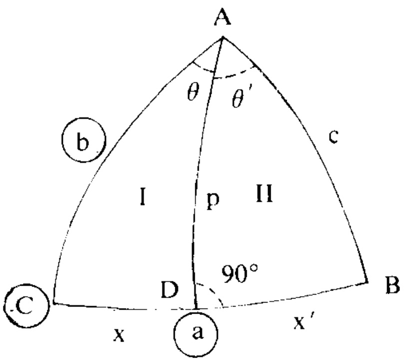
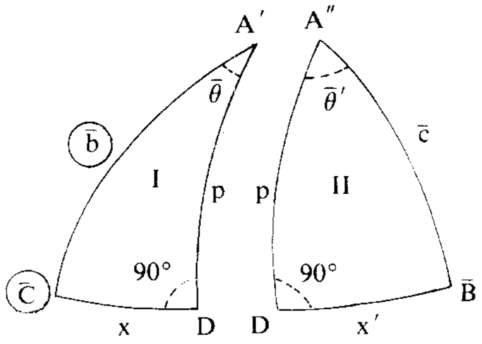
บทที่ 5
การแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงโดยวิธีอื่น

5.1 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านและมุมระหว่างด้านทั้งสอง

พิจารณาการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่กำหนด a, b และ C มาให้โดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก



รูป 5.1.1



รูป 5.1.2

(**หมายเหตุ**: ให้ $\bar{C}$ แทน $90° - C$, $\bar{b}$ แทน $90° - b$, $\bar{\theta}$ แทน $90° - \theta$, $\bar{B}$ แทน $90° - B$, $\bar{c}$ แทน $90° - c$ และ $\bar{\theta}'$ แทน $90° - \theta'$)

รูป 5.1.1 แสดงสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งจากจุดยอด A ลากส่วนโค้ง AD มาตั้งฉากกับด้าน BC และเขียนวงกลมล้อมรอบ a, b และ c ซึ่งเป็นส่วนที่กำหนดมาให้

รูป 5.1.2 แสดงสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป ซึ่งได้จากการแบ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ด้วยส่วนโค้ง AD ของรูป 5.1.1 และเป็นส่วนต่าง ๆ เพื่อนำมาใช้กับกฎของเนเปียร์

โดยกระบวนการตามปกติของการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

จากสามเหลี่ยม I ได้

$$\tan x = \tan b \cos C \qquad \text{.......... (1)}$$

$$\cot \theta = \cos b \tan C \qquad \text{.......... (2)}$$

$$\sin p = \sin b \sin C \qquad \text{.......... (3)}$$

$$\sin p = \cot \theta \tan x \quad \text{(สูตรตรวจสอบ)} \qquad \text{.......... (4)}$$

หลังจากได้ค่าของ x, θ และ p แล้วจะทำให้เราทราบส่วน p และ $x' = a - x$ ในสามเหลี่ยม II จากนั้นก็ใช้กฎของเนเปียร์สร้างสูตรสำหรับแก้ปัญหาสามเหลี่ยม II ซึ่งได้ดังนี้

$$x' = a - x \qquad \text{.......... (5)}$$

$$\cot B = \cot p \sin x' \qquad \text{.......... (6)}$$

$$\cot \theta' = \sin p \cot x' \qquad \text{.......... (7)}$$

$$\cos c = \cos p \cos x' \qquad \text{.......... (8)}$$

$$\cos c = \cot \theta' \cot B \quad \text{(สูตรตรวจสอบ)} \qquad \text{.......... (9)}$$

$$A = \theta + \theta' \qquad \text{.......... (10)}$$

ถ้าส่วนต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดมาให้ไม่ใช่ a, b และ C การคิดคำนวณก็อาจทำได้โดยการสร้างสูตรในการแก้ปัญหาใหม่ โดยวิธีการทำนองเดียวกับที่แสดงมาแล้วข้างต้น หรืออาจทำได้ง่าย ๆ โดยการสับเปลี่ยนอักษรของส่วนที่กำหนดให้ลงในสูตร (1) ถึง (10) ก็ได้

อนึ่งในการแก้ปัญหา โดยปกติเรามักจะต้องเขียนรูปประกอบการพิจารณา อย่างไรก็ตาม ข้อกำหนดต่อไปนี้จะช่วยให้เราพิจารณาค่าต่าง ๆ ที่ได้จากการคำนวณโดยไม่ต้องดูรูปประกอบ ข้อกำหนดดังกล่าวมีดังนี้

