# บทที่ 3
# สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก
# (Right Spherical Triangle)

## 3.1 ลักษณะของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก คือ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมฉากเพียงมุมเดียวเท่านั้น

ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากที่มี C เป็นมุมฉากแล้ว อาจแยกลักษณะต่าง ๆ ได้ 3 ลักษณะ คือ

1) สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่มีด้าน $a < 90°$ และด้าน $b < 90°$

2) สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่มีด้าน $a > 90°$ และด้าน $b < 90°$

3) สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ที่มีด้าน $a > 90°$ และด้าน $b > 90°$

**หมายเหตุ** มุมแต่ละมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่เรากล่าวถึงนี้ ต้องมีขนาดน้อยกว่า 180° เสมอ

## 3.2 สูตรเกี่ยวกับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ใด ๆ ที่มี C เป็นมุมฉาก จะได้สูตรความสัมพันธ์พื้นฐาน 10 สูตร ดังนี้

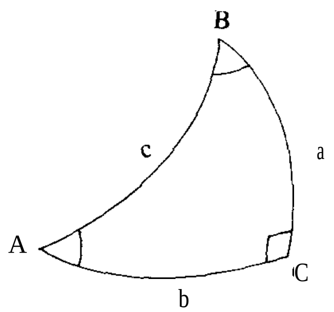
1. $\sin a = \sin A \sin c$
2. $\tan a = \tan A \sin b$
3. $\tan a = \cos B \tan c$
4. $\sin b = \sin B \sin c$
5. $\tan b = \tan B \sin a$
6. $\tan b = \cos A \tan c$
7. $\cos c = \cos b \cos a$
8. $\cos c = \cot A \cot B$

9. $\cos A = \sin B \cos a$

10. $\cos B = \sin A \cos b$

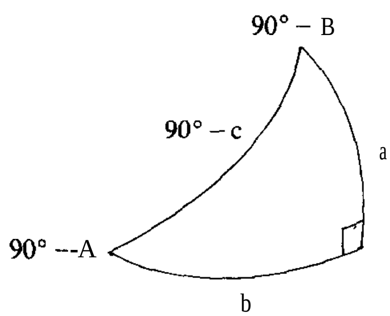
## 3.3 กฎของเนเปียร์ (Napier's rules)

จากสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ดังรูป 3.3.1



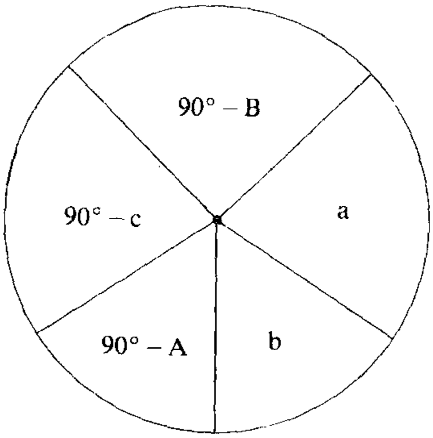

รูป 3.3.1

ถ้านำมาเขียนเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมใหม่ โดยการแทน c ซึ่งเป็นส่วนตรงข้ามมุมฉาก C ด้วย $90° - c$ แทน A และ B ซึ่งเป็นมุมที่มีแขนข้างหนึ่งเป็นด้านตรงข้ามมุมฉากด้วย $90° - A$ และมุม $90° - B$ ตามลำดับ ดังรูป 3.3.2




รูป 3.3.2

ปริมาณทั้งห้า คือ a, b, $90° - c$, $90° - A$ และ $90° - B$ นำมาจัดเรียงติดกันเป็นวงกลมได้ดังรูป 3.3.3




รูป 3.3.3

จากรูป 3.3.3 ถ้ากำหนดส่วนใดส่วนหนึ่งมาให้ จะมีส่วนของวงกลม 2 ส่วนที่อยู่ติดกันกับส่วนที่กำหนดให้ และอีก 2 ส่วน จะไม่อยู่ติดกันกับส่วนที่กำหนดให้ เราเรียกส่วนที่กำหนดให้ว่า **ส่วนกลาง** (middle part) เรียกสองส่วนที่อยู่ติดกับส่วนกลางว่า **ส่วนประชิด** (adjacent parts) และเรียกอีกสองส่วนที่ไม่อยู่ติดกับส่วนกลางว่า **ส่วนตรงข้าม** (opposite parts) แล้วสูตรทั้ง 10 สูตรตามหัวข้อ 3.3.2 สามารถสร้างได้จากส่วนต่าง ๆ ที่กล่าวมา โดยใช้กฎที่คิดขึ้นโดยเนเปียร์ ซึ่งเรียกสั้น ๆ ว่า กฎของเนเปียร์ ซึ่งมีกฎดังนี้

