin 49^\circ\, 54'\, 38''}$$

$$= \frac{0.99495}{0.76504}$$

$$= 1.3005$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 51^\circ\, 6'\, 12''}{\sin 36^\circ\, 45'\, 26''}$$

$$= \frac{0.77833}{0.59842}$$

$$= 1.3005$$

จาก $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = 1.3005$

จึงได้ว่า $\frac{\sin b}{\sin 32^\circ\ 26'\ 6''} = 1.3005$

$$\therefore \quad \sin b = (1.3005)(\sin 32^\circ\ 26'\ 6'')$$

$$= (1.3005)(0.53634)$$

$$= 0.69751$$

$$\therefore \quad b = \sin^{-1} 0.69751$$

$$= 44^\circ\ 13'\ 40'',\ 135^\circ\ 46'\ 20''$$

ดังนั้นจึงได้ว่า ส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่ต้องการคือ $b = 44^\circ\ 13'\ 40''$ (เพราะว่า $B < 90^\circ$)

3.2 $A = 70^\circ$, $C = 94^\circ\ 48'\ 12''$, $c = 116^\circ$

$a = 57^\circ\ 56'\ 53''$, $b = 137^\circ\ 20'\ 33''$

ตอบ ส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่ต้องการคือ $B = 131^\circ\ 18'$

4. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ต่อไปนี้ กำหนดส่วนใดส่วนหนึ่งของสามเหลี่ยมมาให้ 2 ค่า จงพิจารณาว่าค่าที่ถูกต้องคือค่าใด

4.1 $A = 65^\circ\ 13'$, $B = 49^\circ\ 28'$, $130^\circ\ 33'$

$C = 128^\circ\ 16'$, $a = 88^\circ\ 24'$,

$b = 56^\circ\ 48'$, $c = 120^\circ\ 11'$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 88^\circ\ 24'}{\sin 65^\circ\ 13'}$

$$= \frac{0.99961}{0.90790}$$

$$= 1.1010$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 120^\circ\ 11'}{\sin 128^\circ\ 16'}$$

$$= \frac{\sin(180^\circ - 59^\circ\ 49')}{\sin(180^\circ - 51^\circ\ 44')}$$

$$= \frac{\sin 59^\circ 49'}{\sin 51^\circ 44'}$$

$$= \frac{0.86442}{0.78514}$$

$$= 1.1010$$

จาก $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = 1.1010$

นั่นคือ $\frac{\sin b}{\sin B} = 1.1010$

$$\therefore \frac{\sin 56^\circ 48'}{\sin B} = 1.1010$$

$$\therefore \frac{0.83676}{\sin B} = 1.1010$$

$$\therefore \sin B = \frac{0.83676}{1.1010}$$

$$= 0.76$$

$$B = \sin^{-1} 0.76$$

$$= 49^\circ 28', 130^\circ 32'$$

ดังนั้น ค่าที่ถูกต้องคือ $B = 49^\circ 28'$ (เพราะว่า $b < 90^\circ$)

ข้อสังเกต ถ้าใช้กฎของจตุตถภาค ก็สามารถเลือกคำตอบได้ทันที เพราะว่า $b < 90^\circ$ ดังนั้นจึงได้ว่า $B < 90^\circ$ ด้วย ค่า B ที่น้อยกว่า 90° คือ $B = 49^\circ 28'$

4.2 $A = 50^\circ 10'$, $B = 135^\circ 5'$

$C = 50^\circ 30'$, $b = 120^\circ 30'$

$c = 70^\circ 20'$, $a = 69^\circ 35', 110^\circ 25'$

ตอบ ได้ว่า $a = 69^\circ 35'$

4.3 $A = 127^\circ 40'$, $B = 45^\circ 15'$

$C = 124^\circ 42', 15^\circ 20'$

$a = 68^\circ 53'$, $b = 56^\circ 50'$

$c = 18^\circ 10'$

ตอบ ได้ว่า $C = 15^\circ 20'$

4.4 $A = 52^\circ 20'$, $B = 45^\circ 15'$

$C = 124° 42'$, $a = 68° 53'$

$b = 56° 50'$, $c = 104° 19'$, $18° 10'$

ตอบ ได้ว่า $c = 104° 19'$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.8

1. จงใช้กฎของโคไซน์สำหรับด้าน หาด้าน a ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังนี้

1.1 $b = 60°$ $c = 30°$, $A = 45°$

วิธีทำ จาก $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

$\therefore \cos a = \cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30° \cos 45°$

$= (.5000)(.86603) + (.86603)(.5000)(.70711)$

$= 0.73920$

$\therefore a = \cos^{-1} 0.73920$

$= 42° 20' 12''$

ดังนั้น ด้าน $a = 42° 20' 12''$

1.2 $b = 45°$, $c = 30°$, $A = 120°$

วิธีทำ จาก $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

$\therefore \cos a = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° \cos 120°$

แต่ $\cos 120° = \cos(180° - 60°)$

$= -\cos 60°$

$\therefore \cos a = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° \cos 60°$

$= (.70711)(.86603) - (.70711)(.5000)(.5000)$

$= 0.43560$

$\therefore a = \cos^{-1} 0.43560$

$= 64° 10' 35''$

ดังนั้น ด้าน $a = 64° 10' 35''$

1.3 $b = 45°$, $c = 60°$, $A = 150°$

ตอบ $a = 100° 10' 56''$

2. จงใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม หามุม A ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนด

ส่วนต่าง ๆ ให้ดังนี้

2.1 $B = 120°, \quad C = 150°, \quad a = 135°$

วิธีทำ จาก

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\therefore \cos A = -\cos 120° \cos 150° + \sin 120° \sin 150° \cos 135°$$

$$= -\cos(180° - 60°)\cos(180° - 30°)$$

$$+ \sin(180° - 60°)\sin(180° - 30°)\cos(180° - 45°)$$

$$= -\cos 60° \cos 30° - \sin 60° \sin 30° \cos 45°$$

$$= (-.5)\ (.86603) - (.86603)\ (.5)\ (.70711)$$

$$= -0.73920$$

$$\therefore A = \cos^{-1} 0.73920$$

$$= (180° - 42°\ 20'\ 12'')$$

$$= 137°\ 39'\ 48''$$

ดังนั้น มุม $A. = 137°\ 39'\ 48''$

3.2 $B = 135°, \quad C = 120°, \quad a = 30°$

วิธีทำ จาก

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$= -\cos 135° \cos 120° + \sin 135° \sin 120° \cos 30°$$

$$= -\cos(180° - 45°)\cos(180° - 60°)$$

$$+ \sin(180° - 45°)\sin(180° - 60°)\cos 30°$$

$$= -\cos 45° \cos 60° + \sin 45° \sin 60° \cos 30°$$

$$= -(.70711)\ (.5000) + (.70711)\ (.86603)\ (.86603)$$

$$= 0.17678$$

$$\therefore A = \cos^{-1} 0.17678$$

$$= 79°\ 49'\ 4''$$

ดังนั้น มุม $A = 79°\ 49'\ 4''$

3. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC กำหนดให้ $a = 30°, \ b = 45°, \ c = 60°$ จงหามุม A

วิธีทำ จากกฎโคไซน์สำหรับด้าน ได้ว่า

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\therefore \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos 30° - \cos 45° \cos 60°}{\sin 45° \sin 60°}$$

$$= \frac{(.86603) - (.70711)(.5000)}{(.70711)(.86603)}$$

$$= 0.83686$$

$$\therefore \quad A = \cos^{-1} 0.83686$$

$$= 33° \; 11' \; 22''$$

ดังนั้น มุม $A = 33° \; 11' \; 22''$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.7

