

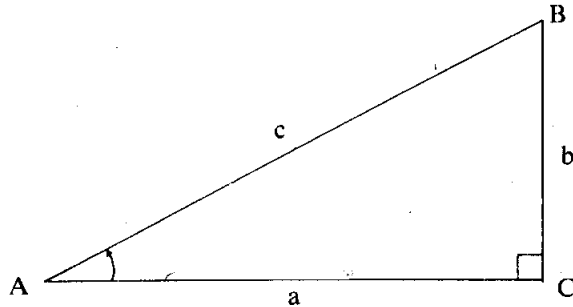
## ภาคผนวก

ประมวลความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติเชิงระนาบ

## ฟังก์ชันตรีโกณมิติเชิงระนาบ

### 1. นิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติสำหรับสามเหลี่ยมมุมฉาก

สามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก และมีด้านยาว a, b, c ดังรูป 1.1



รูป 1.1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม A นิยามได้ดังนี้

$$1.1 \text{ ไซน์ของ } A = \sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$1.2 \text{ โคไซน์ของ } A = \cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{ด้านประชิดมุม } A}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$1.3 \text{ แทนเจนต์ของ } A = \tan A = \frac{a}{b} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ด้านประชิดมุม } A}$$

$$1.4 \text{ โคแทนเจนต์ของ } A = \cot A = \frac{b}{a} = \frac{\text{ด้านประชิดมุม } A}{\text{ด้านตรงข้ามมุม } A}$$

$$1.5 \text{ เซแคนต์ของ } A = \sec A = \frac{c}{b} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านประชิดมุม } A}$$

$$1.6 \text{ โคเซแคนต์ของ } A = \operatorname{cosec} A = \frac{c}{a} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม } A}$$

### 2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติสำหรับมุมซึ่งอาจจะกางมากกว่า 90°

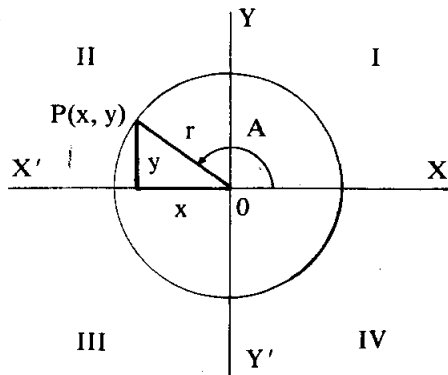
พิจารณาระบบพิกัดฉากซึ่งมี  $X'OX$  กับ  $Y'OY$  เป็นแกน ให้จุด P ในระนาบ XY มีพิกัดเป็น (x, y)

เมื่อค่า x ซึ่งวัดไปตาม OX ให้มีค่าเป็นบวกและวัดไปตาม  $OX'$  มีค่าเป็นลบ ในขณะที่

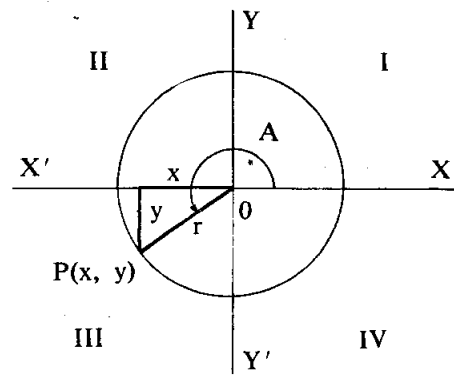
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

ค่า  $y$  ซึ่งวัดไปตาม  $OY$  ให้มีค่าเป็นบวก และวัดไปตาม  $OY'$  มีค่าเป็นลบ ระยะทางจากจุดกำเนิด  $O$  ไปยังจุด  $P$  คือ  $r = \sqrt{x^2+y^2}$  มีค่าเป็นบวกเสมอ มุม  $A$  ซึ่งวัดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจาก  $OX$  ให้มีค่าเป็นบวก แต่ถ้ามุม  $A$  วัดไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจาก  $OX$  ให้มีค่าเป็นลบ

จุดตกภาคต่าง ๆ ซึ่งเขียนแทนด้วย I, II, III และ IV จะเรียกว่าจุดตกภาคที่หนึ่ง, ที่สอง, ที่สาม และที่สี่ตามลำดับ ดูรูป 2.1 และ 2.2



