

ภาคเฉลยแบบฝึกหัด

## เฉลยแบบฝึกหัด, 2.4

1. จงแก้ปัญหของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เมื่อกำหนดให้

1.1  $A = B = C = 90^\circ$

**วิธีทำ**

เนื่องจาก  $A = B = C = 90^\circ$  จึงได้ว่า

จุดยอดแต่ละจุดจะเป็นจุดซ้ของวงกลมใหญ่ที่ผ่านจุดยอดอีกสองจุด (เช่น จุดยอด A จะเป็นจุดซ้ของวงกลมใหญ่ที่ผ่านจุดยอด B และจุดยอด C) โดยแต่ละจุดยอดจะมีระยะห่างจากอีก 2 จุดยอด เป็นระยะ  $90^\circ$

ดังนั้นจึงได้ว่า ส่วนที่ต้องการคือ  $a = b = c = 90^\circ$

1.2  $a = b = 90^\circ, c = 60^\circ$

เนื่องจากกำหนดให้  $a = b = 90^\circ$  จึงได้ว่า

C มีระยะห่างจาก A และ B เป็น  $90^\circ$  ดังนั้น C จึงเป็นจุดซ้ของวงกลมใหญ่ ที่มี  $AB = c$  เป็นส่วนโค้งส่วนหนึ่ง

เนื่องจาก  $c = 60^\circ =$  ส่วนโค้ง AB

ดังนั้น  $C = 60^\circ$  ด้วย

ระนาบ AOC และระนาบ BOC ต่างก็ตั้งฉากกับระนาบ AOB เนื่องจากเส้นตัด OC ตั้งฉากกับระนาบ AOB

ดังนั้น A และ B จึงเป็นมุมฉาก จึงได้ว่า

ส่วนที่ต้องการ คือ  $A = B = 90^\circ, C = 60^\circ$

2. จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของด้านทั้งสาม ดังนี้

2.1  $160^\circ, 110^\circ, 85^\circ$

**วิธีทำ**

เพราะว่า  $160^\circ + 110^\circ = 270^\circ > 85^\circ$

$$160^\circ + 85^\circ = 245^\circ > 110^\circ$$

$$110^{\circ} + 85^{\circ} = 195^{\circ} > 160^{\circ}$$

และ  $160^{\circ} + 110^{\circ} + 85^{\circ} = 355^{\circ} < 360^{\circ}$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของด้านทั้งสามเป็น  $160^{\circ}$ ,  $110^{\circ}$  และ  $85^{\circ}$

2.2  $170^{\circ}$ ,  $150^{\circ}$ ,  $10^{\circ}$

**วิธีทำ**

เพราะว่า  $150^{\circ} + 10^{\circ} = 160^{\circ} \neq 170^{\circ}$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของด้านทั้งสามเป็น  $170^{\circ}$ ,  $150^{\circ}$  และ  $10^{\circ}$

2.3  $170^{\circ}$ ,  $150^{\circ}$ ,  $50^{\circ}$

**วิธีทำ**

เพราะว่า  $170^{\circ} + 150^{\circ} = 320^{\circ} > 50^{\circ}$

$$170^{\circ} + 50^{\circ} = 220^{\circ} > 150^{\circ}$$

$$150^{\circ} + 50^{\circ} = 200^{\circ} > 170^{\circ}$$

และ  $170^{\circ} + 150^{\circ} + 50^{\circ} = 370^{\circ} < 360^{\circ}$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของด้านทั้งสามเป็น  $170^{\circ}$ ,  $150^{\circ}$  และ  $50^{\circ}$

2.4  $30^{\circ}$ ,  $50^{\circ}$ ,  $70^{\circ}$

**วิธีทำ**

เพราะว่า  $30^{\circ} + 50^{\circ} = 80^{\circ} > 70^{\circ}$

$$30^{\circ} + 70^{\circ} = 100^{\circ} > 50^{\circ}$$

$$50^{\circ} + 70^{\circ} = 120^{\circ} > 30^{\circ}$$

และ  $30^{\circ} + 50^{\circ} + 70^{\circ} = 150^{\circ} < 360^{\circ}$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของด้านทั้งสามเป็น  $30^{\circ}$ ,  $50^{\circ}$  และ  $70^{\circ}$

3. จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสาม ดังนี้

3.1  $30^\circ$ ,  $37^\circ$ ,  $128^\circ$

**วิธีทำ**

เพราะว่า  $30^\circ + 37^\circ + 128^\circ = 195^\circ$

ซึ่งจะได้ว่า  $180^\circ < 195^\circ < 540^\circ$

และได้ด้วยว่า

$$(1) \quad 30^\circ + 37^\circ < 128^\circ + 180^\circ$$

$$\text{หรือ} \quad 67^\circ < 308^\circ$$

$$(2) \quad 30^\circ + 128^\circ < 37^\circ + 180^\circ$$

$$\text{หรือ} \quad 158^\circ < 217^\circ$$

$$(3) \quad 37^\circ + 128^\circ < 30^\circ + 180^\circ$$

$$\text{หรือ} \quad 165^\circ < 210^\circ$$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสามเป็น  $30^\circ$ ,  $37^\circ$  และ  $128^\circ$

3.2  $30^\circ$ ,  $37^\circ$ ,  $111^\circ$

**วิธีทำ**

เพราะว่า  $30^\circ + 37^\circ + 111^\circ = 178^\circ \neq 180^\circ$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ไม่ได้ ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสามเป็น  $30^\circ$ ,  $37^\circ$  และ  $111^\circ$

3.3  $37^\circ$ ,  $51^\circ$ ,  $131^\circ$

**วิธีทำ**

เพราะว่า  $37^\circ + 51^\circ + 131^\circ = 219^\circ$

ซึ่งได้ว่า  $180^\circ < 219^\circ < 540^\circ$

และได้ด้วยว่า

$$(1) \quad 37^\circ + 51^\circ < 131^\circ + 180^\circ$$

$$\text{หรือ} \quad 89^\circ < 311^\circ$$

$$(2) \quad 37^\circ + 131^\circ < 51^\circ + 180^\circ$$

$$\text{หรือ} \quad 168^\circ < 231^\circ$$

$$(3) \quad 51^\circ + 131^\circ < 37^\circ + 180^\circ$$

$$\text{หรือ} \quad 182^\circ < 217^\circ$$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มีขนาดของมุมทั้งสามเป็น  $37^\circ$ ,  $51^\circ$  และ  $131^\circ$

3.4  $40^\circ$ ,  $85^\circ$ ,  $140^\circ$

วิธีทำ

เพราะว่า  $40^\circ + 85^\circ + 140^\circ = 265^\circ$

ซึ่งได้ว่า  $180^\circ < 265^\circ < 540^\circ$

แต่  $85^\circ + 140^\circ \not< 40^\circ + 180^\circ$

หรือ  $225^\circ \not< 220^\circ$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสามเป็น  $40^\circ$ ,  $85^\circ$  และ  $140^\circ$

3.5  $60^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $90^\circ$

วิธีทำ

เพราะว่า  $60^\circ + 70^\circ + 90^\circ = 220^\circ$

ซึ่งได้ว่า  $180^\circ < 220^\circ < 540^\circ$

และได้ด้วยว่า

(1)  $60^\circ + 70^\circ < 90^\circ + 180^\circ$

หรือ  $130^\circ < 270^\circ$

(2)  $60^\circ + 90^\circ < 70^\circ + 180^\circ$

หรือ  $150^\circ < 250^\circ$

(3)  $70^\circ + 90^\circ < 60^\circ + 180^\circ$

หรือ  $160^\circ < 240^\circ$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสามเป็น  $60^\circ$ ,  $70^\circ$  และ  $90^\circ$

3.6  $60^\circ$ ,  $115^\circ$ ,  $145^\circ$

วิธีทำ

เพราะว่า  $60^\circ + 115^\circ + 145^\circ = 320^\circ$

ซึ่งจะได้ว่า  $180^\circ < 320^\circ < 540^\circ$

แต่  $115^\circ + 145^\circ \not< 60^\circ + 180^\circ$

หรือ  $260^\circ \not< 240^\circ$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสามเป็น  $60^\circ$ ,  $115^\circ$  และ  $145^\circ$

3.7  $60^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $90^\circ$

**วิธีทำ**

เพราะว่า  $60^\circ + 20^\circ + 90^\circ = 170^\circ$

ซึ่งได้ว่า  $180^\circ \not\approx 170^\circ$

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสามเป็น  $60^\circ$ ,  $20^\circ$  และ  $90^\circ$

---

## เฉลยแบบฝึกหัด 2.5

กำหนดให้ ทรงกลม  $O$  มีรัศมียาว 10 หน่วย จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม  $ABC$  บนผิวของทรงกลมนี้ และอัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับพื้นที่ผิวของทรงกลม เมื่อกำหนดส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม  $ABC$  ให้ดังต่อไปนี้

$$1. A = B = C = 110^\circ$$

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad E = A + B + C - 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore E &= 110^\circ + 110^\circ + 110^\circ - 180^\circ \\ &= 150^\circ \end{aligned}$$

ถ้าให้  $K$  เป็นพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม แล้ว

$$K = \frac{\pi R^2 E}{180^\circ}$$

ในที่นี้  $R = 10$ ,  $E = 150^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore K &= \frac{\pi(10)^2(150)}{180} \\ &= \frac{250\pi}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม  $ABC$  คือ  $\frac{250\pi}{3}$  ตารางหน่วย

$$\begin{aligned} \text{และพื้นที่ผิวทรงกลม คือ } 4\pi R^2 &= 4\pi(10)^2 \\ &= 400\pi \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

อัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับพื้นที่ผิวของทรงกลม คือ

$$\frac{\frac{250\pi}{3}}{400\pi} = \frac{5}{24}$$

$$2. \quad A = 60^\circ, \quad B = 70^\circ, \quad C = 90^\circ$$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad E &= A+B+C-180^\circ \\ \therefore E &= 60^\circ+70^\circ+90^\circ-180^\circ \\ &= 40^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และจาก} \quad K &= \frac{\pi R^2 E}{180} \\ \therefore K &= \frac{\pi(10)^2(40)}{180} \\ &= \frac{200\pi}{9} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC คือ  $\frac{200\pi}{9}$  ตารางหน่วย

และพื้นที่ของผิวทรงกลม คือ  $4\pi R^2 = 4\pi(10)^2 = 400\pi$  ตารางหน่วย

ดังนั้น อัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับพื้นที่ผิวทรงกลม คือ

$$\frac{\frac{200\pi}{9}}{400\pi} = \frac{1}{18}$$

$$3. \quad A = 30^\circ, \quad B = 37^\circ, \quad C = 128^\circ$$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad E &= A+B+C-180^\circ \\ &= 30^\circ+37^\circ+128^\circ-180^\circ \\ &= 15^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และจาก} \quad K &= \frac{\pi R^2 E}{180} \\ \therefore K &= \frac{\pi(100)(15)}{180} \\ &= \frac{50\pi}{6} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC คือ  $\frac{50\pi}{6}$  ตารางหน่วย