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังต่อไปนี้

1. $a = 30°, \quad b = 45°, \quad c = 60°$

วิธีทำ (ในที่นี้จะแสดงการแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์)

จากกฎโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \qquad \text{..........} (1)$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \qquad \text{..........} (2)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \qquad \text{..........} (3)$$

จาก (1) ได้ว่า

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{\cos 30° - \cos 45° \cos 60°}{\sin 45° \sin 60°}$$

$$= \frac{(0.86603) - (0.70711)(0.5000)}{(0.70711)(0.86603)}$$

$$= 0.83686$$

$$\therefore \quad A = \cos^{-1}(0.83686)$$

$$= 33° \, 11' \, 22''$$

จาก (2) ได้ว่า

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}$$

$$\therefore \quad \cos B = \frac{\cos 45° - \cos 60° \cos 30°}{\sin 60° \sin 30°}$$

$$= \frac{(0.70711) - (0.5000)(0.86603)}{(0.86603)(0.5000)}$$

$$= 0.63299$$

$$\therefore \quad B = \cos^{-1}(0.63299)$$

$$= 50° \, 43' \, 44''$$

จาก (3) ได้ว่า

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

$$= \frac{\cos 60° - \cos 30° \cos 45°}{\sin 30° \sin 45°}$$

$$= \frac{(0.5000) - (0.86603)(0.70711)}{(0.5000)(0.70711)}$$

$$= -0.31785$$

$$\therefore \quad C = \cos^{-1}(-0.31785)$$

$$= 180° - 71° \, 28' \, 2''$$

$$= 108° \, 31' \, 58''$$

ตรวจสอบ จากกฎของไซน์ได้ว่า

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

โดย

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 30°}{\sin 33° \, 11' \, 22''}$$

$$= \frac{0.5000}{0.54741}$$

$$= 0.91339$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 45°}{\sin 50° \, 43' \, 44''}$$

$$= \frac{0.70711}{0.77416}$$

$$= 0.91339$$

และ

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 60°}{\sin 108° \, 31' \, 58''}$$

$$= \frac{0.86603}{0.94814}$$

$$= 0.91339$$

ดังนั้นจึงได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มี $A = 33° \, 11' \, 22''$, $B = 50° \, 43' \, 44''$ และ $C = 108° \, 31' \, 58''$

2, $a = 150°$, $b = 120°$, $c = 60°$

วิธีทำ ในที่นี้จะแสดงการแก้ปัญหาโดยใช้สูตรครึ่งมุม คือ

$$\tan\frac{1}{2}A = \frac{r}{\sin(s-a)} \qquad \text{..........(1)}$$

$$\tan\frac{1}{2}B = \frac{r}{\sin(s-b)} \qquad \text{..........(2)}$$

$$\tan\frac{1}{2}C = \frac{r}{\sin(s-c)} \qquad \text{..........(3)}$$

เมื่อ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

และ $r = \sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$

และตรวจสอบคำตอบด้วยกฎของไซน์ คือ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

จาก $a = 150°$, $b = 120°$, $c = 60°$

จึงได้ว่า
$$s = \frac{150° + 120° + 60°}{2} = 165°$$

และ
$$s-a = 165° - 150° = 15°$$
$$s-b = 165° - 120° = 45°$$
$$s-c = 165° - 60° = 105°$$

ดังนั้น
$$\sin(s-a) = \sin 15° = 0.25882$$
$$\sin(s-b) = \sin 45° = 0.70711$$
$$\sin(s-c) = \sin 105° = \sin(180° - 75°) = \sin 75°$$

$$= 0.96593$$

และ $$\sin s = \sin 165°$$

$$= \sin(180° - 15°)$$

$$= \sin 15°$$

$$= 0.25882$$

และ $$r = \sqrt{\frac{(\sin 15°)(\sin 45°)(\sin 105°)}{\sin 165°}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.25882)(0.70711)(0.96593)}{0.25882}}$$

$$= \sqrt{0.68302}$$

$$= 0.82645$$

จาก $$\tan\frac{1}{2}A = \frac{r}{\sin(s-a)}$$

$$\therefore \tan\frac{1}{2}A = \frac{0.82645}{0.25882}$$

$$= 3.1931$$

$$\therefore \frac{1}{2}A = \tan^{-1} 3.1931$$

$$= 72° 36' 38''$$

ดังนั้น $$A = 145° 13' 16''$$

จาก $$\tan\frac{1}{2}B = \frac{r}{\sin(s-b)}$$

$$\therefore \tan\frac{1}{2}B = \frac{0.82645}{0.70711}$$

$$= 1.1688$$

$$\therefore \frac{1}{2}B = \tan^{-1} 1.1688$$

$$= 49° 27'$$

ดังนั้น $$B = 98° 54'$$

และจาก $$\tan\frac{1}{2}C = \frac{r}{\sin(s-c)}$$

$$= \frac{0.82645}{0.96593}$$

$$= 0.85560$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}C = \tan^{-1} 0.85560$$

$$= 40^\circ\ 33'\ 1''$$

ดังนั้น $$C = 81^\circ\ 6'\ 2''$$

ตรวจสอบ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 150^\circ}{\sin 145^\circ\ 13'\ 16''}$$

$$= \frac{\sin(180^\circ - 30^\circ)}{\sin(180^\circ - 34^\circ\ 46'\ 44'')}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ}{\sin 34^\circ\ 46'\ 44''}$$

$$= \frac{0.5000}{0.57041}$$

$$= 0.87656$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 98^\circ\ 54'}$$

$$= \frac{\sin(180^\circ - 60^\circ)}{\sin(180^\circ - 81^\circ\ 6')}$$

$$= \frac{\sin 60^\circ}{\sin 81^\circ\ 6'}$$

$$= \frac{0.86603}{0.98796}$$

$$= 0.87658$$

และ $$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 81^\circ\ 6'\ 2''}$$

$$= \frac{0.88603}{0.98796}$$

$$= 0.87658$$

ดังนั้น จึงได้ว่าสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มี $A = 145^\circ\ 13'\ 16''$, $B = 98^\circ\ 54'$ และ $C = 81^\circ\ 6'\ 2''$

3. $A = 60^\circ$, $B = 135^\circ$, $C = 60^\circ$

วิธีทำ ในที่นี้จะแสดงการแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม

จาก $A = 60^\circ$ ได้ว่า

$$\sin A = \sin 60° = 0.86603$$

และ $$\cos A = \cos 60° = 0.50000$$

จาก $B = 135°$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin B &= \sin 135° \\ &= \sin(180° - 45°) \\ &= \sin 45° \\ &= 0.70711\end{aligned}$$

และ $$\begin{aligned}\cos B &= \cos 135° \\ &= \cos(180° - 45°) \\ &= -\cos 45° \\ &= -0.70711\end{aligned}$$

จาก $C = 60°$ ได้ว่า

$$\sin C = \sin 60° = 0.86603$$

และ $$\cos C = \cos 60° = 0.50000$$

จากกฎโคไซน์สำหรับมุมได้ว่า

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\cos 60° + (\cos 135°)(\cos 60°)}{(\sin 135°)(\sin 60°)} \\ &= \frac{0.50000 + (-0.70711)(0.50000)}{(0.70711)(0.86603)} \\ &= \frac{0.14645}{0.61238} \\ &= 0.23915\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad a &= \cos^{-1} 0.23915 \\ &= 76° \, 9' \, 49''\end{aligned}$$