รูป 2.1



รูป 2.2

สำหรับมุม  $A$  ในจุดตกภาคใด ๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $A$  นิยามได้ดังนี้

$$2.1 \quad \sin A = \frac{y}{r}$$

$$2.2 \quad \cos A = \frac{x}{r}$$

$$2.3 \quad \tan A = \frac{y}{x}$$

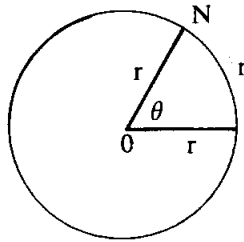
$$2.4 \quad \cot A = \frac{x}{y}$$

$$2.5 \quad \sec A = \frac{r}{x}$$

$$2.6 \quad \operatorname{cosec} A = \frac{r}{y}$$

### 8. ความสัมพันธ์ระหว่างองศาและเรเดียน

เรเดียนคือมุม  $\theta$  ซึ่งรองรับส่วนโค้ง  $MN$  ซึ่งยาวเท่ากับรัศมี  $r$  ที่จุดศูนย์กลาง  $O$  ของวงกลม ดังรูป 3.1



รูป 3.1

เนื่องจาก  $2\pi$  เรเดียน =  $360^\circ$  จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} 3.1 \text{ 1 เรเดียน} &= \frac{180^\circ}{\pi} \\ &= 57.29577 \ 95130 \ 8232\dots^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2 \text{ 1 องศา} &= \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \\ &= 0.01745 \ 32925 \ 19943 \ 29576 \ 92\dots \text{ เรเดียน} \end{aligned}$$

#### 4. ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$4.1 \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$4.2 \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$4.3 \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$4.4 \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$4.5 \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$4.6 \sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$4.7 \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$$

### 5. เครื่องหมายและการแปรผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จุดตกภาค ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ	I	II	III	IV
sin A	+ 0 ถึง 1	+ 1 ถึง 0	- 0 ถึง -1	- -1 ถึง 0
cos A	+ 1 ถึง 0	- 0 ถึง -1	- -1 ถึง 0	+ 0 ถึง 1
tan A	+ 0 ถึง $\infty$	- $-\infty$ ถึง 0	+ 0 ถึง $\infty$	- $-\infty$ ถึง 0
cot A	+ $\infty$ ถึง 0	- 0 ถึง $-\infty$	+ $\infty$ ถึง 0	- 0 ถึง $-\infty$
sec A	+ 1 ถึง $\infty$	- $-\infty$ ถึง -1	- -1 ถึง $-\infty$	+ $\infty$ ถึง 1
cosec A	+ $\infty$ ถึง 1	+ 1 ถึง $\infty$	- $-\infty$ ถึง -1	- -1 ถึง $-\infty$

## 19. สูตรในรูปทั่วไป

$$19.1 \sin nA = \sin A \left\{ (2\cos A)^{n-1} - \binom{n-2}{1} (2\cos A)^{n-3} + \binom{n-3}{2} (2\cos A)^{n-5} - \dots \right\}$$

$$19.2 \cos nA = \frac{1}{2} \left\{ (2\cos A)^n - \frac{n}{1} (2\cos A)^{n-2} + \frac{n}{2} \binom{n-3}{2} (2\cos A)^{n-4} - \frac{n}{3} \binom{n-4}{2} (2\cos A)^{n-6} + \dots \right\}$$

$$19.3 \sin^{2n-1} A = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \left\{ \sin(2n-1)A - \binom{2n-1}{1} \sin(2n-3)A + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{n-1} \sin A \right\}$$

$$19.4 \cos^{2n-1} A = \frac{1}{2^{2n-2}} \left\{ \cos(2n-1)A + \binom{2n-1}{1} \cos(2n-3)A + \dots + \binom{2n-1}{n-1} \cos A \right\}$$

$$19.5 \sin^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2nA - \binom{2n}{1} \cos(2n-2)A + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} \cos A \right\}$$

$$19.6 \cos^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2nA + \binom{2n}{1} \cos(2n-2)A + \dots + \binom{2n}{n-1} \cos 2A \right\}$$

## 20. ค่าหลักสำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

20.1 ค่าหลักสำหรับ  $x \geq 0$

$$(1) 0 \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(2) 0 \leq \cos^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(3) 0 \leq \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

$$(4) 0 < \cot^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(5) 0 \leq \sec^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

$$(6) 0 < \operatorname{cosec}^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