1. ส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC แต่ละส่วน คือ a, b, c, A, B และ C ต่างมีค่าเป็นบวกและน้อยกว่า 180°

2. เมื่อ $\tan x > 0$ ได้ค่า x ซึ่ง $0° < x < 90°$
   เมื่อ $\tan x < 0$ ได้ค่า x ซึ่ง $90° < x < 180°$

3. ส่วนต่าง ๆ ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ต้องคล้องตามกฎจตุตถภาคของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

4. ค่า x กับ θ และค่า x' กับ θ' แต่ละคู่จะต้องอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน และมีเครื่องหมายเหมือนกัน

5. มุม B ที่หาได้จากสูตร (6) จะอยู่ในจตุตถภาคที่ 1 ถ้า $\cot B > 0$ และจะอยู่ในจตุตถ-ภาคที่ 2 ถ้า $\cot B < 0$ (โดยมุม B ไม่จำเป็นจะต้องอยู่ในจตุตถภาคเดียวกันกับ p)

5.2 การแก้ปัญหากรณีกำหนดมุมให้สองมุมและด้านระหว่างมุมทั้งสอง

การแก้ปัญหากรณีกำหนดมุมให้สองมุมและด้านระหว่างมุมทั้งสองโดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก สามารถทำได้โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.7.2 โดยหาด้านสองด้านและมุมระหว่างด้านทั้งสองของสามเหลี่ยมเชิงขั้วที่สมนัยกัน แล้วทำการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงขั้วโดยใช้สูตร (1) ถึงสูตร (10) ในหัวข้อ 5.1 และใช้ทฤษฎีบท 3.7.2 กับผลลัพธ์ที่ได้จากสามเหลี่ยมเชิงขั้วอีกครั้งหนึ่ง ก็จะเป็นผลลัพธ์ที่ต้องการ

5.3 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านและมุมระหว่างด้านทั้งสองด้วยฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์

ฮาเวอร์ไซน์ (haver sine) ของมุม θ ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ hav θ นั้น มีนิยามว่า :

$$\operatorname{hav}\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

ฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ จะมีคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้

1) $\operatorname{hav} 0^\circ = 0$

2) $\operatorname{hav} 180^\circ = 1$

3) $\operatorname{hav}(-\theta) = \operatorname{hav}\theta$

4) $\cos\theta = 1 - 2\operatorname{hav}\theta$

ฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์มีประโยชน์ในการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ในกรณีกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้านทั้งสอง และในกรณีกำหนดด้านให้สามด้านโดยตรง รวมทั้งการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ที่กำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุมทั้งสอง และกรณีกำหนดมุมให้สามมุมด้วย ในการแก้ปัญหากรณีต่าง ๆ ดังกล่าว จะต้องอาศัยสูตรของฟังก์ชันฮาเวอร์ไซน์ดังต่อไปนี้

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

1) $\operatorname{hav} A = \dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}$

2) $\operatorname{hav} B = \dfrac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c \sin a}$

3) $\operatorname{hav} C = \dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}$

เมื่อ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

และ

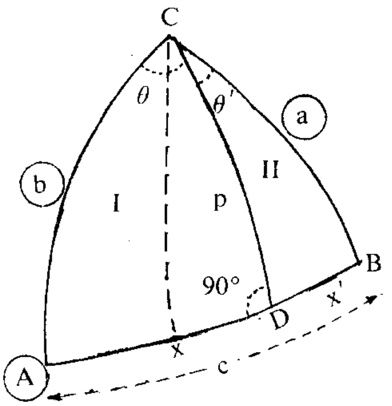
4) $\text{hav}\, a = \text{hav}(b-c) + \sin b \sin c \,\text{hav}\, A$

5) $\text{hav}\, b = \text{hav}(c-a) + \sin c \sin a \,\text{hav}\, B$

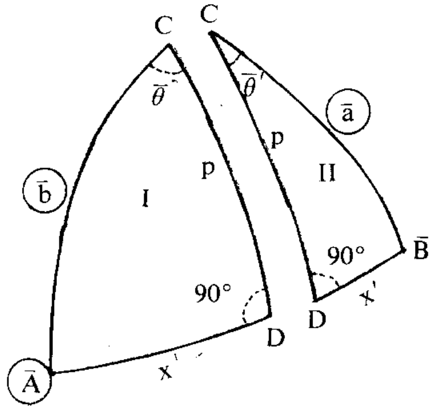
6) $\text{hav}\, c = \text{hav}(a-b) + \sin a \sin b \,\text{hav}\, C$