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \cos b &= \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A} \\ &= \frac{\cos 135° + (\cos 60°)(\cos 60°)}{(\sin 60°)(\sin 60°)}\end{aligned}$$

$$= \frac{-0.70711 + (0.50000)(0.50000)}{(0.86603)(0.86603)}$$

$$= \frac{-0.45711}{0.75001}$$

$$= -0.60947$$

$$\therefore \quad b = \cos^{-1}(-0.60947)$$

$$= 180° - 52°\ 26'\ 54''$$

$$= 127°\ 33'\ 6''$$

และ $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$

$$\therefore \quad \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

$$= \frac{\cos 60° + (\cos 60°)(\cos 135°)}{\sin 60° \sin 135°}$$

$$= \frac{0.50000 + (0.50000)(-0.70711)}{(0.86603)(0.70711)}$$

$$= \frac{0.14645}{0.61238}$$

$$= 0.23915$$

$$\therefore \quad c = \cos^{-1} 0.23915$$

$$= 76°\ 9'\ 49''$$

ตรวจสอบ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 76°\ 9'\ 49''}{\sin 60°}$$

$$= \frac{0.97099}{0.86603}$$

$$= 1.12119$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 127°\ 33'\ 6''}{\sin 135°}$$

$$= \frac{\sin(180° - 52°\ 26'\ 54'')}{\sin(180° - 45°)}$$

$$= \frac{\sin 52°\ 26'\ 54''}{\sin 45°}$$

$$= \frac{0.79280}{0.70711}$$

$$= 1.12118$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 76^\circ 9' 49''}{\sin 60^\circ}$$

$$= \frac{0.97099}{0.86603}$$

$$= 1.12119$$

ดังนั้นจึงได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มี $a = 76^\circ 9' 49''$, $b = 127^\circ 33' 6''$ และ $c = 76^\circ 9' 49''$

4. $A = 150^\circ$, $B = 120^\circ$, $C = 135^\circ$

วิธีทำ ในที่นี้จะแสดงการแก้ปัญหาโดยใช้สูตรครึ่งด้าน คือ

$$\cot\frac{1}{2}a = \frac{R}{\cos(S-A)} \qquad \text{..........} (1)$$

$$\cot\frac{1}{2}b = \frac{R}{\cos(S-B)} \qquad \text{..........} (2)$$

$$\cot\frac{1}{2}c = \frac{R}{\cos(S-C)} \qquad \text{..........} (3)$$

เมื่อ $$S = \frac{A+B+C}{2}$$

และ $$R = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}}$$

และตรวจสอบคำตอบด้วยกฎของไซน์ คือ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

จาก $A = 150^\circ$, $B = 120^\circ$, $C = 135^\circ$

จะได้ว่า $$S = \frac{150^\circ + 120^\circ + 135^\circ}{2}$$

$$= 202^\circ 30'$$

และ $$S - A = 202^\circ 30' - 150^\circ$$

$$= 52^\circ 30'$$

$$S - B = 202^\circ 30' - 120^\circ$$

$$= 82^\circ 30'$$

$$S - C = 202^\circ 30' - 135^\circ$$

$$= 67^\circ 30'$$

ดังนั้น $\cos S - A = \cos 52° \, 30'$

$= 0.60876$

$\cos S - B = \cos 82° \, 30'$

$= 0.13053$

$\cos(S - C) = \cos 67° \, 30'$

$= 0.38268$

และ $\cos S = \cos 202° \, 30'$

$= \cos(180° + 22° \, 30')$

$= -\cos 22° \, 30'$

$= 0.92388$

และ
$$R = \sqrt{\frac{(\cos 52° \, 30')(\cos 82° \, 30')(\cos 67° \, 30')}{\cos 202° \, 30'}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.60876)(0.13053)(0.38268)}{-(-0.92388)}}$$

$= 0.18142$

จาก
$$\cot\frac{1}{2}a = \frac{R}{\cos(S - A)}$$

$$\therefore \quad \cot\frac{1}{2}a = \frac{0.18142}{0.60876}$$

$= 0.29801$

$\therefore \quad \frac{1}{2}a = \cot^{-1} 0.29801$

$= 73° \, 24' \, 19''$

ดังนั้น $a = 146° \, 48' \, 38''$

จาก
$$\cot\frac{1}{2}b = \frac{R}{\cos(S - B)}$$

$$\therefore \quad \cot\frac{1}{2}b = \frac{0.18142}{0.13053}$$

$= 1.3899$

$\frac{1}{2}b = \cot^{-1} 1.3899$

$= 35° \, 44'$

ดังนั้น $b = 71° \, 28'$

และจาก $\cot\frac{1}{2}c = \frac{R}{\cos(S-C)}$

$$= \frac{0.18142}{0.38268}$$

$$= 0.47408$$

$$\frac{1}{2}c = \cot^{-1} 0.47408$$

$$= 64^\circ\ 38'\ 7''$$

ดังนั้น $c = 129^\circ\ 16'\ 14''$

ตรวจสอบ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 146^\circ\ 48'\ 38''}{\sin 150^\circ}$$

$$= \frac{\sin(180^\circ - 33^\circ\ 11'\ 22'')}{\sin(180^\circ - 30^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 33^\circ\ 11'\ 22''}{\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{0.54741}{0.50000}$$

$$= 1.09482$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 71^\circ\ 28'}{\sin 120^\circ}$$

$$= \frac{\sin 71^\circ\ 28'}{\sin(180^\circ - 60^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 71^\circ\ 28'}{\sin 60^\circ}$$

$$= \frac{0.94814}{0.86603}$$

$$= 1.09481$$

และ $\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 129^\circ\ 16'\ 14''}{\sin 135^\circ}$

$$= \frac{\sin(180^\circ - 50^\circ\ 43'\ 46'')}{\sin(180^\circ - 45^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 50^\circ\ 43'\ 46''}{\sin 45^\circ}$$

$$= \frac{0.77416}{0.70711}$$

$$= 1.09482$$

ดังนั้นจึงได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มี $a = 146^\circ 48' 38''$, $b = 71^\circ 28'$ และ $c = 129^\circ 16' 14''$

สำหรับข้อ 5 ถึงข้อ 12 ก็สามารถแก้ปัญหาได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งจะได้คำตอบดังนี้ (อาจมีค่าคลาดเคลื่อนเล็กน้อย)

5. $a = 110^\circ$, $b = 32^\circ$, $c = 96^\circ$

ตอบ $A = 118^\circ 44' 12''$

$B = 29^\circ 38' 10''$

และ $C = 68^\circ 7' 34''$

6. $a = 108^\circ 14'$, $b = 75^\circ 29'$, $c = 56^\circ 37'$

ตอบ $A = 123^\circ 53' 48''$

$B = 57^\circ 46' 56''$

และ $C = 46^\circ 51' 50''$

7. $a = 78^\circ 15' 12''$, $b = 101^\circ 20' 8''$, $c = 112^\circ 38' 42''$

ตอบ $A = 81^\circ 52' 32''$

$B = 97^\circ 31' 4''$

และ $C = 111^\circ 3' 42''$

8. $a = 70^\circ 0' 37''$, $b = 125^\circ 30' 52''$, $c = 63^\circ 47' 55''$

ตอบ $A = 34^\circ 59' 20''$

$B = 150^\circ 13' 16''$

และ $C = 33^\circ 11' 40''$

9. $A = 80^\circ$, $B = 110^\circ$, $C = 130^\circ$

ตอบ $a = 56^\circ 51' 48''$

$b = 126^\circ 57' 52''$

และ $c = 139^\circ 21' 22''$

10. $A = 59^\circ 51' 10''$, $B = 85^\circ 36' 50''$, $C = 59^\circ 55' 10''$

ตอบ $a = 51^\circ 17' 30''$

	b	$=$	$64° \, 2' \, 48''$
และ	c	$=$	$51° \, 17' \, 30''$

11. $A = 89° \, 5' \, 46''$, $B = 54° \, 32' \, 24''$, $C = 102° \, 14' \, 12''$

ตอบ	a	$=$	$97° \, 44' \, 14''$
	b	$=$	$53° \, 49' \, 22''$
และ	c	$=$	$104° \, 25' \, 4''$