และพื้นที่ผิวทรงกลม คือ  $400\pi$

ดังนั้น อัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับพื้นที่ผิวทรงกลม คือ



$$\frac{\frac{50\pi}{6}}{400\pi} = \frac{1}{48}$$

4.  $A = 37^\circ$ ,  $B = 51^\circ$ ,  $C = 131^\circ$

**วิธีทำ**

จาก  $E = A + B + C - 180^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore E &= 37^\circ + 51^\circ + 131^\circ - 180^\circ \\ &= 39^\circ \end{aligned}$$

และจาก  $K = \frac{\pi R^2 E}{180}$

$$\begin{aligned} \therefore K &= \frac{\pi(100)(39)}{180} \\ &= \frac{65\pi}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC คือ  $\frac{65\pi}{3}$  ตารางหน่วย

และพื้นที่ผิวทรงกลม คือ  $400\pi$

ดังนั้น อัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับพื้นที่ผิวทรงกลม คือ

$$\frac{\frac{65\pi}{3}}{400\pi} = \frac{13}{240}$$

5.  $a = b = 90^\circ$ ,  $c = 60^\circ$

**วิธีทำ**

จากข้อ 1.2 ของเฉลยแบบฝึกหัด 2.4 ได้ว่า

$$A = B = 90^\circ, C = 60^\circ$$

จาก  $E = A + B + C - 180^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore E &= 90^\circ + 90^\circ + 60^\circ - 180^\circ \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

และจาก  $K = \frac{\pi R^2 E}{180}$

$$\begin{aligned} \therefore K &= \frac{\pi(100)(60)}{180} \\ &= \frac{100\pi}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC คือ  $\frac{100\pi}{3}$  ตารางหน่วย

และพื้นที่ผิวทรงกลมคือ  $400\pi$

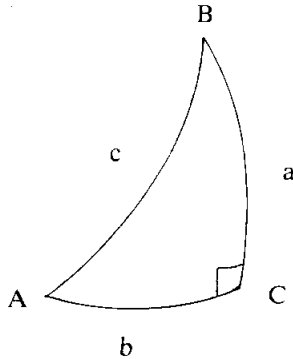
ดังนั้น อัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับพื้นที่ผิวทรงกลม คือ

$$\frac{\frac{100\pi}{3}}{400\pi} = \frac{1}{12}$$

---

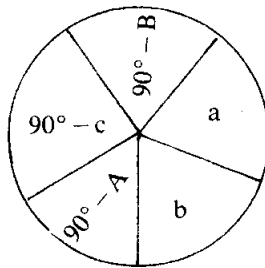
## เฉลยแบบฝึกหัด 3.3

1. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC มี C เป็นมุมฉาก (ดังรูป 3.3.1) จงหาส่วนที่ไม่ทราบค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้



รูป 3.3.1

จากรูป 3.3.1 เขียนส่วนของวงกลมห้าส่วน เพื่อใช้กฎของเนเปียร์แก้ปัญหาโจทย์ข้อ 1.1 ถึง 1.9 ดังนี้



1.1 ถ้า  $c = 60^\circ$ ,  $a = 45^\circ$  จงหา B

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}
 \text{จาก} \quad \sin(90^\circ - B) &= \tan a \tan (90^\circ - c) \\
 \therefore \cos B &= \tan a \cot c \\
 &= \tan 45^\circ \cot 60^\circ \\
 &= (1) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\therefore B = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sec^{-1}(\sqrt{3})$$

1.2 ถ้า  $a = 45^\circ$ ,  $B = 60^\circ$  จงหา  $c$

**วิธีทำ**

$$\text{จาก } \sin(90^\circ - B) = \tan a \tan(90^\circ - c)$$

$$\therefore \cos B = \tan a \cot c$$

$$\cot c = \cos B \cot a$$

$$= \cos 60^\circ \cot 45^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) (1)$$

$$\therefore c = \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1}(2)$$

1.3 ถ้า  $a = 60^\circ$ ,  $B = 30^\circ$  จงหา  $A$

**วิธีทำ**

$$\text{จาก } \sin(90^\circ - A) = \cos a \cos(90^\circ - B)$$

$$\therefore \cos A = \cos a \sin B$$

$$= \cos 60^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore A = \cos^{-1}\frac{1}{4} = \sec^{-1}4$$

1.4 ถ้า  $c = 60^\circ$ ,  $A = 45^\circ$  จงหา  $b$

**วิธีทำ**

$$\text{จาก } \sin(90^\circ - A) = \tan b \tan(90^\circ - c)$$

$$\therefore \cos A = \tan b \cot c$$

$$\therefore \tan b = \cos A \tan c$$

$$= \cos 45^\circ \tan 60^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\sqrt{3})$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore b = \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

1.5 ถ้า  $B = 150^\circ$ ,  $c = 120^\circ$  จงหา  $a$

**วิธีทำ**

$$\text{จาก } \sin(90^\circ - B) = \tan a \tan(90^\circ - c)$$

$$\therefore \cos B = \tan a \cot c$$

$$\therefore \tan a = \cos B \tan c$$

$$= \cos 150^\circ \tan 120^\circ$$

$$= \cos(180^\circ - 30^\circ) \tan(180^\circ - 60^\circ)$$

$$= (-\cos 30^\circ) (-\tan 60^\circ)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (-\sqrt{3})$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = \tan^{-1} \frac{3}{2}$$

1.6 ถ้า  $A = 135^\circ$ ,  $B = 60^\circ$  จงหา  $c$

**วิธีทำ**

$$\text{จาก } \sin(90^\circ - c) = \tan(90^\circ - A) \tan(90^\circ - B)$$

$$\therefore \cos c = \cot A \cot B$$

$$= \cot 135^\circ \cot 60^\circ$$

$$= \cot(180^\circ - 45^\circ) \cot 60^\circ$$

$$= (-\cot 45^\circ) (\cot 60^\circ)$$

$$= (-1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$c = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \pi - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \pi - \sec^{-1} \sqrt{3}$$

1.7 ถ้า  $a = 30^\circ$ ,  $B = 120^\circ$  จงหา  $A$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}\text{จาก } \sin(90^\circ - A) &= \cos a \cos(90^\circ - B) \\ \therefore \cos A &= \cos a \sin B \\ &= \cos 30^\circ \sin 120^\circ \\ &= \cos 30^\circ \sin(180^\circ - 60^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \sin 60^\circ \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} \\ \therefore A &= \cos^{-1} \frac{3}{4}\end{aligned}$$

1.8 ถ้า  $c = 120^\circ$ ,  $a = 135^\circ$  จงหา  $B$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}\text{จาก } \sin(90^\circ - B) &= \tan a \tan(90^\circ - c) \\ \therefore \cos B &= \tan a \cot c \\ &= \tan 135^\circ \cot 120^\circ \\ &= \tan(180^\circ - 45^\circ) \cot(180^\circ - 60^\circ) \\ &= (-\tan 45^\circ)(-\cot 60^\circ) \\ &= (-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \therefore B &= \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \sec^{-1} \sqrt{3}\end{aligned}$$

2. จงแสดงว่า ไม่มีสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด  
ไว้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1  $A - B > 90^\circ$

**วิธีทำ**

จากสูตร (10) ได้ว่า

$$\cos B = \sin A \cos b$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos b &= \frac{\cos B}{\sin A} \\ &= \frac{\sin(90^\circ - B)}{\sin(180^\circ - A)} \end{aligned}$$

จาก  $A - B > 90^\circ$

$$\therefore A > 90^\circ + B$$

$$\therefore -A < -90^\circ - B$$

เอา  $180^\circ$  บวกตลอด ได้เป็น

$$180^\circ - A < 90^\circ - B$$

$$\therefore \sin(180^\circ - A) < \sin(90^\circ - B)$$

$$1 < \frac{\sin(90^\circ - B)}{\sin(180^\circ - A)}$$

จึงได้ว่า  $\cos b > 1$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ ไม่มีสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมจาก ABC ซึ่ง  $A - B > 90^\circ$  หรือ  $A > 90^\circ + B$

2.2  $B - A > 90^\circ$

### วิธีทำ

จากสูตร (9) ได้ว่า

$$\cos A = \sin B \cos a$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ} \quad \cos a &= \frac{\cos A}{\sin B} \\ &= \frac{\sin(90^\circ - A)}{\sin(180^\circ - B)} \end{aligned}$$

เมื่อ  $B - A > 90^\circ$

เอา  $90^\circ - B$  บวกเข้าทั้งสองข้าง ได้

$$90^\circ - A > 180^\circ - B$$

$$\therefore \sin(90^\circ - A) > \sin(180^\circ - B)$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{\sin(90^\circ - A)}{\sin(180^\circ - B)} > 1$$

จึงได้ว่า  $\cos a > 1$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ ไม่มีสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมจาก ABC ซึ่ง  $B - A > 90^\circ$  หรือ  $B > 90^\circ + A$

$$2.3 \sin a > \sin c$$

วิธีทำ

จากสูตร (1) ได้ว่า

$$\sin a = \sin A \sin c$$

หรือ 
$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$$

เมื่อ 
$$\sin a > \sin c \text{ ทำให้ } \frac{\sin a}{\sin c} > 1$$

จึงได้ว่า  $\sin A > 1$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น จึงไม่มีสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่ง  $\sin a > \sin c$

$$2.4 \sin b > \sin c$$

วิธีทำ

จากสูตร (4) ได้ว่า

$$\sin b = \sin B \sin c$$

หรือ 
$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$$

เมื่อ 
$$\sin b > \sin c \text{ ทำให้ } \frac{\sin b}{\sin c} > 1$$

จึงได้ว่า  $\sin B > 1$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้

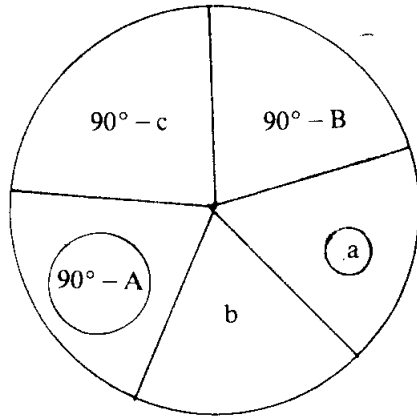
ดังนั้น จึงไม่มีสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่ง  $\sin b > \sin c$

3. จงหาสูตรสำหรับหาค่า  $b$ ,  $B$  และ  $c$  ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC เมื่อกำหนดค่า  $a$  และ  $A$  มาให้ พร้อมทั้งหาสูตรที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนของวงกลมที่เหลืออีกสามส่วนด้วย