20.2 ค่าหลักสำหรับ  $x < 0$

$$(1) -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x < 0$$

$$(2) \frac{\pi}{2} < \cos^{-1}x \leq \pi$$

$$(3) -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < 0$$

$$(4) \frac{\pi}{2} < \cot^{-1}x < \pi$$

$$(5) \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}x \leq \pi$$

$$(6) -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{cosec}^{-1}x < 0$$

## 21. ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

ในทุก ๆ กรณีต่อไปนี้สมมติว่าใช้ค่าหลัก

$$21.1 \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$21.2 \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$21.3 \sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$21.4 \operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$21.5 \sec^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$21.6 \cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$21.7 \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$$

$$21.8 \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$$

$$21.9 \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$$

$$21.10 \cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$$

$$21.11 \sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$$

$$21.12 \operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1}x$$

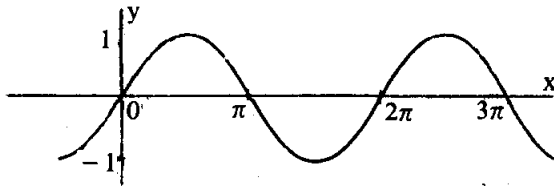
### 6. ค่าที่แท้จริงสำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมบางมุม

Angle $A$ in degrees	Angle $A$ in radians	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$
$0^\circ$	$0$	$0$	$1$	$0$	$\infty$	$1$	$\infty$
$15^\circ$	$\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$
$30^\circ$	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$2$
$45^\circ$	$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$1$	$1$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60^\circ$	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$2$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$75^\circ$	$5\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$
$90^\circ$	$\pi/2$	$1$	$0$	$\pm\infty$	$0$	$\pm\infty$	$1$
$105^\circ$	$7\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$
$120^\circ$	$2\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-2$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$135^\circ$	$3\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-1$	$-1$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$150^\circ$	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$2$
$165^\circ$	$11\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$
$180^\circ$	$\pi$	$0$	$-1$	$0$	$\mp\infty$	$-1$	$\pm\infty$
$195^\circ$	$13\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
$210^\circ$	$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-2$
$225^\circ$	$5\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$1$	$1$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$240^\circ$	$4\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-2$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$255^\circ$	$17\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
$270^\circ$	$3\pi/2$	$-1$	$0$	$\pm\infty$	$0$	$\mp\infty$	$1$
$285^\circ$	$19\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
$300^\circ$	$5\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$2$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$315^\circ$	$7\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-1$	$-1$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$330^\circ$	$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-2$
$345^\circ$	$23\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
$360^\circ$	$2\pi$	$0$	$1$	$0$	$\mp\infty$	$1$	$\mp\infty$



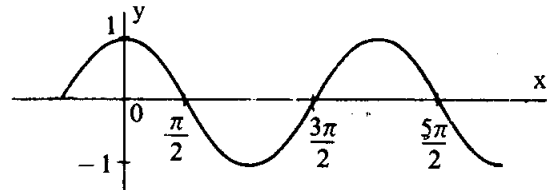
## 7. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