5.4 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้าน และมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง

พิจารณาการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ที่กำหนด a, b และ A มาให้ โดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก



รูป 5.4.1



รูป 5.4.2

สำหรับการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงในกรณีที่กำหนดด้านให้สองด้าน และมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่งนี้ ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะมีชุดเดียวหรือสองชุดก็ได้

รูป 5.4.1 แสดงสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งจากจุดยอด C ลากส่วนโค้ง CD มาตั้งฉากกับด้าน AB และเขียนวงกลมล้อมรอบ a, b และ A ซึ่งเป็นส่วนที่กำหนดมาให้ ส่วนเส้นประนั้นแสดงถึงตำแหน่งของส่วนโค้ง CD ที่อาจลากมาตั้งฉากกับด้าน AB ได้อีกตำแหน่งหนึ่ง

รูป 5.4.2 แสดงสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป ซึ่งได้จากการแบ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ด้วยส่วนโค้ง CD และเขียนส่วนต่าง ๆ ที่จะนำมาใช้กับกฎของเนเปียร์

ใช้กฎของเนเปียร์กับสามเหลี่ยม I ในรูป 5.4.2 จะได้

$$\tan x = \tan b \cos A \qquad \text{..........(1)}$$

$$\cot\theta = \cos b \tan A \qquad \text{..........(2)}$$

$$\sin p = \sin b \sin A \qquad \text{..........(3)}$$

$$\sin p = \tan x \cot\theta \quad \text{(สูตรตรวจสอบ)} \qquad \text{..........(4)}$$

เนื่องจากเราได้ค่า p จากสูตร (3) แล้ว ดังนั้น ในสามเหลี่ยม II เราจึงทราบค่า p และ a จึงใช้กฎของเนเปียร์กับสามเหลี่ยม II จะได้

$$\cos x' = \frac{\cos a}{\cos p} \qquad (5)$$

$$\sin B = \frac{\sin p}{\sin a} \qquad (6)$$

$$\cos\theta' = \cot a \tan p \qquad \text{..........(7)}$$

$$\cos\theta' = \cos x' \sin B \quad \text{(สูตรตรวจสอบ)} \qquad \text{..........(8)}$$

และจากรูป 5.4.1 จะได้

$$c = x + x' \qquad \text{..........(9)}$$

$$C = \theta + \theta' \qquad \text{..........(10)}$$

ถ้าส่วนต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดมาให้ ไม่ใช่ a, b, A การคิดคำนวณก็อาจทำได้ โดยการสร้างสูตรและการแก้ปัญหาใหม่ โดยการสับเปลี่ยนอักษรของส่วนที่กำหนดให้ลงในสูตร (1) ถึง (10)

ข้อสังเกต

เนื่องจากโคไซน์ (cosine) ของมุมลบมีค่าเท่ากับโคไซน์ของมุมบวก ดังนั้น จากสูตร (5) จึงได้ค่า x' 2 ค่า โดยค่าหนึ่งเป็นบวก และอีกค่าหนึ่งเป็นลบ และผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหาก็จะสมนัยกับแต่ละค่า

เนื่องจากค่า B หาได้จากค่า sin B ในสูตร (6) จึงได้มุม B 2 ค่า เป็นมุม ๆ หนึ่งกับมุมประกอบสองมุมฉากของมุมนั้น จากสามเหลี่ยม II ได้ว่า $\cot B = \cot p \sin x'$ ดังนั้น B จะอยู่ในจตุตถภาคเดียวกันกับ p เมื่อ x' เป็นบวก แต่ถ้า x' เป็นลบแล้ว B กับ p จะอยู่ต่างจตุตถภาคกัน (นั่นคือ ถ้า p อยู่จตุตถภาคที่หนึ่งแล้ว B จะอยู่จตุตถภาคที่สอง แต่ถ้า p อยู่จตุตถภาคที่สองแล้ว B จะอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง)