วิธีทำ

สร้างวงกลมห้าส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC เพื่อใช้กฎของเนเปียร์ ดังนี้





โดยกฎของเนเปียร์ จึงได้ว่า

สูตรสำหรับหา b คือ

$$\sin b = \tan a \tan (90^\circ - A)$$

ดังนั้น  $\sin b = \tan a \cot A$  เป็นสูตรที่ต้องการ

สูตรสำหรับหา B คือ

$$\sin (90^\circ - A) = \cos a \cos (90^\circ - B)$$

$$\cos A = \cos a \sin B$$

ดังนั้น  $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$  เป็นสูตรที่ต้องการ

สูตรสำหรับหา c คือ

$$\begin{aligned} \sin a &= \cos (90^\circ - c) \cos (90^\circ - A) \\ &= \sin c \sin A \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$  เป็นสูตรที่ต้องการ

ส่วนที่เหลือทั้งสามส่วน คือ b, B และ c

ดังนั้น สูตรที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง b, B และ c คือ

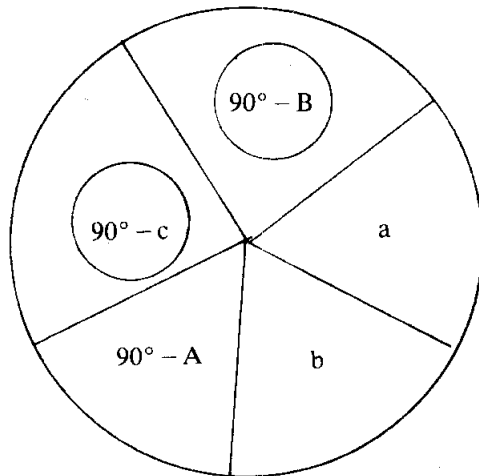
$$\sin b = \cos (90^\circ - B) \cos (90^\circ - c)$$

ดังนั้น  $\sin b = \sin B \sin c$  เป็นสูตรที่ต้องการ

4. จงหาสูตรสำหรับหาค่า a, A และ b เมื่อกำหนดค่า c และ B มาให้ พร้อมทั้งหาสูตรที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนของวงกลมที่เหลืออีกสามส่วนด้วย

วิธีทำ

สร้างวงกลมห้าส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC เพื่อใช้กฎของเนเปียร์ดังนี้



โดยกฎของเนเปียร์ จึงได้ว่า

สูตรสำหรับหา  $a$  คือ

$$\sin(90^\circ - B) = \tan a \tan(90^\circ - c)$$

$$\cos B = \tan a \cot c$$

ดังนั้น  $\tan a = \frac{\cos B}{\cot c}$  เป็นสูตรที่ต้องการ

สูตรสำหรับหา  $A$  คือ

$$\sin(90^\circ - c) = \tan(90^\circ - A) \tan(90^\circ - B)$$

$$\cos c = \cot A \cot B$$

ดังนั้น  $\cot A = \frac{\cos c}{\cot B}$  เป็นสูตรที่ต้องการ

สูตรสำหรับหา  $b$  คือ

$$\sin b = \cos(90^\circ - B) \cos(90^\circ - c)$$

ดังนั้น  $\sin b = \sin B \sin c$  เป็นสูตรที่ต้องการ

สูตรที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $a$ ,  $A$  และ  $b$  คือ

$$\sin b = \tan a \tan(90^\circ - A)$$

ดังนั้น  $\sin b = \tan a \cot A$  เป็นสูตรที่ต้องการ

5. จงหาสูตรสำหรับหา  $c$  เมื่อกำหนด  $B$  และ  $a$  มาให้

วิธีทำ

จาก  $\sin(90^\circ - B) = \tan a \tan(90^\circ - c)$

$$\cos B = \tan a \cot c$$

ดังนั้น  $\cot c = \frac{\cos B}{\tan a}$  เป็นสูตรที่ต้องการ

6. จงพิสูจน์ว่า  $\cos A = \frac{\sin b \cos a}{\sin c}$

**พิสูจน์**

จากสูตร (6) ได้ว่า

$$\tan b = \cos A \tan c$$

$$\therefore \cos A = \frac{\tan b}{\tan c}$$

$$= \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\cos c}{\sin c} \dots\dots\dots (1)$$

จากสูตร (7) ได้ว่า

$$\cos c = \cos b \cos a$$

แทน  $\cos c = \cos b \cos a$  ลงใน (1) ได้

$$\cos A = \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\cos b \cos a}{\sin c}$$

$$= \frac{\sin b \cos a}{\sin c}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า  $\cos A = \frac{\sin b \cos a}{\sin c}$

7. จงพิสูจน์ว่า  $\tan A = \frac{\sin a}{\tan b \cos c}$

**พิสูจน์**

จากสูตร (2) ได้ว่า

$$\tan a = \tan A \sin b$$

$$\therefore \tan A = \frac{\tan a}{\sin b}$$

$$= \frac{\sin a}{\cos a \sin b} \dots\dots\dots (1)$$

จากสูตร (1) ได้ว่า

$$\cos c = \cos b \cos a$$

แทน  $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$  ลงใน (1) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin a}{\left(\frac{\cos c}{\cos b}\right) \sin b} \\ &= \frac{\sin a}{\left(\frac{\sin b}{\cos b}\right) \cdot \cos c} \\ &= \frac{\sin a}{\tan b \cos c} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\tan A = \frac{\sin a}{\tan b \cos c}$$


---

## เฉลยแบบฝึกหัด 8.4

1. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC

1.1 ถ้า  $A > 90^\circ$  และ  $c < 90^\circ$  แล้ว  $a, b$  และ  $B$  อยู่ในจุดตัดภาคใด  
 ตอบ  $a, b, B$  ต่างก็อยู่ในจุดตัดภาคที่ 2

1.2 ถ้า  $A > 90^\circ$  และ  $c > 90^\circ$  แล้ว  $a, b$  และ  $B$  อยู่ในจุดตัดภาคใด  
 ตอบ  $a$  อยู่ในจุดตัดภาคที่ 2 แต่  $b$  และ  $B$  อยู่ในจุดตัดภาคที่ 1

2. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC จงแสดงว่า ถ้าทั้ง  $a$  และ  $A$  น้อยกว่า  $90^\circ$  หรือทั้ง  $a$  และ  $A$  มากกว่า  $90^\circ$  แล้วจะเกิดรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป  
 วิธีทำ จากสูตร (1) ได้ว่า

$$\sin a = \sin c \sin A$$

หรือ 
$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$$

เมื่อ  $\sin a < \sin A$  แล้ว  $\sin c < 1$  ซึ่งจะได้ค่า  $c$  2 ค่า โดยค่าหนึ่งมีค่าน้อยกว่า  $90^\circ$  และอีกค่าหนึ่งมีค่ามากกว่า  $90^\circ$

โดยกฎจุดตัดภาค จะได้ว่า

(1) สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากที่มี  $c < 90^\circ$  จะได้ว่า  $b, B, a, A$  อยู่ในจุดตัดภาคเดียวกัน

(2) สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากที่มี  $c > 90^\circ$  จะได้ว่า  $b$  กับ  $a$  ( $B$  กับ  $A$  ด้วย) จะอยู่ต่างจุดตัดภาคกัน

นั่นคือ ถ้า  $a$  กับ  $A$  น้อยกว่า  $90^\circ$  จะเกิดสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC 2 รูป คือ รูปหนึ่งมี  $c < 90^\circ, a < 90^\circ, A < 90^\circ, b < 90^\circ$  และ  $B < 90^\circ$  กับอีกรูปหนึ่ง คือ  $c > 90^\circ, a < 90^\circ, A < 90^\circ, b > 90^\circ$  และ  $B > 90^\circ$

และถ้า  $a$  กับ  $A$  มากกว่า  $90^\circ$  จะเกิดสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC 2 รูป คือ รูปหนึ่งมี  $c < 90^\circ, a > 90^\circ, A > 90^\circ, b > 90^\circ$  และ  $B > 90^\circ$  กับอีกรูปหนึ่ง คือ  $c > 90^\circ, a > 90^\circ, A > 90^\circ, b < 90^\circ$  และ  $B < 90^\circ$

นั่นแสดงว่า ถ้าทั้ง  $a$  และ  $A$  น้อยกว่า  $90^\circ$  หรือทั้ง  $a$  และ  $A$  มากกว่า  $90^\circ$  แล้ว จะ

เกิดสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป

3. จงพิจารณาส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่กำหนดส่วนให้  
ในแต่ละข้อต่อไปนี่ว่า ส่วนที่เหลือนั้นอยู่ในจุดตติภาคใด

3.1  $a = 30^\circ$ ,  $b = 40^\circ$

วิธีทำ เพราะว่า  $a < 90^\circ$ ,  $b < 90^\circ$  ดังนั้นจึงได้ว่า

$c < 90^\circ$  และ  $A < 90^\circ$  และ  $B < 90^\circ$

นั่นคือ c อยู่ในจุดตติภาคที่ 1

A อยู่ในจุดตติภาคที่ 1

B อยู่ในจุดตติภาคที่ 1

3.2  $a = 30^\circ$ ,  $c = 120^\circ$

วิธีทำ เพราะว่า  $c > 90^\circ$  และ  $a < 90^\circ$  จึงได้ว่า  $b > 90^\circ$ ,  $B > 90^\circ$  และ  $A < 90^\circ$