12. $A = 172° \, 17' \, 56''$, $B = 8° \, 28' \, 20''$, $C = 4° \, 23' \, 35''$

ตอบ	a	$=$	$115° \, 10'$
	b	$=$	$84° \, 18' \, 28''$
และ	c	$=$	$31° \, 9' \, 14''$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.8

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังต่อไปนี้

1. $b = 135°, \quad A = 45°, \quad c = 60°$

วิธีทำ ในที่นี้จะแสดงการแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับด้าน และอุปมานของเนเปียร์

สำหรับ a หาจากกฎของโคไซน์ คือ

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \qquad \text{..........(1)}$$

ในที่นี้ $\quad b = 135°, \quad A = 45°, \quad c = 60$

$$\begin{aligned}
\therefore \cos a &= \cos 135° \cos 60° + \sin 135° \sin 60° \cos 45° \\
&= \cos(180° - 45°) \cos 60° + \sin(180° - 45°) \sin 60° \cos 45° \\
&= -\cos 45° \cos 60° + \sin 45° \sin 60° \cos 45° \\
&= (-0.70711)(.5) + (0.70711)(0.86603)(0.70711) \\
&= 0.07946 \\
\therefore a &= \cos^{-1} 0.07946 \\
&= 85° \, 26' \, 33''
\end{aligned}$$

สำหรับ B กับ C หาโดยใช้อุปมานของเนเปียร์ คือ

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(B+C)}{\cot \frac{1}{2}A} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)} \qquad \text{..........(2)}$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(B-C)}{\cot \frac{1}{2}A} = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(b+c)} \qquad \text{..........(3)}$$

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan \frac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c) \cot \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}(b+c)}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(135^\circ - 60^\circ)\cot\frac{1}{2}(45^\circ)}{\cos\frac{1}{2}(135^\circ + 60^\circ)}$$

$$= \frac{\cos 37^\circ\, 30' \cot 22^\circ\, 30'}{\cos 97^\circ\, 30'}$$

$$= \frac{\cos 37^\circ\, 30' \cot 22^\circ\, 30'}{\cos(180^\circ - 82^\circ\, 30')}$$

$$= \frac{\cos 37^\circ\, 30' \cot 22^\circ\, 30'}{-\cos 82^\circ\, 30'}$$

$$= \frac{(0.79335)(2.4142)}{-0.13053}$$

$$= -14.6733$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(B+C) = \tan^{-1}(-14.6733)$$

$$= 180^\circ - 86^\circ\, 6'\, 4''$$

$$= 93^\circ\, 53'\, 56'' \qquad \text{..........} (4)$$

จาก (3) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)\cdot\cot\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}$$

$$= \frac{\sin 37^\circ\, 30' \cot 22^\circ\, 30'}{\sin 82^\circ\, 30'}$$

$$= \frac{(0.60876)(2.4142)}{0.99144}$$

$$= 1.4823$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(B-C) = \tan^{-1} 1.4823$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(B-C) = 55^\circ\, 59'\, 42'' \qquad \text{..........} (5)$$

(4) + (5) ได้ $\quad B = 93^\circ\, 53'\, 56'' + 55^\circ\, 59'\, 42''$

$$= 149^\circ\, 53'\, 38''$$

(4) − (5) ได้ $\quad C = 93^\circ\, 53'\, 56'' - 55^\circ\, 59'\, 42''$

$$= 37^\circ\, 54'\, 6''$$

ตรวจสอบ โดยใช้กฎของไซน์ คือ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

ในที่นี้
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 85^\circ 26' 33''}{\sin 45^\circ}$$

$$= \frac{0.99684}{0.70711}$$

$$= 1.40974$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin 149^\circ 53' 38''}$$

$$= \frac{\sin(180^\circ - 45^\circ)}{\sin(180^\circ - 30^\circ 6' 22'')}$$

$$= \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ 6' 22''}$$

$$= \frac{0.70711}{0.50160}$$

$$= 1.40971$$

และ
$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 37^\circ 54' 6''}$$

$$= \frac{0.86607}{0.61431}$$

$$= 1.40976$$

ดังนั้นจึงได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มี $a = 85^\circ 26' 33''$, $B = 149^\circ 53' 38''$ และ $C = 37^\circ 54' 6''$

2. $a = 30^\circ$, $C = 150^\circ$, $b = 135^\circ$

วิธีทำ ในที่นี้จะหา c, A, B

สำหรับ c หาโดยใช้สูตรโคไซน์สำหรับด้าน

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \qquad \text{..........(1)}$$

สำหรับ A, B หาโดยใช้อุปมานของเนเปียร์

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(B+A)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-a)}{\cos \frac{1}{2}(b+a)} \qquad \text{..........(2)}$$

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(B-A)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)} \qquad \text{..........} (3)$$

สูตรตรวจสอบคือ $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$ .... (4)

ในที่นี้ $a = 30°,\ \ C = 150°,\ \ b = 135°$

จาก (1) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\cos c &= \cos 30° \cos 135° + \sin 30° \sin 135° \cos 150° \\
&= (\cos 30°)(-\cos 45°) + (\sin 30°)(\sin 45°)(-\cos 30°) \\
&= (0.86603)(-0.70711) + (0.5)(0.70711)(-0.86603) \\
&= -0.91857 \\
c &= \cos^{-1}(-0.91857) \\
&= 180° - 23°\ 16'\ 55'' \\
&= 156°\ 43'\ 5''
\end{aligned}$$

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(B+A) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)\cot\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \tan\frac{1}{2}(B+A) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(135°-30°)\cot\frac{1}{2}(150°)}{\cos\frac{1}{2}(135°+30°)} \\
&= \frac{(\cos 52°\ 30')(\cot 75°)}{\cos 82°\ 30'} \\
&= \frac{(0.60876)(0.26795)}{(0.13053)} \\
&= 1.2496 \\
\therefore\ \frac{1}{2}(B+A) &= \tan^{-1}(1.2496) \\
&= 51°\ 19'\ 53''
\end{aligned} \qquad \text{..........} (5)$$

