บทที่ 4
สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง
(Oblique Spherical Triangles)

4.1 ลักษณะของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง คือ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมซึ่งไม่มีมุมหนึ่งมุมใดเป็นมุมฉากเลย

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มีองค์ประกอบหกส่วน คือ มุม A, B, C และด้าน a, b, c เมื่อกำหนดส่วนใด ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงมาให้อย่างน้อยสามส่วน จะสามารถหาส่วนที่เหลือได้

ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงมีทั้งหมด 6 กรณี คือ

กรณีที่ 1 กำหนดด้านให้สามด้าน

กรณีที่ 2 กำหนดมุมให้สามมุม

กรณีที่ 3 กำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้าน

กรณีที่ 4 กำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุม

กรณีที่ 5 กำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง

กรณีที่ 6 กำหนดมุมให้สองมุมกับด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง

การแก้ปัญหาในกรณีต่าง ๆ ทั้ง 6 กรณีนั้น จะต้องมีสูตรและกฎที่เหมาะสม ดังจะกล่าวต่อไป

4.2 กฎของไซน์ (Law of sines)

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

$$\frac{\sin a}{\sin A} \quad \frac{\sin b}{\sin B} \quad \frac{\sin c}{\sin c}$$

ข้อสังเกต ในการแก้ปัญหาโดยใช้กฎของไซน์นั้น ในบางครั้งอาจพบปัญหาว่า ส่วน

ที่หามาได้นั้นอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง หรือจตุตถภาคที่สอง หรืออาจจะอยู่ทั้งในจตุตถภาคที่หนึ่งและที่สองก็ได้ เนื่องจาก $\sin A = \sin(180^\circ - A)$ นั่นเอง อย่างไรก็ตาม เราอาจจะพิจารณาได้โดยอาศัยคุณสมบัติของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่ว่า

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

(1) ถ้า $a < b < c$ แล้ว $A < B < C$

(2) $a+b > c$, $a+c > b$ และ $b+c > a$

4.3 กฎของโคไซน์สำหรับด้านและสำหรับมุม

4.3.1) **กฎของโคไซน์สำหรับด้าน** กล่าวว่า :

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

(2) $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$

(3) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

4.3.2) **กฎของโคไซน์สำหรับมุม**

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(I) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

(2) $\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$

(3) $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$

4.4 กฎห้าส่วน

กฎห้าส่วนเป็นกฎที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมสองมุมกับด้านสามด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ มีดังนี้

(1) $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$

(2) $\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$

(3) $\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$

(4) $\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$

(5) $\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$

(6) $\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$

4.5 สูตรครึ่งมุมและสูตรครึ่งด้าน

4.5.1) สูตรครึ่งมุม

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $\tan\frac{1}{2}A = \frac{r}{\sin(s-a)}$

(2) $\tan\frac{1}{2}B = \frac{r}{\sin(s-b)}$

(3) $\tan\frac{1}{2}C = \frac{r}{\sin(s-c)}$

เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$

และ $r = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$

4.5.2) สูตรครึ่งด้าน

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $\cot\frac{1}{2}a = \frac{R}{\cos(S-A)}$

(2) $\cot\frac{1}{2}b = \frac{R}{\cos(S-B)}$

(3) $\cot\frac{1}{2}c = \frac{R}{\cos(S-C)}$

เมือ $s = \frac{A+B+C}{2}$

และ $R = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos s}}$

4.6 การอุปมานของเกาส์และของเนเปียร์

4.6.1) การอุปมานของเกาส์ (Gauss's analogies)

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}$

(2) $$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

(3) $$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}$$

(4) $$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

และสูตรที่อยู่ในรูปอื่น ๆ ซึ่งได้จากการเปลี่ยนอักษรของ (1) ถึง (4) เป็นวัฏจักร จะทำให้ได้สูตรอีก 8 สูตร รวมเป็นสูตรทั้งหมด 12 สูตรด้วยกัน

4.6.2) การอุปมานของเนเปียร์ (Napier's analogies)

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $$\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$

(2) $$\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}$$

(3) $$\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

(4) $$\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

และสูตรที่อยู่ในรูปอื่น ๆ ซึ่งได้จากการเปลี่ยนอักษรของ (1) ถึง (4) เป็นวัฏจักร ซึ่งจะได้สูตรเพิ่มอีก 8 สูตร รวมเป็น 12 สูตร

4.7 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สามด้าน และกรณีกำหนดมุมให้สามมุม

4.7.1) เมื่อกำหนดด้านให้สามด้าน คือ กำหนดด้าน a, b และ c มาให้ อาจแก้ปัญหา

โดยใช้กฎโคไซน์สำหรับด้านหรือใช้สูตรครึ่งมุมก็ได้

4.7.2) เมื่อกำหนดมุมให้สามมุม คือ กำหนดมุม A, B และ C มาให้ อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม หรือใช้สูตรครึ่งด้านก็ได้

4.8 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้าน และกรณีกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุม

4.8.1) เมื่อกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้านทั้งสอง คือ กำหนด a, c, B หรือ b, c, A หรือ a, b, C มาให้ อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับด้าน หรือใช้สูตรการอุปมานของเนเปียร์ก็ได้

4.8.2) เมื่อกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุมทั้งสอง คือ กำหนด A, C, b หรือ B, C, a หรือ A, B, c มาให้ อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม หรือใช้สูตรการอุปมานของเนเปียร์ หรือใช้หลักการของสามเหลี่ยมเชิงขั้วกับกฎโคไซน์สำหรับด้านหรือกับอุปมานของเนเปียร์ก็ได้

4.9 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง และกรณีกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง

4.9.1) เมื่อกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง คือ กำหนด a, b, A หรือ a, b, B หรือ a, c, A หรือ a, c, C หรือ b, c, B หรือ b, c, C มาให้ อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎของไซน์และสูตรการอุปมานของเนเปียร์

4.9.2) เมื่อกำหนดมุมให้สองมุมและด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง คือกำหนด A, B, a หรือ A, B, b หรือ A, C, a หรือ A, C, c หรือ B, C, b หรือ B, C, c มาให้ อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎของไซน์และสูตรการอุปมานของเนเปียร์