นั่นคือ A อยู่ในจุดตติภาคที่ 1

b อยู่ในจุดตติภาคที่ 2

B อยู่ในจุดตติภาคที่ 2

3.3  $a = 120^\circ$ ,  $B = 50^\circ$

วิธีทำ เพราะว่า  $a > 90^\circ$  และ  $B < 90^\circ$

จึงได้ว่า  $c > 90^\circ$  และ  $A > 90^\circ$ ,  $b < 90^\circ$

นั่นคือ c อยู่ในจุดตติภาคที่ 2

A อยู่ในจุดตติภาคที่ 2

b อยู่ในจุดตติภาคที่ 1

3.4  $b = 140^\circ$ ,  $c = 75^\circ$

วิธีทำ เพราะว่า  $c < 90^\circ$  และ  $b > 90^\circ$

จึงได้ว่า  $a > 90^\circ$ ,  $A > 90^\circ$  และ  $B > 90^\circ$

นั่นคือ a อยู่ในจุดตติภาคที่ 2

A อยู่ในจุดตติภาคที่ 2

B อยู่ในจุดตติภาคที่ 2

3.5  $A = 120^\circ$ ,  $B = 130^\circ$

วิธีทำ เพราะว่า  $A > 90^\circ$ ,  $B > 90^\circ$

จึงได้ว่า  $c < 90^\circ$  และ  $a > 90^\circ$ ,  $b > 90^\circ$

- นั่นคือ c อยู่ในจุดตมภาคที่ 1  
a อยู่ในจุดตมภาคที่ 2  
b อยู่ในจุดตมภาคที่ 2

$$3.6 \quad b = 35^\circ, \quad A = 100^\circ$$

**วิธีทำ** เพราะว่า  $b < 90^\circ$ ,  $A > 90^\circ$

จึงได้ว่า  $B < 90^\circ$ ,  $a > 90^\circ$  และ  $c > 90^\circ$

- นั่นคือ B อยู่ในจุดตมภาคที่ 1  
a อยู่ในจุดตมภาคที่ 2  
c อยู่ในจุดตมภาคที่ 2

$$3.7 \quad c = 100^\circ, \quad A = 100^\circ$$

**วิธีทำ** เพราะว่า  $c > 90^\circ$  และ  $A > 90^\circ$

จึงได้ว่า  $B < 90^\circ$ ,  $b < 90^\circ$  และ  $a > 90^\circ$

- นั่นคือ B อยู่ในจุดตมภาคที่ 1  
b อยู่ในจุดตมภาคที่ 1  
a อยู่ในจุดตมภาคที่ 2

$$3.8 \quad c = 60^\circ, \quad B = 60^\circ$$

**วิธีทำ** เพราะว่า  $c < 90^\circ$  และ  $B < 90^\circ$

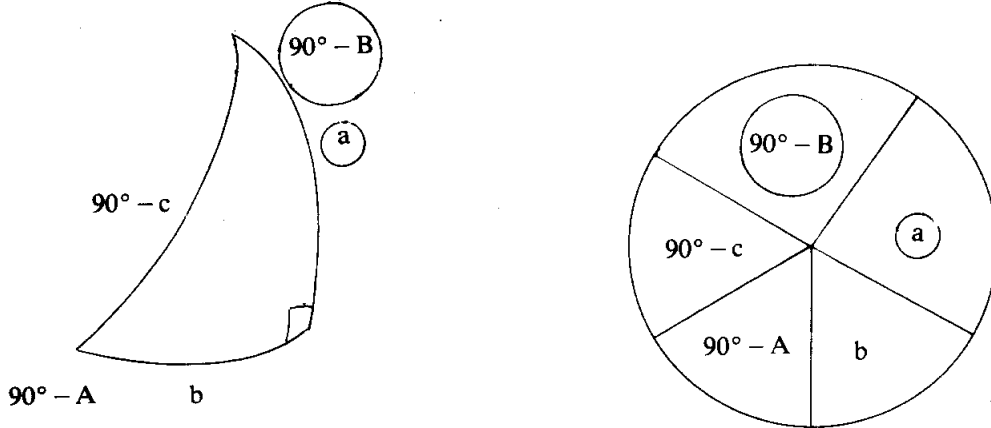
จึงได้ว่า  $A < 90^\circ$ ,  $a < 90^\circ$  และ  $b < 90^\circ$

- นั่นคือ A อยู่ในจุดตมภาคที่ 1  
a อยู่ในจุดตมภาคที่ 1  
b อยู่ในจุดตมภาคที่ 1
-

## เคลือบแบบฝึกหัด 3.6

1. จงแก้ปัญหสามเหลี่ยมเหลี่ยมเชิงทรงกลมจาก ABC ที่มี  $C = 90^\circ$  และกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังนี้

1.1  $a = 10^\circ 32'$ ,  $B = 12^\circ 3'$



วิธีทำ โดยกฎของเนเปียร์จะได้สูตรในการคำนวณดังนี้

ทำ b

จาก  $\sin a = \tan b \tan (90^\circ - B)$

$$\begin{aligned} \therefore \tan b &= \frac{\sin a}{\cot B} \\ &= \frac{\sin 10^\circ 32'}{\cot 12^\circ 3'} \\ &= \frac{0.18281}{4.6845} \\ &= 0.03902 \\ \therefore b &= \tan^{-1} 0.03902 \\ &= 2^\circ 14' 5'' \end{aligned}$$

ทำ c

จาก  $\sin (90^\circ - B) = \tan a \tan (90^\circ - c)$



$$\therefore \cos B = \tan a \cot c$$

$$\begin{aligned} \therefore \cot c &= \frac{\cos B}{\tan a} \\ &= \frac{\cos 12^\circ 3'}{\tan 10^\circ 32'} \\ &= \frac{0.97797}{0.18594} \\ &= 5.2595 \\ c &= \cot^{-1} 5.2595 \\ &= 10^\circ 45' 55'' \end{aligned}$$

หา A

$$\begin{aligned} \text{จาก } \sin(90^\circ - A) &= \cos a \cos(90^\circ - B) \\ \therefore \cos A &= \cos a \sin B \\ &= \cos 10^\circ 32' \sin 12^\circ 3' \\ &= (0.98315)(0.20877) \\ &= 0.20525 \\ \therefore A &= \cos^{-1} 0.20525 \\ &= 78^\circ 9' 22'' \end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} b &= 2^\circ 14' 5'' \\ c &= 10^\circ 45' 55'' \end{aligned}$$

และ

$$A = 78^\circ 9' 22''$$

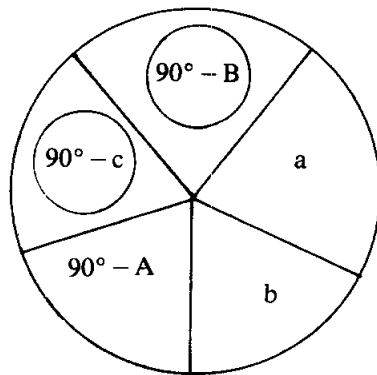
สูตรตรวจสอบ คือ

$$\sin(90^\circ - A) = \tan b \tan(90^\circ - c)$$

หรือ

$$\cos A = \tan b \cot C$$

$$1.2 \quad c = 46^\circ 40', \quad B = 20^\circ 50'$$



**วิธีทำ** โดยกฎของเนเปียร์ จะได้ดังนี้

**หาค่า a**

$$\begin{aligned}
 \text{จาก} \quad \sin(90^\circ - B) &= \tan a \tan(90^\circ - c) \\
 \therefore \cos B &= \tan a \cot c \\
 \therefore \tan a &= \cos B \tan c \\
 &= (\cos 20^\circ 50') (\tan 46^\circ 40') \\
 &= (0.93462) (1.0599) \\
 &= 0.99060 \\
 \therefore a &= \tan^{-1} 0.99060 \\
 &= 44^\circ 43' 47''
 \end{aligned}$$

**หาค่า b**

$$\begin{aligned}
 \text{จาก} \quad \sin b &= \cos(90^\circ - c) \cos(90^\circ - B) \\
 &= \sin c \sin B \\
 &= (\sin 46^\circ 40') (\sin 20^\circ 50') \\
 &= (0.72737) (0.35565) \\
 &= 0.25869
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore b &= \sin^{-1} 0.25869 \\
 &= 14^\circ 59' 32'', 180^\circ - 14^\circ 59' 32'' \\
 &= 14^\circ 59' 32'', 165^\circ 0' 28''
 \end{aligned}$$

**ใช้ค่า**

$$b = 14^\circ 59' 32'' \quad (\text{เพราะว่า } B < 90^\circ)$$

ทำ A

จาก  $\sin(90^\circ - c) = \tan(90^\circ - A) \tan(90^\circ - B)$

$$\therefore \cos c = \cot A \cot B$$

$$\therefore \cot A = \frac{\cos c}{\cot B}$$

$$= \frac{\cos 46^\circ 40'}{\cot 20^\circ 50'}$$

$$= \frac{0.68624}{2.6279}$$

$$= 0.26114$$

$$\therefore A = \cot^{-1} 0.26114$$

$$= 75^\circ 21' 53''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$a = 44^\circ 43' 47''$$

$$b = 14^\circ 59' 32''$$

และ

$$A = 75^\circ 21' 53''$$

ตรวจสอบ

$$\sin b = \tan a \tan(90^\circ - A)$$

หรือ

$$\sin b = \tan a \cot A$$

ในที่นี้

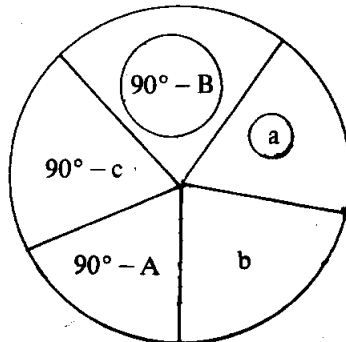
$$\sin b = \sin 14^\circ 59' 32'' = 0.25869$$

$$\tan a \cot A = (\tan 44^\circ 43' 47'') (\cot 75^\circ 21' 53'')$$

$$= (0.99060) (0.26114)$$

$$= 0.258685$$

1.3  $a = 118^\circ 54'$ ,  $B = 12^\circ 19'$



วิธีทำ โดยกฎของเนเปียร์ จะได้ดังนี้

หา b

$$\begin{aligned}\text{จาก} \quad \sin a &= \tan b \tan (90^\circ - B) \\ &= \tan b \cot B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan b &= \frac{\sin a}{\cot B} \\ &= \frac{\sin 118^\circ 54'}{\cot 12^\circ 19'} \\ &= \frac{\sin (180^\circ - 61^\circ 6')}{\cot 12^\circ 19'} \\ &= \frac{\sin 61^\circ 6'}{\cot 12^\circ 19'} \\ &= \frac{0.87546}{4.5800} \\ &= 0.19114 \\ \therefore b &= \tan^{-1} 0.19114 \\ &= 10^\circ 49' 17''\end{aligned}$$

หา c

$$\begin{aligned}\text{จาก} \quad \sin (90^\circ - B) &= \tan a \tan (90^\circ - c) \\ \cos B &= \tan a \cot c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \cot c &= \frac{\cos B}{\tan a} \\ &= \frac{\cos 12^\circ 19'}{\tan 118^\circ 54'} \\ &= \frac{\cos 12^\circ 19'}{\tan (180^\circ - 61^\circ 6')} \\ &= \frac{\cos 12^\circ 19'}{-\tan 61^\circ 6'} \\ &= \frac{0.97689}{-1.8115} \\ &= -0.53927 \\ c &= \cot^{-1} (-0.53927) \\ &= 180^\circ - 61^\circ 39' 48''\end{aligned}$$

$$= 118^{\circ} 20' 12''$$

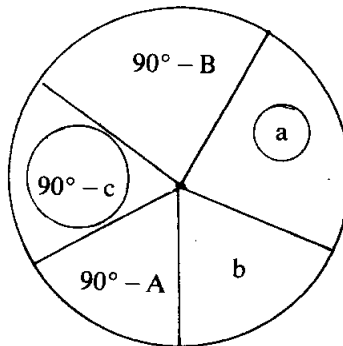
หา A

$$\begin{aligned} \text{จาก } \sin(90^{\circ} - A) &= \cos a \cos(90^{\circ} - B) \\ \therefore \cos A &= \cos a \sin B \\ &= \cos 118^{\circ} 54' \sin 12^{\circ} 19' \\ &= \cos(180^{\circ} - 61^{\circ} 6') \sin 12^{\circ} 19' \\ &= (-\cos 61^{\circ} 6') (\sin 12^{\circ} 19') \\ &= (-0.48328) (0.21331) \\ &= -0.10308 \\ \therefore A &= \cos^{-1}(-0.10308) \\ &= 180^{\circ} - 84^{\circ} 5' \\ &= 95^{\circ} 55' \end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า  $b = 10^{\circ} 49' 17''$ ,  $c = 118^{\circ} 20' 12''$  และ  $A = 95^{\circ} 55'$