จาก (3) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(B-A) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)\cot\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{1}{2}(B-A) = \frac{(\sin 52^\circ\ 30')(\cot 75^\circ)}{\sin 82^\circ\ 30'}$$

$$= \frac{(0.79335)(0.26795)}{0.99144}$$

$$= 0.21441$$

$$\frac{1}{2}(B-A) = \tan^{-1} 0.21441$$

$$= 12^\circ\ 6'\ 6'' \qquad \text{..........}(6)$$

(5) + (6) ได้ $\quad B = 51^\circ\ 19'\ 53'' + 12^\circ\ 6'\ 6''$

$$= 63^\circ\ 25'\ 59''$$

(5) – (6) ได้ $\quad A = 51^\circ\ 19'\ 53'' - 12^\circ\ 6'\ 6''$

$$= 39^\circ\ 13'\ 47''$$

ตรวจสอบ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 39^\circ\ 13'\ 47''}$$

$$= \frac{0.500000}{0.63239}$$

$$= 0.79$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin 63^\circ\ 25'\ 59''}$$

$$= \frac{\sin 45^\circ}{\sin 63^\circ\ 25'\ 59''}$$

$$= \frac{0.70711}{0.89441}$$

$$= 0.79$$

และ $\quad \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 156^\circ\ 43'\ 5''}{\sin 150^\circ}$

$$= \frac{\sin(180^\circ - 23^\circ\ 16'\ 55'')}{\sin(180^\circ - 30^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 23^\circ\ 16'\ 55''}{\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{0.39499}{0.50000}$$

$$= 0.79$$

ดังนั้นจึงได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มี $A = 39° 13' 47''$, $B = 63° 25' 59''$, และ $c = 156° 43' 5''$

3. $B = 30°$, $a = 45°$, $C = 60°$

วิธีทำ ในที่นี้จะหา A, b และ c

ใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม หามุม A

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad \text{..........(1)}$$

$$\therefore \cos A = -\cos 30° \cos 60° + \sin 30° \sin 60° \cos 45°$$

$$= (-0.86603)(0.5) + (0.5)(0.86603)(0.70711)$$

$$= -0.12683$$

$$\therefore A = \cos^{-1}(-0.12683)$$

$$= 180° - 82°42'49''$$

$$= 97°17'11''$$

ใช้อุปมานของเนเปียร์หาด้าน b และ c โดย

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(c+b)}{\tan \frac{1}{2} a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(C-B)}{\cos \frac{1}{2}(C+B)} \quad \text{..........(2)}$$

และ
$$\frac{\tan \frac{1}{2}(c-b)}{\tan \frac{1}{2} a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(C-B)}{\sin \frac{1}{2}(C+B)} \quad \text{..........(3)}$$

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan \frac{1}{2}(c+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(C-B)\tan \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2}(C+B)}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(60° - 30°) \tan \frac{1}{2}(45°)}{\cos \frac{1}{2}(60° + 30°)}$$

$$= \frac{\cos 15° \tan 22°30'}{\cos 45°}$$

$$= \frac{(0.96593)(0.41421)}{0.70711}$$

$$= 0.56582$$

$$\therefore \ \frac{1}{2}(c+b) = \tan^{-1} 0.56582$$

$$= 29°30'8'' \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (3) ได้ว่า

$$\tan \frac{1}{2}(c-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(C-B) \tan \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2}(C+B)}$$

$$= \frac{\sin 15° \tan 22°30'}{\sin 45°}$$

$$= \frac{(0.25882)(0.41421)}{0.70711}$$

$$= 0.15161$$

$$\therefore \ \frac{1}{2}(c-b) = \tan^{-1} 0.15161$$

$$= 8°37'16'' \qquad \text{..........(5)}$$

(4) + (5) ได้ $\quad c = 29°30'8'' + 8°37'16''$

$$= 38°7'24''$$

(4) ÷ (5) ได้ $\quad b = 29°30'8'' - 8°37'16''$

$$= 20°52'52''$$

ตรวจสอบ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 45°}{\sin 97°17'11''}$$

$$= \frac{\sin 45°}{\sin 82°42'49''}$$

$$= \frac{0.70711}{0.99192}$$

$$= 0.71287$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 20°52'52''}{\sin 30°}$$

$$= \frac{0.35643}{0.50000}$$

$$= 0.71286$$

และ $$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 38°7'24'}{\sin 60°}$$

$$= \frac{0.61735}{0.86603}$$

$$= 0.71285$$

ดังนั้น จึงได้ว่าสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มี $A = 97°17'11''$, $b = 20°52'52''$, $c = 38°7'24''$

4. $A = 60°$, $b = 120°$, $C = 150°$

วิธีทำ ในที่นี้จะหา B, a, c

หา B โดยใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม โดย

$$\cos B = -\cos C\cos A + \sin C\sin A\cos b \qquad \text{..........(1)}$$

$$\therefore \cos B = -\cos 150° \cos 60° + \sin 150° \sin 60° \cos 120°$$

$$= \cos 30° \cos 60° + \sin 30° \sin 60°(-\cos 60°)$$

$$= (0.86603)(0.5) + (0.5)(0.86603)(-0.5)$$

$$= 0.21651$$

$$\therefore B = \cos^{-1}0.21651$$

$$= 77°\ 29'\ 45''$$

สำหรับ a และ c หาได้โดยใช้อุปมานของเนเปียร์ โดย

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(c+a)}{\tan\frac{1}{2}b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C-A)}{\cos\frac{1}{2}(C+A)} \qquad \text{..........(2)}$$

และ $$\frac{\tan\frac{1}{2}(c-a)}{\tan\frac{1}{2}b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(C-A)}{\sin\frac{1}{2}(C+A)} \qquad \text{..........(3)}$$

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(c+a) = \frac{\cos\frac{1}{2}(C-A)\tan\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(C+A)}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(150° - 60°) \tan \frac{1}{2}(120°)}{\cos \frac{1}{2}(150° + 60°)}$$

$$= \frac{\cos 45° \tan 60°}{\cos 105°}$$

$$= \frac{\cos 45° \tan 60°}{-\cos 75°}$$

$$= \frac{(0.70711)(1.7321)}{-0.25882}$$

$$= -4.7322$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(c+a) = \tan^{-1}(-4.7322)$$

$$= 180° - 78°4'4''$$

$$= 101°55'56'' \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (3) ได้ว่า

$$\tan \frac{1}{2}(c-a) = \frac{\sin \frac{1}{2}(C-A) \tan \frac{1}{2} b}{\sin \frac{1}{2}(C+A)}$$

$$= \frac{\sin 45° \tan 60°}{\sin 105°}$$

$$= \frac{\sin 45° \tan 60°}{\sin 75°}$$

$$= \frac{(0.70711)(1.7321)}{0.96593}$$

$$= 1.2680$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(c-a) = \tan^{-1}(1.2680)$$

$$= 51°44'22'' \qquad \text{..........(5)}$$

(4) + (5) ได้ $\quad c = 101°55'56'' + 51°44'22''$

$$= 153°40'18''$$

(4) − (5) ได้ $\quad a = 101°55'56'' - 51°44'22''$

$$= 50°11'34''$$

ตรวจสอบ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 50°11'34''}{\sin 60°}$$

$$= \frac{0.76820}{0.86603}$$

$$= 0.887$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 120°}{\sin 77°29'45''}$$

$$= \frac{\sin 60°}{\sin 77°29'45''}$$

$$= \frac{0.86603}{0.97628}$$

$$= 0.887$$

และ
$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 153°40'18''}{\sin 150°}$$

$$= \frac{\sin(180° - 26°19'12'')}{\sin(180° - 30°)}$$

$$= \frac{\sin 26°19'12''}{\sin 30°}$$

$$= \frac{0.44338}{0.50000}$$

$$= 0.887$$

ดังนั้น จึงได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มี $B = 77°29'45''$, $a = 50°11'34''$ และ $c = 153°40'18''$