7.1  $y = \sin x$



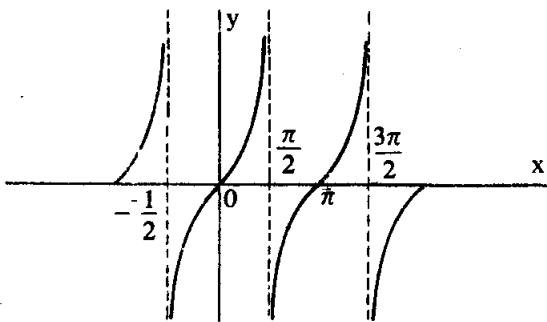
รูป 7.1

7.2  $y = \cos x$



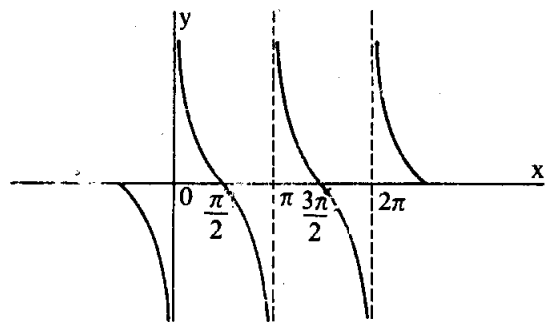
รูป 7.2

7.3  $y = \tan x$



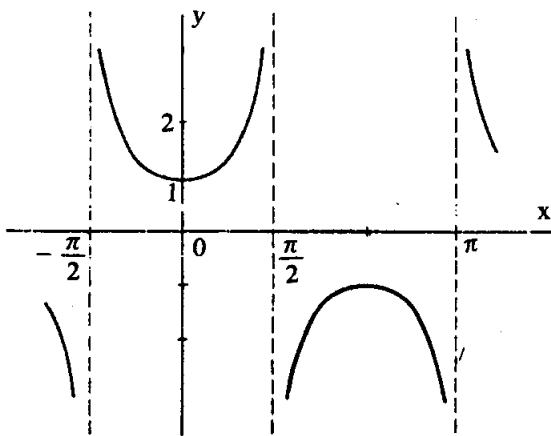
รูป 7.3

7.4  $y = \cot x$



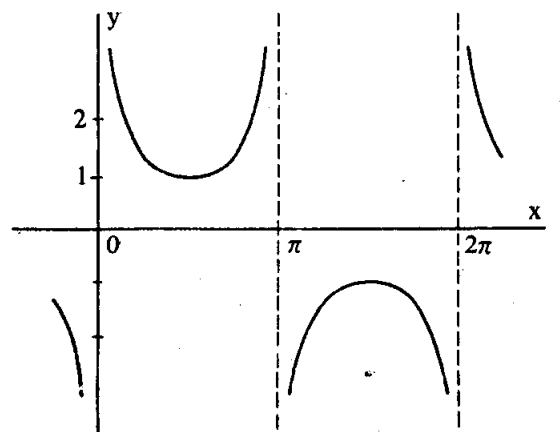
รูป 7.4

7.5  $y = \sec x$



รูป 7.5

7.6  $y = \csc x$



รูป 7.6

## 8. ฟังก์ชันของมุมลบ

$$8.1 \sin(-A) = -\sin A$$

$$8.2 \cos(-A) = \cos A$$

$$8.3 \tan(-A) = -\tan A$$

$$8.4 \operatorname{cosec}(-A) = -\operatorname{cosec} A$$

$$8.5 \sec(-A) = \sec A$$

$$8.6 \cot(-A) = -\cot A$$

## 9. สูตรผลรวมของมุม

$$9.1 \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$9.2 \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$9.3 \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$9.4 \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$9.5 \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$9.6 \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$9.7 \cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$9.8 \cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

## 10. ฟังก์ชันของมุมในทุกจุดตกภาคในพจน์ของจุดตกภาคที่ 1

	$-A$	$90^\circ - A$	$90^\circ + A$	$180^\circ - A$	$180^\circ + A$	$270^\circ - A$	$270^\circ + A$	$k(360^\circ) - A$ k เป็นจำนวนเต็ม	$k(360^\circ) + A$ k เป็นจำนวนเต็ม
sin	$-\sin A$	$\cos A$	$\cos A$	$\sin A$	$-\sin A$	$-\cos A$	$-\cos A$	$-\sin A$	$\sin A$
cos	$\cos A$	$\sin A$	$-\sin A$	$-\cos A$	$-\cos A$	$-\sin A$	$\sin A$	$\cos A$	$\cos A$
tan	$-\tan A$	$\cot A$	$-\cot A$	$-\tan A$	$\tan A$	$\cot A$	$-\cot A$	$-\tan A$	$\tan A$
cosec	$-\operatorname{cosec} A$	$\sec A$	$\sec A$	$\operatorname{cosec} A$	$-\operatorname{cosec} A$	$-\sec A$	$-\sec A$	$-\operatorname{cosec} A$	$\operatorname{cosec} A$
sec	$\sec A$	$\operatorname{cosec} A$	$-\operatorname{cosec} A$	$-\sec A$	$-\sec A$	$-\operatorname{cosec} A$	$\operatorname{cosec} A$	$\sec A$	$\sec A$
cot	$-\cot A$	$\tan A$	$-\tan A$	$-\cot A$	$\cot A$	$\tan A$	$-\tan A$	$-\cot A$	$\cot A$