สูตรตรวจสอบ คือ  $\sin b = \tan a \cot A$

$$1.4 \quad a = 43^{\circ} 27', \quad c = 60^{\circ} 24'$$



วิธีทำ โดยกฎของเนเปียร์ จะได้ดังนี้

หา A

$$\begin{aligned} \text{จาก } \sin a &= \cos(90^{\circ} - c) \cos(90^{\circ} - A) \\ &= \sin c \sin A \\ \therefore \sin A &= \frac{\sin a}{\sin c} \\ &= \frac{\sin 43^{\circ} 27'}{\sin 60^{\circ} 24'} \end{aligned}$$

$$= \frac{0.68772}{0.86949}$$

$$= 0.79094$$

$$\therefore A = \sin^{-1} 0.79094$$

$$= 52^{\circ} 16' 24'', 127^{\circ} 43' 36''$$

ได้

$$A = 52^{\circ} 16' 24'' \text{ (เพราะว่า } A < 90^{\circ}\text{)}$$

หา B

จาก  $\sin(90^{\circ} - B) = \tan a \tan(90^{\circ} - c)$

$$\therefore \cos B = \tan a \cot c$$

$$= \tan 43^{\circ} 27' \cot 60^{\circ} 24'$$

$$= (0.94731)(0.56808)$$

$$= 0.53815$$

$$\therefore B = \cos^{-1} 0.53815$$

$$= 57^{\circ} 26' 33''$$

หา b

จาก  $\sin(90^{\circ} - c) = \cos a \cos b$

$$\cos c = \cos a \cos b$$

$$\therefore \cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$$

$$= \frac{\cos 60^{\circ} 24'}{\cos 43^{\circ} 27'}$$

$$= \frac{0.49394}{0.72597}$$

$$= 0.68039$$

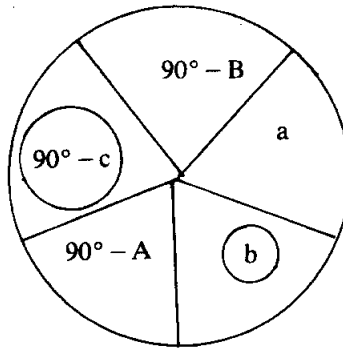
$$\therefore b = \cos^{-1} 0.68039$$

$$= 47^{\circ} 7' 32''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า  $A = 52^{\circ} 16' 24''$ ,  $B = 57^{\circ} 26' 33''$  และ  $b = 47^{\circ} 7' 32''$

**สูตรตรวจสอบ** คือ  $\cos B = \cos b \sin A$

$$1.5 \quad b = 48^{\circ} 36', \quad c = 69^{\circ} 42'$$



วิธีทำ โดยกฎของเนเปียร์ จะได้ดังนี้

หา a

$$\text{จาก } \sin(90^\circ - c) = \cos a \cos b$$

$$\cos c = \cos a \cos b$$

$$\therefore \cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ 42'}{\cos 48^\circ 36'}$$

$$= \frac{0.34694}{0.66131}$$

$$= 0.52462$$

$$\therefore a = \cos^{-1} 0.52462$$

$$= 58^\circ 21' 27''$$

หา A

$$\text{จาก } \sin(90^\circ - A) = \tan b \tan(90^\circ - c)$$

$$\therefore \cos A = \tan b \cot c$$

$$= \tan 48^\circ 36' \cot 60^\circ 42'$$

$$= (1.1343)(0.36991)$$

$$= 0.41959$$

$$\therefore A = \cos^{-1} 0.41959$$

$$= 65^\circ 11' 30''$$

หา B

$$\text{จาก } \sin b = \cos(90^\circ - B) \cos(90^\circ - c)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin B \sin c \\
 \therefore \sin B &= \frac{\sin b}{\sin c} \\
 &= \frac{\sin 48^\circ 36'}{\sin 69^\circ 42'} \\
 &= \frac{0.75011}{0.93789} \\
 &= 0.79978
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \sin^{-1} 0.79978 \\
 &= 53^\circ 6' 33'', 126^\circ 53' 27''
 \end{aligned}$$

ใช้  $B = 53^\circ 6' 33''$  (เพราะว่า  $b < 90^\circ$ )

ดังนั้น จึงได้ว่า  $a = 58^\circ 21' 27''$ ,  $A = 65^\circ 11' 30''$  และ  $B = 53^\circ 6' 33''$

สูตรตรวจสอบ คือ  $\cos A = \cos a \sin B$

สำหรับข้อ 1.6 ถึง 1.22 ก็สามารรถทำได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งแต่ละข้อจะได้คำตอบดังนี้ (อาจมีค่าคลาดเคลื่อนบ้างเล็กน้อย)

1.6  $a = 168^\circ 13' 45''$ ,  $c = 150^\circ 9' 20''$

ตอบ  $b = 27^\circ 37' 26''$   
 $B = 68^\circ 42' 11''$   
 $A = 155^\circ 48'$

1.7  $c = 112^\circ 48'$ ,  $B = 56^\circ 11' 56''$

ตอบ  $a = 127^\circ 4' 30''$   
 $b = 50^\circ$   
 $A = 120^\circ 3' 50''$

1.8  $c = 32^\circ 34'$ ,  $A = 44^\circ 44'$

ตอบ  $a = 119^\circ 59' 46''$   
 $b = 120^\circ 10'$   
 $c = 75^\circ 26' 58''$

1.9  $A = 116^\circ 31' 25''$ ,  $B = 116^\circ 43' 12''$

ตอบ  $a = 119^\circ 59' 46''$



$$b = 120^{\circ} 10'$$

$$c = 75^{\circ} 26' 58''$$

$$1.10 \quad A = 54^{\circ} 54' 42'', \quad c = 69^{\circ} 25' 11''$$

**ตอบ**  $a = 50^{\circ}$

$$b = 56^{\circ} 50' 49''$$

$$B = 63^{\circ} 25' 4''$$

$$1.11 \quad c = 55^{\circ} 9' 32'', \quad a = 22^{\circ} 15' 7''$$

**ตอบ**  $b = 51^{\circ} 53'$

$$A = 27^{\circ} 28' 38''$$

$$B = 73^{\circ} 27' 11''$$

$$1.12 \quad a = 36^{\circ} 27', \quad b = 43^{\circ} 32' 31''$$

**ตอบ**  $c = 54^{\circ} 20'$

$$A = 46^{\circ} 59' 43''$$

$$B = 57^{\circ} 59' 19''$$

$$1.13 \quad a = 29^{\circ} 46' 8'', \quad B = 137^{\circ} 24' 21''$$

**ตอบ**  $b = 155^{\circ} 27' 55''$

$$c = 142^{\circ} 9' 12''$$

$$A = 54^{\circ} 1' 14''$$

$$1.14 \quad a = 144^{\circ} 27' 3'', \quad b = 32^{\circ} 8' 56''$$

**ตอบ**  $c = 133^{\circ} 32' 25''$

$$A = 126^{\circ} 40' 23''$$

$$B = 47^{\circ} 13' 46''$$

$$1.15 \quad b = 36^{\circ} 27', \quad a = 43^{\circ} 32' 31''$$

**ตอบ**  $c = 54^{\circ} 20'$

$$B = 46^{\circ} 59' 43''$$

$$A = 51^{\circ} 59' 19''$$

$$1.16 \quad A = 63^{\circ} 15' 12'', \quad B = 135^{\circ} 33' 39''$$

**ตอบ**  $a = 50^{\circ} 0' 4''$

$$b = 143^{\circ} 5' 12''$$

$$c = 120^{\circ} 55' 34''$$

$$1.17 \quad A = 67^{\circ} 54' 47'', \quad B = 99^{\circ} 57' 35''$$

**ตอบ**  $a = 67^{\circ} 33' 24''$

$$b = 100^{\circ} 45' 27''$$

$$c = 94^{\circ} 5' 11''$$

$$1.18 \quad b = 22^{\circ} 15' 7'', \quad c = 55^{\circ} 9' 32''$$

**ตอบ**  $a = 51^{\circ} 53'$

$$B = 27^{\circ} 28' 38''$$

$$A = 73^{\circ} 27' 11''$$

$$1.19 \quad a = 118^{\circ} 30' 10'', \quad B = 95^{\circ} 36'$$

**ตอบ**  $b = 96^{\circ} 21' 59''$

$$c = 86^{\circ} 58'$$

$$A = 118^{\circ} 21' 15''$$

$$1.20 \quad b = 92^{\circ} 47' 32'', \quad A = 50^{\circ} 2' 1''$$

**ตอบ**  $a = 49^{\circ} 59' 58''$

$$c = 91^{\circ} 47' 40''$$

$$B = 92^{\circ} 8' 23''$$

$$1.21 \quad a = 46^{\circ} 12' 18'', \quad c = 75^{\circ} 48' 36''$$

**ตอบ**  $A = 48^{\circ} 7' 12''$

$$b = 69^{\circ} 15' 18''$$

$$B = 74^{\circ} 42' 30''$$

$$1.22 \quad a = 109^{\circ} 15' 48'', \quad B = 38^{\circ} 45' 24''$$

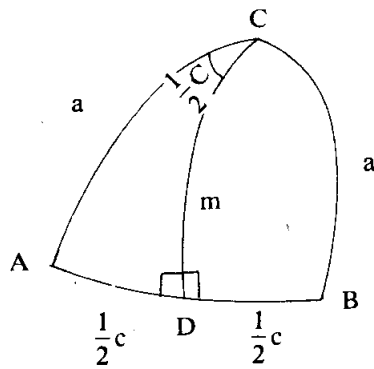
**ตอบ**  $b = 37^{\circ} 9' 18''$

$$c = 105^{\circ} 14' 42''$$

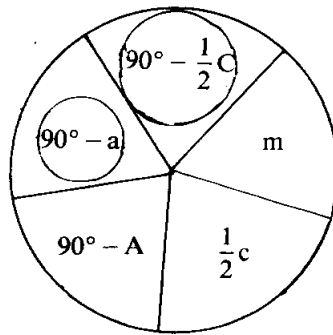
$$A = 101^{\circ} 55' 6''$$

2. จงแก้ปัญหสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมหน้าจั่ว ABC ซึ่งมีส่วนที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

$$2.1 \quad a = b = 78^{\circ} 23' 30'', \quad C = 118^{\circ} 54' 36''$$



วิธีทำ พิจารณาวงกลมห้าส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ACD ที่มี D เป็นมุมฉาก  
ได้ดังนี้