สำหรับข้อ 5. ถึง 12. ก็แก้ปัญหาได้ในทำนองเดียวกันโดยจะได้คำตอบดังนี้ (ค่าอาจคลาดเคลื่อนเล็กน้อย)

5. $c = 116°$, $A = 70°$, $B = 131°18'$

ตอบ $a = 57°56'52''$

$b = 137°20'34''$

และ $C = 94°48'14''$

6. $a = 88°37'40''$, $c = 125°18'20''$, $B = 102°16'36''$

ตอบ $b = 100°47'42''$

$A = 96°2'9''$

และ $C = 125°43'41''$

7. $a = 76°24'$, $b = 58°19'$, $C = 116°30'$

ตอบ $c = 104°12'56''$

$A = 63°48'26''$

และ $B = 51°46'38''$

8. $a = 86°18'40''$, $b = 45°36'20''$, $C = 120°46'30''$

ตอบ $c = 108°39'14''$

$A = 64°48'54''$

และ $B = 40°23'16''$

9. $a = 41°6'$, $b = 119°24'$, $C = 162°22'30''$

ตอบ $c = 156°18'50''$

$A = 29°42'2''$

และ $B = 41°2'38''$

10. $c = 120°18'33''$, $A = 27°22'34''$, $B = 91°26'44''$

ตอบ $a = 23°57'11''$

$b = 118°2'13''$

และ $C = 102°5'50''$

11. $a = 42°45'$, $b = 47°15'$, $C = 11°11'41''$

ตอบ $c = 9°5'35''$

$A = 56°30'0''$

และ $B = 115°33'56''$

12. $a = 131°15'$, $b = 129°20'$, $C = 103°37'23''$

ตอบ $c = 73°41'6''$

$A = 130°25'0''$

$B = 128°26'26''$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.9

จงแก้สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังต่อไปนี้

1. $a = 52°45'20''$, $b = 71°12'40''$, $A = 46°22'10''$

วิธีทำ ในที่นี้จะต้องหา B, C และ c

สำหรับ B หาโดยใช้กฎของไซน์ คือ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

หรือ $$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a.} \sin A \qquad \text{..........(1)}$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sin 71°12'40'' \cdot \sin 46°22'10''}{\sin 52°45'20''}$$

$$= \frac{(0.94671)(0.72380)}{(0.79606)}$$

$$= 0.86077$$

$$= 59°24'12'',\ 180° - 59°24'12''$$

$$\therefore B = 59°24'12'',\ 120°35'48''$$

จากโจทย์กำหนดให้ $b > a$ ดังนั้น B ที่ใช้ได้ต้องมีความสัมพันธ์ว่า $B > A$ ด้วย ค่า B ที่คำนวณได้นี้จึงใช้ได้ทั้ง 2 ค่า คือให้ $B_1 = 59°\ 24'\ 12''$ และ $B_2 = 120°\ 35'\ 48''$

กรณีที่ 1 เมื่อ $B_1 = 59°24'12''$ หา C_1 และ c_1 หา C_1 โดยใช้อุปมานของเนเปียร์ คือ

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(B_1 - A)}{\cot \frac{1}{2} C_1} = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\therefore \cot \frac{1}{2} C_1 = \frac{\sin \frac{1}{2}(b+a)}{\sin \frac{1}{2}(b-a)} \tan \frac{1}{2}(B_1 - A)$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(71°12'40'' + 52°45'20'')\tan \frac{1}{2}(59°24'12'' - 46°22'10'')}{\sin \frac{1}{2}(71°12'40'' - 52°45'20'')}$$

$$= \frac{\sin 61°59' \tan 6°31'1''}{\sin 9°13'40''}$$

$$= \frac{(0.88281)(0.11423)}{(0.16036)}$$

$$= 0.62886$$

$$\therefore \frac{1}{2}C_1 = \cot^{-1} 0.62886$$

$$= 57°50'9''$$

$$\therefore C_1 = 115°40'18''$$

หา c_1 : โดยใช้อุปมานของเนเปียร์ คือ

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(b-a)}{\tan \frac{1}{2}c_1} = \frac{\sin \frac{1}{2}(B_1 - A)}{\sin \frac{1}{2}(B_1 + A)}$$

$$\therefore \tan \frac{1}{2}c_1 = \frac{\sin \frac{1}{2}(B_1 + A) \tan \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(B_1 - A)}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(59°24'12'' + 46°22'10'')\tan \frac{1}{2}(71°12'40' - 52°45'20'')}{\sin \frac{1}{2}(59°24'12'' - 46°22'10'')}$$

$$= \frac{\sin 52°53'11'' \tan 9°13'40''}{\sin 6°31'1''}$$

$$= \frac{(0.79744)(0.16246)}{(0.11349)}$$

$$= 1.1415$$

$$\therefore \frac{1}{2}c_1 = \tan^{-1} 1.1415$$

$$= 48°46'50''$$

$$\therefore c_1 = 97°33'40''$$

กรณีที่ 2 เมื่อ $B_2 = 120°\ 35'\ 48''$ หา C_2 และ c_2

หา C_2 :

จาก $$\cot \frac{1}{2}C_2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(b+a)}{\sin \frac{1}{2}(b-a)} \tan \frac{1}{2}(B_2 - A)$$

$$\therefore\quad \cot\frac{1}{2}C_2 = \frac{\sin 61^\circ\, 59'\, \tan 37^\circ\, 6'\, 49''}{\sin 9^\circ\, 13'\, 40''}$$

$$= \frac{(0.88281)\,(0.75666)}{(0.16036)}$$

$$= 4.1655$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}C_2 = \cot^{-1} 4.1655$$

$$= 13^\circ\, 29'\, 57''$$

$$\therefore\quad C_2 = 26^\circ\, 59'\, 54''$$

หา c_2 :

จาก
$$\tan\frac{1}{2}c_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(B_2 + A)}{\sin\frac{1}{2}(B_2 - A)}\tan\frac{1}{2}(b-a)$$

$$= \frac{\sin 83^\circ\, 28'\, 59''\, \tan 9^\circ\, 13'\, 40''}{\sin 37^\circ\, 6'\, 49''}$$

$$= \frac{(0.99354)\,(0.16246)}{(0.60340)}$$

$$= 0.26750$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}c_2 = \tan^{-1} 0.26750$$

$$= 14^\circ\, 58'\, 33''$$

$$\therefore\quad c_2 = 29^\circ\, 57'\, 6''$$

การตรวจสอบ สามารถตรวจสอบได้โดยใช้กฎของไซน์ (ให้นักศึกษาตรวจสอบเอง)

ดังนั้นจึงได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เมื่อกำหนด $a = 52^\circ\, 45'\, 20''$, $b = 71^\circ\, 12'\, 40''$, $A = 46^\circ\, 22'\, 10''$ จะได้คำตอบ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 คือ สามเหลี่ยม AB_1C_1 ซึ่งมี $B_1 = 59^\circ\, 24'\, 12''$, $C_1 = 115^\circ\, 40'\, 18''$ และ $c_1 = 97^\circ\, 33'\, 40''$

กรณีที่ 2 คือ สามเหลี่ยม AB_2C_2 ซึ่งมี $B_2 = 120^\circ\, 35'\, 48''$, $C_2 = 26^\circ\, 59'\, 54''$ และ $c_2 = 29^\circ\, 57'\, 6''$

2. $a = 68^\circ\, 52'\, 48''$, $b = 56^\circ\, 49'\, 46''$, $B = 45^\circ\, 15'\, 12''$