### 11. ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันของมุมในจุดตัดภาคที่ 1

	$\sin A = u$	$\cos A = u$	$\tan A = u$	$\cot A = u$	$\sec A = u$	$\operatorname{cosec} A = u$
$\sin A$	$u$	$\sqrt{1-u^2}$	$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$	$\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}$	$\frac{1}{u}$
$\cos A$	$\sqrt{1-u^2}$	$u$	$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$	$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$	$\frac{1}{u}$	$\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}$
$\tan A$	$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$	$u$	$\frac{1}{u}$	$\sqrt{u^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$
$\cot A$	$\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$	$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{1}{u}$	$u$	$\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$	$\sqrt{u^2-1}$
$\sec A$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{1}{u}$	$\sqrt{1+u^2}$	$\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}$	$u$	$\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}$
$\operatorname{cosec} A$	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}$	$\sqrt{1+u^2}$	$\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}$	$u$

### 12. สูตรมุมทวีคูณ

$$12.1 \sin 2A = 2\sin A \cos A$$

$$12.2 \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$12.3 \tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

### 13. สูตรครึ่งมุม

$$13.1 \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \text{ ถ้า } \frac{A}{2} \text{ อยู่ในจุดตัดภาคที่ I หรือ II}$$

$$13.2 \sin \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \text{ ถ้า } \frac{A}{2} \text{ อยู่ในจุดตัดภาคที่ III หรือ IV}$$

$$13.3 \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \text{ ถ้า } \frac{A}{2} \text{ อยู่ในจุดตัดภาคที่ I หรือ IV}$$

$$13.4 \quad \cos \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \quad \text{ถ้า } \frac{A}{2} \text{ อยู่ในจุดตัดภาคที่ II หรือ III}$$

$$13.5 \quad \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \quad \text{ถ้า } \frac{A}{2} \text{ อยู่ในจุดตัดภาคที่ I หรือ III}$$

$$13.6 \quad \tan \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \quad \text{ถ้า } \frac{A}{2} \text{ อยู่ในจุดตัดภาคที่ II หรือ IV}$$

$$\begin{aligned} 13.7 \quad \tan \frac{A}{2} &= \frac{\sin A}{1+\cos A} \\ &= \frac{1-\cos A}{\sin A} \\ &= \operatorname{cosec} A - \cot A \end{aligned}$$

#### 14. สูตรมุมพหุคูณ

$$14.1 \quad \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$14.2 \quad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$14.3 \quad \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$14.4 \quad \sin 4A = 4\sin A \cos A - 8\sin^3 A \cos A$$

$$14.5 \quad \cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1$$

$$14.6 \quad \tan 4A = \frac{4\tan A - 4\tan^3 A}{1 - 6\tan^2 A + \tan^4 A}$$

$$14.7 \quad \sin 5A = 5\sin A - 20\sin^3 A + 16\sin^5 A$$

$$14.8 \quad \cos 5A = 16\cos^5 A - 20\cos^3 A + 5\cos A$$

$$14.9 \quad \tan 5A = \frac{\tan^5 A - 10\tan^3 A + 5\tan A}{1 - 10\tan^2 A + 5\tan^4 A}$$

#### 15. กำลังของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$15.1 \quad \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

$$15.2 \quad \cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

$$15.3 \quad \sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}$$

$$15.4 \quad \cos^3 A = \frac{3\cos A + \cos 3A}{4}$$

$$15.5 \quad \sin^4 A = \frac{3 - 4\cos 2A + \cos 4A}{8}$$

$$15.6 \quad \cos^4 A = \frac{3 + 4\cos 2A + \cos 4A}{8}$$

$$15.7 \quad \sin^5 A = \frac{10\sin A - 5\sin 3A + \sin 5A}{16}$$

$$15.8 \quad \cos^5 A = \frac{10\cos A + 5\cos 3A + \cos 5A}{16}$$

### 16. ผลบวกของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$16.1 \quad \sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$16.2 \quad \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$16.3 \quad \tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$$

### 17. ผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$17.1 \quad \sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$17.2 \quad \cos A - \cos B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

$$17.3 \quad \tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$$

### 18. ผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$18.1 \quad \sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

$$18.2 \quad \cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$$

$$18.3 \quad \sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B))$$

$$18.4 \quad \cos A \sin B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) - \sin(A-B))$$