โดยกฎของเนเปียร์ จะได้ดังนี้

หา A

$$\text{จาก } \sin(90^\circ - a) = \tan(90^\circ - A) \tan\left(90^\circ - \frac{1}{2}C\right)$$

$$\cos a = \cot A \cot \frac{1}{2}C$$

$$\begin{aligned} \therefore \cot A &= \frac{\cos a}{\cot \frac{1}{2}C} \\ &= \frac{\cos 78^\circ 23' 30''}{\cot 59^\circ 27' 18''} \\ &= \frac{0.20122}{0.59011} \\ &= 0.34098 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore A &= \cot^{-1} 0.34098 \\ &= 71^\circ 10' 18''\end{aligned}$$

หา  $\frac{1}{2}c$

$$\text{จาก } \sin \frac{1}{2}c = \cos(90^\circ - a) \cos\left(90^\circ - \frac{1}{2}C\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin \frac{1}{2}c &= \sin a \sin \frac{1}{2}C \\ &= (\sin 78^\circ 23' 30'') (\sin 59^\circ 27' 18'') \\ &= (0.97955) (0.86123) \\ &= 0.84361\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{2}c &= \sin^{-1} 0.84361 \\ &= 57^\circ 31' 24''\end{aligned}$$

$$\text{และ } c = 115^\circ 2' 48''$$

หา m

$$\text{จาก } \sin\left(90^\circ - \frac{1}{2}C\right) = \tan m \tan(90^\circ - a)$$

$$\cos \frac{1}{2}C = \tan m \cot a$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan m &= \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\cot a} \\ &= \frac{\cos 59^\circ 27' 18''}{\cot 78^\circ 23' 30''} \\ &= \frac{0.50822}{0.20542} \\ &= 2.4741\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore m &= \tan^{-1} 2.4741 \\ &= 67^\circ 59' 29''\end{aligned}$$

**สูตรตรวจสอบ คือ**

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2}c &= \tan m \tan(90^\circ - A) \\ &= \tan m \cot A\end{aligned}$$

ในที่นี้

$$\sin \frac{1}{2}c = \sin 57^{\circ} 31' 24''$$

$$= 0.84361$$

$$\tan m \cot A = (\tan 67^{\circ} 59' 29'') (\cot 71^{\circ} 10' 18'')$$

$$= (2.4741) (0.34098)$$

$$= 0.84361$$

ดังนั้น จึงได้ว่า ส่วนของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ที่ต้องการ คือ  $A = B = 71^{\circ} 10' 18''$   
และ  $c = 115^{\circ} 2' 48''$

$$2.2 \cdot b = c = 70^{\circ} 59' 12'', \quad A = 150^{\circ} 34'$$

ตอบ  $B = C = 38^{\circ} 52' 30''$

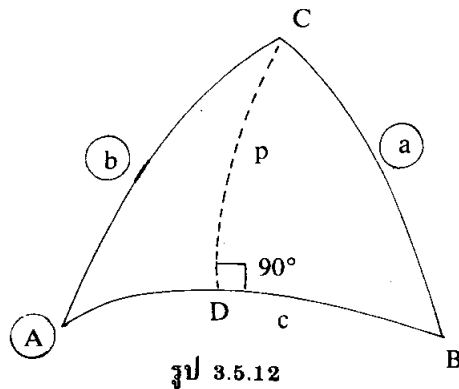
และ  $a = 132^{\circ} 15'$

$$2.3 \quad a = b = 112^{\circ} 32' 20'', \quad c = 46^{\circ} 15' 12''$$

ตอบ  $A = B = 100^{\circ} 12' 30''$

และ  $C = 50^{\circ} 19' 40''$

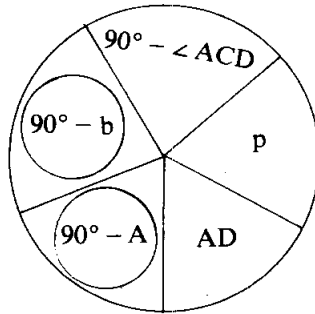
3. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ดังรูป 3.5.12



รูป 3.5.12

$p$  เป็นส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ที่ลากมาตั้งฉากกับด้าน  $c$  จงเขียน  $B$  ให้อยู่ในรูปของ  $A, a$  และ  $b$

**วิธีทำ** ในรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก  $ACD$  มีมุมฉากที่  $D$  สร้างวงกลมห้าส่วนของสามเหลี่ยม  $ACD$  ได้ดังนี้

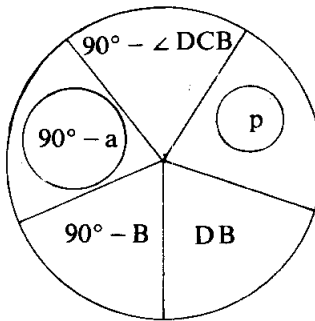


โดยกฎของเนเปียร์จะได้ว่า

$$\sin p = \cos(90^\circ - A) \cos(90^\circ - b)$$

$$\therefore \sin p = \sin A \sin b \quad \dots\dots\dots (1)$$

ในรูป สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก CDB มีมุมฉากที่ D สร้างวงกลมหัวส่วนของสามเหลี่ยม CDB ได้ดังนี้



โดยกฎของเนเปียร์ จะได้ว่า

$$\sin p = \cos(90^\circ - a) \cos(90^\circ - B)$$

$$= \sin a \sin B$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sin p}{\sin a} \quad \dots\dots\dots (2)$$

แทน (1) ลงใน (2) จะได้

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$$

เป็นการเขียน B ให้อยู่ในรูปของ A, a และ b ตามต้องการ

4. ถ้าสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ในโจทย์ข้อ 3 มี  $A = 40^{\circ} 10'$ ,  $a = 46^{\circ} 20'$   
 และ  $b = 64^{\circ} 50'$  แล้ว จงหา B  
 วิธีทำ จากโจทย์ในข้อ 3 ได้ว่า

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{(\sin 40^{\circ} 10') (\sin 64^{\circ} 50')}{\sin 46^{\circ} 20'} \\ &= \frac{(0.64501) (0.90507)}{(0.72337)} \\ &= 0.80703 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore B &= \sin^{-1} 0.80703 \\ &= 53^{\circ} 48' 25'', 180^{\circ} - 53^{\circ} 48' 25'' \\ &= 53^{\circ} 48' 25'', 126^{\circ} 11' 35'' \end{aligned}$$

ดังนั้นใช้  $B = 53^{\circ} 48' 25''$  (เพราะว่า  $b < 90^{\circ}$ )

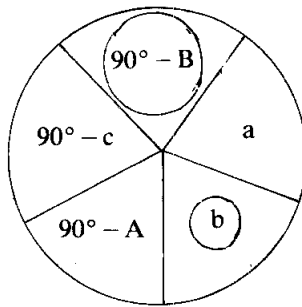
---

## เคล็ดลับฝึกหัด 3.6

จงแก้ปัญหสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ซึ่งมีมุมฉากที่ C และมีส่วนที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

$$1. \quad b = 138^\circ 46' 24'', \quad B = 125^\circ 10' 36''$$

วิธีทำ เขียนวงกลมห้าส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ซึ่งมีมุมฉากที่ C ได้ดังนี้



โดยกฎของเนเปียร์จะได้ดังนี้

หา a

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad \sin a &= \tan b \tan(90^\circ - B) \\ &= \tan b \cot B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin a &= (\tan 138^\circ 46' 24'') (\cot 125^\circ 10' 36'') \\ &= \tan(180^\circ - 41^\circ 13' 36'') \cot(180^\circ - 54^\circ 49' 24'') \\ &= (-\tan 41^\circ 13' 36'') (-\cot 54^\circ 49' 24'') \\ &= (0.87625) (0.70482) \\ &= 0.61759 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a &= \sin^{-1} 0.61759 \\ &= 38^\circ 8' 26'', 180^\circ - 38^\circ 8' 26'' \\ &= 38^\circ 8' 26'', 141^\circ 51' 34'' \end{aligned}$$

หา A

$$\text{จาก} \quad \sin(90^\circ - B) = \cos b \cos(90^\circ - A)$$



$$\cos B = \cos b \sin A$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin A &= \frac{\cos B}{\cos b} \\ &= \frac{\cos 125^\circ 10' 36''}{\cos 138^\circ 46' 24''} \\ &= \frac{\cos(180^\circ - 54^\circ 49' 24'')}{\cos(180^\circ - 41^\circ 13' 36'')} \\ &= \frac{-\cos 54^\circ 49' 24''}{-\cos 41^\circ 13' 36''} \\ &= \frac{-0.57610}{-0.75211} \\ &= 0.76598 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore A &= \sin^{-1} 0.76598 \\ &= 49^\circ 59' 40'', 180^\circ - 49^\circ 59' 40'' \\ &= 49^\circ 59' 40'', 130^\circ 0' 20'' \end{aligned}$$

หาค

ค

$$\begin{aligned} \sin b &= \cos(90^\circ - B) \cos(90^\circ - c) \\ &= \sin B \sin c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin c &= \frac{\sin b}{\sin B} \\ &= \frac{\sin 138^\circ 46' 24''}{\sin 125^\circ 10' 36''} \\ &= \frac{\sin(180^\circ - 41^\circ 13' 36'')}{\sin(180^\circ - 54^\circ 49' 24'')} \\ &= \frac{\sin 41^\circ 13' 36''}{\sin 54^\circ 49' 24''} \\ &= \frac{0.65904}{0.81738} \\ &= 0.80628 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \sin^{-1} 0.80628 \\ &= 53^\circ 44' 3'', 180^\circ - 53^\circ 44' 3'' \\ &= 53^\circ 44' 3'', 126^\circ 15' 57'' \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ค่า  $c$ ,  $a$  และ  $A$  ที่หามาได้นั้น จะได้ 2 ค่า ซึ่งจะพิจารณากรณีที่เป็นไปได้  
ดังนี้

เพราะว่า  $b > 90^\circ$  จึงได้ว่า

กรณีที่ 1 เมื่อ  $c < 90^\circ$  จะได้  $a, A > 90^\circ$

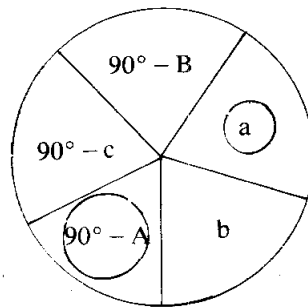
นั่นคือ  $c_1 = 53^\circ 44' 3''$ ,  $a_1 = 141^\circ 51' 34''$  และ  $A_1 = 130^\circ 0' 20''$