วิธีทำ ในที่นี้จะต้องหา A, c, C

หา A : โดยใช้กฎของไซน์ คือ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{\sin B}{\sin b}\sin a$$

$$= \frac{\sin 45^\circ\ 15'\ 12'' \cdot \sin 68^\circ\ 52'\ 48''}{\sin 56^\circ\ 49'\ 46''}$$

$$= \frac{(0.71023)\,(0.93283)}{(0.83704)}$$

$$= 0.79151$$

$$= 52^\circ\ 19'\ 36'',\ 127^\circ\ 40'\ 24''$$

จากโจทย์ กำหนด $a > b$ ดังนั้น ค่า A ที่ใช้ได้จะต้องมีความสัมพันธ์ว่า $A > B$ ด้วย ค่า A ที่คำนวณได้นี้ จึงใช้ได้ทั้ง 2 ค่า คือ $A_1 = 52^\circ\ 19'\ 36''$ และ $A_2 = 127^\circ\ 40'\ 24''$

กรณีที่ 1 เมื่อ $A_1 = 52^\circ\ 19'\ 36''$ หา C_1 และ c_1

หา C_1 โดยใช้อุปมานของเนเปียร์ คือ

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A_1 - B)}{\cot\frac{1}{2}C_1} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\therefore \quad \cot\frac{1}{2}C_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\tan\frac{1}{2}(A_1 - B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(68^\circ\ 52'\ 48'' + 56^\circ\ 49'\ 46'')\tan\frac{1}{2}(52^\circ\ 19'\ 36'' - 45^\circ\ 15'\ 12'')}{\sin\frac{1}{2}(68^\circ\ 52'\ 48'' - 56^\circ\ 49'\ 46'')}$$

$$= \frac{(\sin 62^\circ\ 51'\ 17'')\,(\tan 3^\circ\ 32'\ 12'')}{(\sin 6^\circ\ 1'\ 31'')}$$

$$= \frac{(0.88985)\,(0.06184)}{(0.10497)}$$

$$= 0.52423$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}C_1 = \cot^{-1} 0.52423$$

$$= 62^\circ\ 20'\ 6''$$

$\therefore \quad C_1 = 124° \, 40' \, 12''$

หา c_1 : โดยใช้อุปมานของเนเปียร์ คือ

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c_1} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A_1-B)}{\sin\frac{1}{2}(A_1+B)}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{1}{2}c_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}(A_1+B)\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A_1-B)}$$

$$= \frac{(\sin 48° \, 47' \, 24'')(\tan 6° \, 1' \, 30'')}{(\sin 3° \, 32' \, 12'')}$$

$$= \frac{(0.75230)(0.10555)}{(0.06169)}$$

$$= 1.2872$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}c_1 = \tan^{-1}(1.2872)$$

$$= 52° \, 9' \, 26''$$

$$\therefore \quad c_1 = 104° \, 18' \, 52''$$

กรณีที่ 2 เมื่อ $A_2 = 127° \, 40' \, 24''$ หา C_2 และ c_2

หา C_2 โดยใช้การอุปมานของเนเปียร์ คือ

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A_2-B)}{\cot\frac{1}{2}C_2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\therefore \quad \cot\frac{1}{2}C_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\tan\frac{1}{2}(A_2-B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$= \frac{(\sin 62° \, 51' \, 17'')(\tan 41° \, 12' \, 36'')}{(\sin 6° \, 1' \, 31'')}$$

$$= \frac{(0.88985)(0.87574)}{(0.10497)}$$

$$= 7.4238$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}C_2 = \cot^{-1}(7.4238)$$

$$= 7^\circ\ 40'\ 18''$$

$$\therefore\ C_2 = 15^\circ\ 20'\ 36''$$

หา c_2 โดยใช้อุปมานของเนเปียร์ คือ

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c_2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A_2-B)}{\sin\frac{1}{2}(A_2+B)}$$

$$\therefore\ \tan\frac{1}{2}c_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(A_2+B)\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A_2-B)}$$

$$= \frac{(\sin 86^\circ\ 27'\ 48'')(\tan 6^\circ\ 1'\ 31'')}{(\sin 41^\circ\ 12'\ 36'')}$$

$$= \frac{(0.99810)(0.10555)}{(0.65882)}$$

$$= 0.15991$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}c_2 = \tan^{-1} 0.15991$$

$$= 9^\circ\ 5'\ 4''$$

$$\therefore\ c_2 = 18^\circ\ 10'\ 8''$$

เราสามารถตรวจสอบคำตอบได้โดยใช้กฎของไซน์ (ให้นักศึกษาตรวจสอบเอง)

ดังนั้นจึงได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เมื่อกำหนด $a = 68^\circ\ 52'\ 48''$, $b = 56^\circ\ 49'\ 46''$ และ $B = 45^\circ\ 15'\ 12''$ จะได้คำตอบ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $A_1 = 52^\circ\ 19'\ 36''$, $C_1 = 124^\circ\ 40'\ 12''$, $c_1 = 104^\circ\ 18'\ 52''$

กรณีที่ 2 $A_2 = 127^\circ\ 40'\ 24''$, $C_2 = 15^\circ\ 20'\ 36''$, $c_2 = 18^\circ\ 10'\ 8''$

3. $a = 34^\circ\ 0'\ 30''$, $A = 61^\circ\ 29'\ 30''$, $B = 24^\circ\ 30'\ 30''$

วิธีทำ ในที่นี้จะหาค่า b, c และ C

หา b : โดยใช้กฎของไซน์ คือ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

$$\therefore\ \sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin 34^\circ\, 0'\, 30'' \cdot \sin 24^\circ\, 30'\, 30''}{\sin 61^\circ\, 29'\, 30''}$$

$$= \frac{(0.55931)\,(0.41482)}{(0.87875)}$$

$$= 0.26403$$

$$\therefore \quad b = \sin^{-1}(0.26403)$$

$$= 15^\circ\, 18'\, 34'',\ 164^\circ\, 41'\, 26''$$

จากโจทย์กำหนดให้ $B < A$ ดังนั้น ค่า b ที่ใช้ได้ จะต้องมีความสัมพันธ์ว่า $b < a$ ด้วย จึงได้ค่า b ที่ใช้ได้เพียงค่าเดียว คือ $b = 15^\circ\, 18'\, 34''$

หา c โดยใช้อุปมานของเนเปียร์ คือ

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$= \frac{(\sin 43^\circ)\,(\tan 9^\circ\, 20'\, 58'')}{(\sin 18^\circ\, 29'\, 30'')}$$

$$= \frac{(0.68200)\,(0.16464)}{(0.31716)}$$

$$= 0.35403$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}c = \tan^{-1}(0.35403)$$

$$= 19^\circ\, 29'\, 44''$$

$$\therefore \quad c = 38^\circ\, 59'\, 28''$$

หา C โดยใช้อุปมานของเนเปียร์ คือ

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\therefore \quad \cot\frac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$= \frac{\sin 24” \; 39’ \; 32” \; . \tan 18° \; 29‘ \; 30''}{\sin 9° \; 20’ \; 58”}$$

$$= \frac{(0.41721) \quad (0.33443)}{(0.16245)}$$

$$= \quad 0.85889$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}C \quad = \quad \cot^{-1} \quad (0.85889)$$

$$= \quad 49" \; 20' \; 28"$$

$$\therefore \quad C \quad = \quad 98° \; 40' \; 56''$$

ดังนั้นจึงได้ว่า ส่วนที่ต้องการของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มี $b = 15° \; 18' \; 34''$, $c = 38" \; 59' \; 28''$, และ $C = 98" \; 40' \; 56''$