ถ้า $\cos x' = 1$ แสดงว่า $x' = 0$ ในกรณีเช่นนี้ผลลัพธ์จะมีเพียงชุดเดียว แต่ถ้า $\cos x' > 1$ แล้ว จะไม่มีคำตอบ อนึ่งค่า c กับ C ที่ได้จากสูตร (9) และ (10) ต้องไม่เป็นลบและไม่มากกว่า 180° ดังนั้นจะไม่มีคำตอบที่สอดคล้องกับค่า x' ถ้า $x + x'$ หรือ $\theta + \theta'$ มีค่าใดค่าหนึ่งมากกว่า 180°

5.5 การแก้ปัญหากรณีกำหนดมุมให้สองมุมและด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง

การแก้ปัญหากรณีกำหนดมุมให้สองมุมและด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่งโดยวิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก สามารถทำได้โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.7.2 โดยการหาด้านสองด้านและมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมเชิงขั้วที่สมนัยกัน แล้วทำการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงขั้วโดยใช้สูตร (1) ถึง (10) ในหัวข้อ 5.4 และใช้ทฤษฎีบท 3.7.2 กับผลลัพธ์ที่ได้อีกครั้งหนึ่ง ก็จะเป็นผลลัพธ์ที่ต้องการ ตัวอย่างเช่น ต้องการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเฉียง ABC ซึ่งกำหนด A, B, a มาให้ ก็สามารถทำได้ตามกระบวนการของหัวข้อ 5.4 โดยใช้สามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ซึ่ง $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $A' = 180° - a$ นั่นคือเป็นการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ในกรณีที่กำหนด a', b', A' มาให้ เมื่อได้ผลลัพธ์คือ B', C', c' แล้ว ก็ใช้ทฤษฎี 3.7.2 จะได้ว่า $b = 150° - B'$, $c = 150° - C'$, $C = 180° - c'$ นั่นคือ จะได้ผลลัพธ์ คือ b, c, C ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ตามต้องการ

5.6 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สามด้าน

การแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ใด ๆ ในกรณีที่กำหนดด้านมาให้สามด้านนั้น โดยปกติเราจะใช้สูตรครึ่งมุมในหัวข้อ 4.5.1 มาช่วยแก้ปัญหา ถึงอย่างไรก็ตาม เราอาจใช้วิธีสามเหลี่ยมมุมฉากมาแก้ปัญหาก็ได้ ดังนี้

หามุมใดมุมหนึ่งก่อนโดยกฎของโคไซน์สำหรับด้าน จากนั้นก็ทำให้เราทราบด้านสามด้านและมุม ๆ หนึ่ง แล้วจึงใช้วิธีการแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านและมุมระหว่างด้านทั้งสองตามวิธีการในหัวข้อ 5.1 ต่อไป ก็จะได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ เช่น โจทย์กำหนดด้าน a, b, c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มาให้ เราอาจหามุม C โดยกฎของโคไซน์สำหรับด้าน คือ

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

จากผลลัพธ์นี้ทำให้เราทราบ a, b, c และ C ของสามเหลี่ยม ABC ก็จัดเข้าในกรณีทราบด้านสองด้านและมุมระหว่างด้านทั้งสอง (คือทราบ a, b และ C)

5.7 การแก้ปัญหากรณีกำหนดมุมให้สามมุม

การแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ABC ในกรณีกำหนดมุมให้สามมุม คือ มุม A, B และ C ในกรณีนี้สามารถแก้ปัญหาตามวิธีการในหัวข้อ 5.6 โดยการใช้สามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ซึ่งจะได้ว่า $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$ และ $c' = 180° - C$ นั่นคือ ทำ

ให้เราทราบด้านทั้งสามด้าน คือ a', b' และ c' ของสามเหลี่ยม $A'B'C'$ จึงสามารถแก้ปัญหาตามกระบวนการในหัวข้อ 5.6 ได้ เมื่อได้ผลลัพธ์คือมุม A', B' และ C' ของสามเหลี่ยม $A'B'C'$ แล้ว โดยทฤษฎีบท 3.7.2 จะได้ว่า $a = 180° - A'$, $b = 180° - B'$ และ $c = 180° - C'$ นั่นคือ ได้ผลลัพธ์เป็นด้านทั้งสาม คือด้าน a, b และ c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ตามต้องการ