กรณีที่ 2 เมื่อ  $c > 90^\circ$  จะได้  $a, A < 90^\circ$

นั่นคือ  $c_2 = 126^\circ 15' 57''$ ,  $a_2 = 38^\circ 8' 26''$  และ  $A_2 = 49^\circ 59' 40''$

2.  $a = 46^\circ 46' 24''$ ,  $A = 57^\circ 28' 18''$

วิธีทำ เขียนวงกลมห้าส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ซึ่งมีมุมฉากที่ C ได้ดังนี้



โดยกฎของเนเปียร์จะได้ดังนี้

หา  $b$

$$\text{จาก} \quad \sin b = \tan a \tan(90^\circ - A)$$

$$\therefore \sin b = \tan a \cot A$$

$$= \tan 46^\circ 46' 24'' \cot 57^\circ 28' 18''$$

$$= (1.0639)(0.63777)$$

$$= 0.67852$$

$$\therefore b = \sin^{-1} 0.67852$$

$$= 42^\circ 43' 41'', 180^\circ - 42^\circ 43' 41''$$

$$= 42^\circ 43' 41'', 137^\circ 16' 19''$$

หา  $c$

$$\text{จาก} \quad \sin a = \cos(90^\circ - c) \cos(90^\circ - A)$$

$$\begin{aligned}
&= \sin c \sin A \\
\therefore \sin c &= \frac{\sin a}{\sin A} \\
&= \frac{\sin 46^\circ 46' 24''}{\sin 57^\circ 28' 18''} \\
&= \frac{0.72865}{0.84317} \\
&= 0.86418 \\
\therefore c &= \sin^{-1} 0.86418 \\
&= 59^\circ 47' 21'', 180^\circ - 59^\circ 47' 21'' \\
&= 59^\circ 47' 21'', 120^\circ 12' 39''
\end{aligned}$$

ท B

$$\begin{aligned}
\text{จาก } \sin(90^\circ - A) &= \cos a \cos(90^\circ - B) \\
\cos A &= \cos a \sin B \\
\therefore \sin B &= \frac{\cos A}{\cos a} \\
&= \frac{\cos 57^\circ 28' 18''}{\cos 46^\circ 46' 24''} \\
&= \frac{0.53771}{0.68489} \\
&= 0.78510 \\
\therefore B &= \sin^{-1} 0.78510 \\
&= 51^\circ 43' 47'', 180^\circ - 51^\circ 43' 47'' \\
&= 51^\circ 43' 47'', 128^\circ 16' 13''
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า ค่า  $c$ ,  $b$  และ  $B$  ที่คำนวณได้มี 2 ค่า จึงอาจพิจารณากรณีที่เป็นไปได้ ดังนี้ เพราะ  $a < 90^\circ$  จึงได้ว่า

กรณีที่ 1 เมื่อ  $c < 90^\circ$  จะได้  $b, B < 90^\circ$

นั่นคือ  $c_1 = 59^\circ 47' 21''$ ,  $b_1 = 42^\circ 43' 41''$  และ  $B_1 = 51^\circ 43' 47''$

กรณีที่ 2 เมื่อ  $c > 90^\circ$  จะได้  $b, B > 90^\circ$

นั่นคือ  $c_2 = 120^\circ 12' 39''$ ,  $b_2 = 137^\circ 16' 19''$  และ  $B_2 = 128^\circ 16' 13''$

สำหรับข้อ 3 ถึงข้อ 9 สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งแต่ละข้อจะได้คำตอบดังนี้ (อาจมีค่าคลาดเคลื่อนบ้างเล็กน้อย)

3.  $b = 162^\circ 53' 24''$ ,  $B = 138^\circ 14' 54''$

**ตอบ**

กรณีที่ 1  $a_1 = 20^\circ 10' 24''$   
 $c_1 = 153^\circ 46' 48''$   
 $A_1 = 51^\circ 18' 48''$

กรณีที่ 2  $a_2 = 159^\circ 49' 48''$   
 $c_2 = 26^\circ 13' 12''$   
 $A_2 = 128^\circ 41' 12''$

4.  $b = 35^\circ 44'$ ,  $B = 37^\circ 28'$

**ตอบ**

กรณีที่ 1  $a_1 = 69^\circ 50' 24''$   
 $c_1 = 73^\circ 45' 15''$   
 $A_1 = 77^\circ 54'$

กรณีที่ 2  $a_2 = 110^\circ 9' 36''$   
 $c_2 = 106^\circ 14' 45''$   
 $A_2 = 102^\circ 6'$

5.  $b = 129^\circ 33'$ ,  $B = 104^\circ 59'$

**ตอบ**

กรณีที่ 1  $a_1 = 18^\circ 54' 39''$   
 $c_1 = 127^\circ 2' 30''$   
 $A_1 = 23^\circ 57' 19''$

กรณีที่ 2  $a_2 = 161^\circ 5' 21''$   
 $c_2 = 52^\circ 57' 30''$   
 $A_2 = 156^\circ 2' 41''$

6.  $b = 21^\circ 39'$ ,  $B = 42^\circ 10' 10''$

**ตอบ**

กรณีที่ 1  $a_1 = 25^\circ 59' 28''$   
 $c_1 = 33^\circ 20' 15''$   
 $A_1 = 52^\circ 53'$

$$\begin{aligned} \text{กรณีที่ 2} \quad a_2 &= 154^\circ 0' 32'' \\ c_2 &= 146^\circ 39' 45'' \\ A_2 &= 127^\circ 7' \end{aligned}$$

$$7. \quad a = 77^\circ 21' 50'', \quad A = 83^\circ 56' 40''$$

ตอบ

$$\begin{aligned} \text{กรณีที่ 1} \quad b_1 &= 28^\circ 14' 31'' \\ c_1 &= 78^\circ 53' 20'' \\ B_1 &= 28^\circ 49' 57'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{กรณีที่ 2} \quad b_2 &= 151^\circ 45' 29'' \\ c_2 &= 101^\circ 6' 40'' \\ B_2 &= 151^\circ 10' 3'' \end{aligned}$$

$$8. \quad a = 160^\circ \quad A = 150^\circ$$

ตอบ

$$\begin{aligned} \text{กรณีที่ 1} \quad b_1 &= 39^\circ 4' 52'' \\ c_1 &= 136^\circ 50' 23'' \\ B_1 &= 67^\circ 9' 36'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{กรณีที่ 2} \quad b_2 &= 140^\circ 55' 8'' \\ c_2 &= 43^\circ 9' 37'' \\ B_2 &= 112^\circ 50' 24'' \end{aligned}$$

$$9. \quad b = 42^\circ 18' 45'', \quad B = 46^\circ 15' 25''$$

ตอบ

$$\begin{aligned} \text{กรณีที่ 1} \quad a_1 &= 60^\circ 36' 15'' \\ c_1 &= 68^\circ 42' 48'' \\ A_1 &= 69^\circ 13' 48'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{กรณีที่ 2} \quad a_2 &= 119^\circ 23' 45'' \\ c_2 &= 111^\circ 17' 12'' \\ A_2 &= 110^\circ 46' 12'' \end{aligned}$$

### เฉลยแบบฝึกหัด 3.7

1. จงหาส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว  $A'B'C'$  ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งมีส่วนต่าง ๆ ที่กำหนดให้ดังนี้

$$1.1 \quad A = 44^{\circ} 59', \quad B = 112^{\circ} 47', \quad C = 85^{\circ} 7'$$

$$a = 43^{\circ} 17', \quad b = 116^{\circ} 36', \quad c = 105^{\circ} 15'$$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 3.7.2 ได้ว่า

$$\begin{aligned} A' &= 180^{\circ} - a \\ &= 180^{\circ} - 43^{\circ} 17' \\ &= 136^{\circ} 53' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' &= 180^{\circ} - b \\ &= 180^{\circ} - 116^{\circ} 36' \\ &= 63^{\circ} 24' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C' &= 180^{\circ} - c \\ &= 180^{\circ} - 105^{\circ} 15' \\ &= 74^{\circ} 45' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a' &= 180^{\circ} - A \\ &= 180^{\circ} - 44^{\circ} 59' \\ &= 135^{\circ} 1' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b' &= 180^{\circ} - B \\ &= 180^{\circ} - 112^{\circ} 47' \\ &= 67^{\circ} 13' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c' &= 180^{\circ} - C \\ &= 180^{\circ} - 85^{\circ} 7' \\ &= 94^{\circ} 53' \end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$A' = 136^\circ 53', \quad B' = 63^\circ 24', \quad C' = 74^\circ 45'$$

$$a' = 135^\circ 1', \quad b' = 67^\circ 13' \quad \text{และ} \quad c' = 94^\circ 53'$$

$$1.2 \quad A = 67^\circ 19', \quad B = 48^\circ 29', \quad C = 77^\circ 17''$$

$$a = 43^\circ 18', \quad b = 33^\circ 49', \quad c = 46^\circ 28'$$

**วิธีทำ** โดยทฤษฎีบท 3.7.2 ได้ว่า

$$\begin{aligned} A' &= 180^\circ - a \\ &= 180^\circ - 43^\circ 18' \\ &= 136^\circ 42' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' &= 180^\circ - b \\ &= 180^\circ - 33^\circ 49' \\ &= 146^\circ 11' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C' &= 180^\circ - c \\ &= 180^\circ - 46^\circ 28' \\ &= 133^\circ 32' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a' &= 180^\circ - A \\ &= 180^\circ - 67^\circ 19' \\ &= 112^\circ 41' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b' &= 180^\circ - B \\ &= 180^\circ - 48^\circ 29' \\ &= 131^\circ 31' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c' &= 180^\circ - C \\ &= 180^\circ - 77^\circ 17' \\ &= 102^\circ 43' \end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$A' = 136^\circ 42', \quad B' = 146^\circ 11', \quad C' = 133^\circ 32'$$

$$a' = 112^\circ 41', \quad b' = 131^\circ 31' \quad \text{และ} \quad c' = 102^\circ 43'$$

$$1.3 \quad A = 122^\circ 7', \quad B = 32^\circ 24', \quad C = 41^\circ 36'$$

$$a = 73^\circ 44', \quad b = 37^\circ 25', \quad c = 48^\circ 48'$$

**ตอบ**  $A' = 106^\circ 16'$

$$B' = 142^\circ 35'$$

$$C' = 131^{\circ} 12'$$

$$a' = 57^{\circ} 53'$$

$$b' = 147^{\circ} 36'$$

$$c' = 138^{\circ} 34'$$

$$1.4 \quad A = 135^{\circ} 59.1', \quad B = 100^{\circ} 10.1', \quad C = 98^{\circ} 43.3'$$