4. $a = 42° \; 15’ \; 20''$, $A = 36° \; 20’ \; 20''$, $B = 46° \; 30’ \; 40''$

วิธีทำ ในที่นี้ต้องการหา b, c และ C

หา b โดยใช้กฎของไซน์ คือ

$$\sin \; b \; = \; \frac{\sin a}{\sin A} \sin \; B$$

$$= \frac{\sin 42” \; 15’ \; 20'' \; . \sin 46” \; 30’ \; 40''}{\sin 36” \; 20’ \; 20''}$$

$$= \frac{(0.67244) \; (0.72544)}{(0.59256)}$$

$$= \; 0.82323$$

$$\therefore \quad b \quad = \quad \sin^{-1} (0.82323)$$

$$= \quad 55° \; 24' \; 34'', \; 124° \; 35' \; 26''$$

จากโจทย์กำหนดให้ $B > A$ ดังนั้นค่า b ที่นำมาใช้จะต้องมีความสัมพันธ์ว่า $b > a$ ด้วย จึงใช้ได้ทั้ง 2 ค่า คือ ได้ $b_1 = 55° \; 24' \; 34''$ และ $b_2 = 124° \; 35' \; 26''$

กรณีที่ 1 ให้ $b_1 = 55° \; 24' \; 34''$ หา c_1, C_1

หา c_1 โดยอุปมานของเนเปียร์ได้ว่า

$$\tan \frac{1}{2} c_1 \quad = \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(B + A)}{\sin \frac{1}{2}(B - A)} \tan \frac{1}{2}(b - a)$$

$$= \frac{(\sin 41^\circ\ 25'\ 30'')(\tan 6''\ 34'\ 37'')}{(\sin 5^\circ\ 5'\ 10'')}$$

$$= \frac{(0.66164)\ \ (0.11529)}{(0.08869)}$$

$$= 0.86008$$

$$\therefore \frac{1}{2}c_1 = \tan^{-1} 0.86008$$

$$= 40''\ 41'\ 41''$$

$$\therefore c_1 = 81^\circ\ 23'\ 22''$$

หา C_1 โดยอุปมานของเนเปียร์ ได้ว่า

$$\cot \frac{1}{2}C_1 = \frac{\sin \frac{1}{2}(b_1 + a) \tan \frac{1}{2}(B - A)}{\sin \frac{1}{2}(b_1 - a)}$$

$$= \frac{(\sin 48''\ 49'\ 57'')(\tan 5^\circ\ 5'\ 10'')}{(\sin 6''\ 34'\ 37'')}$$

$$= \frac{(0.75279)\ \ (0.08900)}{(0.11454)}$$

$$= 0.58493$$

$$\therefore \frac{1}{2}C_1 = \cot^{-1}(0.58493)$$

$$= 59''\ 40'\ 30''$$

$$\therefore C_1 = 119''\ 21'\ 0''$$

กรณีที่ 2 ให้ $b_2 = 124^\circ\ 35'\ 26''$ Ml c_2, C_2

หา c_2 โดยอุปมานของเนเปียร์ได้ว่า

$$\tan \frac{1}{2}c_2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(B + A) \tan \frac{1}{2}(b_2 - a)}{\sin \frac{1}{2}(B - A)}$$

$$= \frac{(\sin 41''\ 25'\ 30'')(\tan 41''\ 10'\ 3'')}{(\sin 5''\ 5'\ 10'')}$$

$$= \frac{(0.66164)\ \ (0.87444)}{(0.08869)}$$

$$= 6.5234$$

$$\therefore \frac{1}{2}c_2 = \tan^{-1} 6.5234$$

$$= 81'' \; 17' \; 5''$$

$$\therefore c_2 = 162'' \; 34' \; 10''$$

หา C_2 โดยอุปมานของเนเปียร์ ได้ว่า

$$\cot\frac{1}{2}C_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(b_2+a)\tan\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(b_2-a)}$$

$$= \frac{(\sin 83'' \; 25' \; 23'')(\tan 5^\circ \; 5' \; 10'')}{\sin 41'' \; 10' \; 3''}$$

$$= \frac{(0.99342)\;(0.08900)}{(0.65826)}$$

$$= 0.13431$$

$$\therefore \frac{1}{2}C_2 = \cot^{-1}(0.13431)$$

$$= 82'' \; 21' \; 2''$$

$$\therefore C_2 = 164^\circ \; 42' \; 4''$$

สำหรับการตรวจสอบ อาจตรวจสอบด้วยอุปมานของเกาส์ คือ

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B+A)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

(ให้นักศึกษาตรวจสอบเอง)

ดังนั้นจึงได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เมื่อกำหนด $a = 42^\circ\,15'\,20''$, $A = 36^\circ\,20'\,22''$, $B = 46^\circ\,30'\,40''$ จะได้ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $b_1 = 55^\circ\,24'\,34''$, $c_1 = 81^\circ\,23'\,22''$ และ $C_1 = 119^\circ\,21'$

กรณีที่ 2 $b_2 = 124^\circ\,35'\,26''$, $c_2 = 162^\circ\,34'\,10''$ และ $C_2 = 164^\circ\,42'\,4''$

สำหรับข้อ 5 ถึงข้อ 10 ก็สามารถทำได้ในทำนองคล้ายคลึงกัน โดยจะได้คำตอบดังนี้ (คำตอบอาจมีค่าคลาดเคลื่อนเล็กน้อย)

5. $a = 59''\;28'\;27''$, $A = 52^\circ\;50'\;20''$

   $B = 66''\;7'\;20''$

ตอบ *กรณีที่ 1* $b_1 = 81''\;15'\;30''$

$c_1 = 110° \, 11' \, 28''$

และ $C_1 = $ 119” 44’ 16”

กรณีที่ 2 $b_2 = 98°$ 44’ 30”

$c_2 = $ 138” 45’ 12”

และ $C_2 = $ 142” 24’ 46”

6. a = 63” 29’ 56″, b = 132” 14’ 23″, C = 61” 18’ 27”

ตอบ c = 88” 57’ 36”

A = 51” 44’ 10″

และ B = 139” 29’ 34”

7. a = 98” 53’ 12″, c = 64” 35’ 48″, A = 95° 23’ 24”

ตอบ b = 99” 29’ 36″

C = 65° 32’ 18”

และ B = 96” 21’

8. b = 37” 47’ 12″, c = 103” 1’ 24″, B = 24” 25’ 36”

ตอบ *กรณีที่ 1* a, = 73° 58’

A, = 40” 26’ 24”

และ c, = 138” 53’ 12”

กรณีที่ 2 a, = 134” 32’ 36”

A, = 151” 14’ 48”

และ $C_2 = 41°$ 6’ 48”

9. a = 80” 5’ 18″, b = 82” 4′, A = 83° 34’ 12″

ตอบ *กรณีที่ 1* $c_1 = $ 52” 27’ 12”

B, = 87“ 34’ 30”

และ c, = 53” 6’ 36”

กรณีที่ 2 $c_2 = $ 25” 12’

$B_2 = 92°$ 25’ 30”

และ $C_2 = $ 25” 26’ 12”

10. $A = 117° 54' 24''$, $C = 45° 8' 36''$, $a = 76° 37' 30''$

ตอบ $b = 41° 4' 36''$

$c = 51° 17' 54''$

$B = 36° 38' 48''$