$$a = 135^{\circ} 20', \quad b = 98^{\circ} 31.5', \quad c = 90^{\circ}$$

**ตอบ**  $A' = 44^{\circ} 40'$

$$B' = 81^{\circ} 28.5'$$

$$C' = 90^{\circ}$$

$$a' = 44^{\circ} 0.9'$$

$$b' = 79^{\circ} 49.9'$$

$$c' = 81^{\circ} 16.7'$$

$$1.5 \quad a = 54^{\circ} 16', \quad b = 114^{\circ} 47', \quad c = 90^{\circ}$$

$$A = 49^{\circ} 57.9', \quad B = 121^{\circ} 5.5', \quad C = 70^{\circ} 35.9'$$

**ตอบ**  $A' = 125^{\circ} 44'$

$$B' = 65^{\circ} 13'$$

$$C' = 90^{\circ}$$

$$a' = 130^{\circ} 2.1'$$

$$b' = 58^{\circ} 54.5'$$

$$c' = 109^{\circ} 24.1'$$

$$1.6 \quad a = 116^{\circ} 35.6', \quad b = 105^{\circ} 14.8', \quad c = 43^{\circ} 17.2'$$

$$A = 112^{\circ} 47.4', \quad B = 84^{\circ} 6.7', \quad C = 44^{\circ} 59.1'$$

**ตอบ**  $A' = 63^{\circ} 24.4'$

$$B' = 74^{\circ} 45.2'$$

$$C' = 136^{\circ} 42.8'$$

$$a' = 67^{\circ} 12.6'$$

$$b' = 95^{\circ} 53.3'$$

$$c' = 135^{\circ} 0.9'$$



$$1.7 \quad a = 136^{\circ} 19' 36'', \quad b = 43^{\circ} 18' 30'', \quad c = 114^{\circ} 43' 18''$$

$$A = 132^{\circ} 15' 18'', \quad B = 47^{\circ} 19' 30'', \quad C = 76^{\circ} 48' 24''$$

ตอบ

$$A' = 43^{\circ} 40' 24''$$

$$B' = 136^{\circ} 41' 30''$$

$$C' = 65^{\circ} 16' 42''$$

$$a' = 47^{\circ} 44' 42''$$

$$b' = 132^{\circ} 40' 30''$$

$$c' = 103^{\circ} 11' 36''$$

2. จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสาม คือ A, B และ C ตามลำดับ ดังนี้

$$2.1 \quad A = 60^{\circ}, \quad B = 70^{\circ}, \quad C = 90^{\circ}$$

ตอบ เป็นไปได้

เพราะว่า

$$A+B+C = 60^{\circ} + 70^{\circ} + 90^{\circ}$$

$$= 220^{\circ}$$

ดังนั้น  $180^{\circ} < A+B+C < 220^{\circ}$

และเนื่องจาก

$$a' = 180^{\circ} - A$$

$$= 180^{\circ} - 60$$

$$= 120^{\circ}$$

$$b' = 180^{\circ} - 70^{\circ}$$

$$= 110^{\circ}$$

$$c' = 180^{\circ} - 90^{\circ}$$

$$= 90^{\circ}$$

จะเห็นว่า  $a'+b' > c'$ ,  $a'+c' > b'$  และ  $b'+c' > a'$

$$2.2 \quad A = 60^{\circ}, \quad B = 115^{\circ}, \quad C = 145^{\circ}$$

ตอบ เป็นไปไม่ได้

เพราะว่า

$$a' = 120^{\circ}$$

$$b' = 65^{\circ}$$

$$c' = 35^{\circ}$$

เมื่อ  $a', b', c'$  เป็นด้านของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว

และ  $b' + c' = 65^\circ + 35^\circ = 100^\circ$   
 $\therefore b' + c' \neq a'$

2.3  $A = 60^\circ, B = 20^\circ, C = 90^\circ$

ตอบ เป็นไปไม่ได้

เพราะว่า  $A+B+C = 60^\circ + 20^\circ + 90^\circ$   
 $= 170^\circ$   
 $\therefore 180^\circ \neq A+B+C$

2.4  $A = 30^\circ, B = 37^\circ, C = 128^\circ$

ตอบ เป็นไปได้

เพราะว่า  $A+B+C = 30^\circ + 37^\circ + 128^\circ$   
 $= 195$   
 $\therefore 180^\circ < A+B+C < 540^\circ$

และ  $a' = 150^\circ, b' = 143^\circ, c' = 52^\circ$

จึงได้ว่า ผลรวมของด้านสองด้านใด ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงขั้วของ ABC ย่อมยาวกว่าด้านที่สาม

3. จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดด้าน a, b และ c ตามลำดับดังนี้

3.1  $a = 160^\circ, b = 110^\circ, c = 85^\circ$

ตอบ เป็นไปได้

เพราะว่า  $a+b > c, a+c > b$  และ  $b+c > a$

และได้ว่า  $A' = 180^\circ - a$   
 $= 20^\circ$   
 $B' = 180^\circ - b$   
 $= 70^\circ$   
 $C' = 180^\circ - c$   
 $= 95^\circ$

เป็นมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงขั้วของ ABC

และ  $A' + B' + C' = 20 + 70 + 95 = 185^\circ$

ดังนั้น จึงได้ว่า  $180^\circ < A' + B' + C' < 540^\circ$

$$3.2 \quad a = 170^\circ, \quad b = 150^\circ, \quad c = 10^\circ$$

ตอบ เป็นไปไม่ได้

เพราะว่า  $b + c = 150^\circ + 10^\circ = 160^\circ$  และ  $a = 170^\circ$

จึงได้ว่า  $b + c < a$

$$3.3 \quad a = 170^\circ, \quad b = 150^\circ, \quad c = 50^\circ$$

ตอบ เป็นไปไม่ได้

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า} \quad A' &= 180^\circ - a \\ &= 10^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' &= 180^\circ - b \\ &= 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad C' &= 180^\circ - c \\ &= 130^\circ \end{aligned}$$

เป็นมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงขั้วของ ABC

$$\begin{aligned} \text{โดย} \quad A' + B' + C' &= 10^\circ + 30^\circ + 130^\circ \\ &= 170^\circ \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า  $180^\circ < A' + B' + C'$

$$3.4 \quad a = 30, \quad b = 50, \quad c = 70$$

ตอบ เป็นไปได้

เพราะว่า  $a + b > c$ ,  $a + c > b$  และ  $b + c > a$

และ  $A' = 150^\circ$ ,  $B' = 130^\circ$ ,  $C' = 110^\circ$  เป็นมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงขั้วของ ABC

$$\begin{aligned} \text{โดย} \quad A' + B' + C' &= 150^\circ + 130^\circ + 110^\circ \\ &= 390^\circ \end{aligned}$$

ซึ่งได้ว่า  $180^\circ < A' + B' + C' < 540^\circ$

4. จงพิสูจน์ว่า ผลรวมของมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ย่อมมากกว่า  $180^\circ$  และน้อยกว่า  $540^\circ$

พิสูจน์ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม และ  $A'B'C'$  เป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของ ABC

โดยทฤษฎีบท 3.7.2 ได้ว่า

$$a' = 180^\circ - A$$

$$b' = 180^\circ - B$$

$$c' = 180^\circ - C$$

$$\therefore A+a' = B+b' = C+c' = 180^\circ$$

$$\text{และ } A+B+C+a'+b'+c' = 540^\circ$$

เนื่องจาก  $a'+b'+c' > 0^\circ$  จึงได้ว่า  $A+B+C < 540^\circ$

และเนื่องจาก  $a'+b'+c' < 360^\circ$  จึงได้ว่า  $A+B+C > 180^\circ$

นั่นคือ  $180^\circ < A+B+C < 540^\circ$

5. จงพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใดๆ  $A+B < 180^\circ + C$

พิสูจน์ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม และ A'B'C' เป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้ว

ของ ABC

เนื่องจาก  $a'+b' > c'$

ดังนั้น  $180^\circ - A + 180^\circ - B > 180^\circ - C$

$$360^\circ - A - B > 180^\circ - C$$

$$-360^\circ + A + B < -180^\circ + C$$

$$A + B < 360^\circ - 180^\circ + C$$

$$A + B < 180^\circ + C$$

6. สำหรับสูตรแต่ละสูตรของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ต่อไปนี้ จงเขียนสูตรใหม่ให้เกี่ยวข้องกับสามเหลี่ยมเชิงขั้ว A'B'C'

$$6.1 \sin a = \sin c \sin A$$

วิธีทำ จาก  $\sin a = \sin c \sin A$

โดยทฤษฎีบท 3.7.2 จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\sin(180^\circ - A') = \sin(180^\circ - C') \sin(180^\circ - a')$$

นั่นคือ  $\sin A' = \sin C' \sin a'$

$$6.2 \tan b = \tan c \cos A$$

วิธีทำ จาก  $\tan b = \tan c \cos A$

โดยทฤษฎีบท 3.7.2 จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\tan(180^\circ - B') = \tan(180^\circ - C') \cos(180^\circ - a')$$

$$-\tan B' = (-\tan C') (-\cos a')$$

นั่นคือ  $\tan B' = -\tan C' \cos a'$

6.3  $\tan a = \sin b \tan A$

วิธีทำ จาก  $\tan a = \sin b \tan A$

โดยทฤษฎีบท 3.7.2 จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\tan(180^\circ - A') = \sin(180^\circ - B') \tan(180^\circ - a')$$

$$-\tan A' = (\sin B') (-\tan a')$$

นั่นคือ  $\tan A' = \sin B' \tan a'$

6.4  $\cos c = \cos b \cos a$

วิธีทำ จาก  $\cos c = \cos b \cos a$

โดยทฤษฎีบท 3.7.2 ได้ว่า

$$\cos(180^\circ - C') = \cos(180^\circ - B') \cos(180^\circ - A')$$

$$-\cos C' = (-\cos B') (-\cos A')$$

นั่นคือ  $\cos C' = -\cos B' \cos A'$

6.5  $\sin b = \sin c \sin B$

วิธีทำ จาก  $\sin b = \sin c \sin B$

โดยทฤษฎีบท 3.7.2 ได้ว่า

$$\sin(180^\circ - B') = \sin(180^\circ - C') \sin(180^\circ - b')$$

ดังนั้น  $\sin B' = \sin C' \sin b'$

6.6  $\cos a = \cos b \cos a + \sin b \sin c \cos A$

วิธีทำ จาก  $\cos a = \cos b \cos a + \sin b \sin c \cos A$

โดยทฤษฎีบท 3.7.2 ได้ว่า

$$\cos(180^\circ - A') = \cos(180^\circ - B') \sin(180^\circ - A')$$

$$+ \sin(180^\circ - B') \sin(180^\circ - C') \cos(180^\circ - a')$$

$$-\cos A' = (-\cos B') (-\cos A') + \sin B' \sin C' (-\cos a')$$

$$= \cos B' \cos A' - \sin B' \sin C' \cos a'$$

นั่นคือ  $\cos A' = -\cos B' \cos A' + \sin B' \sin C' \cos a'$