(1) sine ของส่วนกลางใด ๆ ย่อมเท่ากับผลคูณของ tangent ของส่วนประชิดทั้งสอง

(2) sine ของส่วนกลางใด ๆ ย่อมเท่ากับผลคูณของ cosines ของส่วนตรงข้ามทั้งสอง

หรืออาจเขียนกฎทั้งสองอย่างสั้น ๆ ได้ดังนี้

sin (ส่วนกลาง) = tan (ส่วนประชิด) = cos (ส่วนตรงข้าม)

## 3.4 กฎที่สำคัญของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

**กฎจตุตถภาคของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก**

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ซึ่งมี C เป็นมุมฉาก จะได้ว่า

**กฎที่ 1** ด้าน a และมุม A (ด้าน b และมุม B) ย่อมอยู่ในจตุตถภาค (quadrant) เดียวกัน

**กฎที่ 2**

ถ้า $c < 90°$ ด้าน a และ b ย่อมอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน

ถ้า $c > 90°$ ด้าน a และ b ย่อมอยู่ต่างจตุตถภาคกัน

**ข้อสังเกต** จากกฎที่ 2 อาจกล่าวได้ว่า

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC ถ้าสองในสามส่วนของ a, b และ c อยู่ในจตุตถภาคเดียวกันแล้ว ส่วนที่สามย่อมอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง แต่ถ้าสองส่วนใด ๆ อยู่ต่างจตุตถ-ภาคกันแล้ว ส่วนที่สามย่อมอยู่ในจตุตถภาคที่สอง

## 3.5 การแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

เมื่อกำหนดส่วนของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ABC เพิ่มจากมุมฉาก C มาให้สองส่วนใด ๆ แล้ว ย่อมสามารถหาส่วนที่เหลือได้ โดยอาศัยสูตรพื้นฐานทั้ง 10 สูตร หรืออาศัยกฎเนเปียร์ โดยอาจดำเนินการเป็นขั้น ๆ ดังนี้

1. เขียนปริมาณทั้งห้า คือ a, b, $90° - A$, $90° - c$ และ $90° - B$ ลงในส่วนของวงกลมดังรูป 3.3.3 แล้วล้อมรอบส่วนของสามเหลี่ยมทรงกลมฉากที่โจทย์กำหนดมาให้

2. เขียนสูตรที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนทั้งสองของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากที่กำหนดให้กับส่วนที่ต้องการหา (โดยอาศัยกฎของเนเปียร์)

3. เขียนสูตรที่จะนำมาใช้ตรวจสอบความถูกต้องของทั้งสามส่วน

4. ใช้กฎจตุตถภาคมาช่วยพิจารณาค่าของส่วนที่ต้องการ

**หมายเหตุ** ในบางครั้งเราอาจจะหาส่วนที่เหลือไม่ได้ ถ้าหากว่าส่วนที่โจทย์กำหนดมาให้นั้นผิดจากความจริง

**ข้อสังเกต** สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมหน้าจั่ว (isosceles spherical triangle) ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีด้านเท่ากันสองด้าน สามารถแก้ปัญหาได้โดยการแบ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมหน้าจั่วออกเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก 2 รูป แล้วก็ใช้วิธีการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

## 3.6 กรณีกำกวมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก

(The ambiguous case of right spherical triangles)

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากเมื่อกำหนดด้าน ๆ หนึ่งและมุมตรงข้ามด้านนั้นมาให้ คำตอบที่หาได้อาจมี 2 ชุด ในกรณีเช่นนี้แต่ละส่วนที่ไม่ทราบค่าหาได้จากค่าไซน์ (sine) ดังนั้นจึงอาจเลือกคำตอบให้อยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง หรือจตุตถภาคที่สองก็ได้ นั่นคือคำตอบที่ได้เป็นค่าของแต่ละมุมที่ไม่ทราบค่า และมุมประกอบสองมุมฉากของแต่ละมุม

## 3.7 **สามเหลี่ยมเชิงขั้ว** (Polar triangles)

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งมี A, B และ C เป็นจุดยอด ถ้าจุดยอดเหล่านี้เป็นจุดขั้วของด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม $A'B'C'$ ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งแล้ว จะเรียก $A'B'C'$ ว่าเป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของ ABC

**ทฤษฎีบท 3.7.1** ถ้า $A'B'C'$ เป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC แล้ว ABC ย่อมเป็นสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยม $A'B'C'$

**ทฤษฎีบท 3.7.2** ในสามเหลี่ยมเชิงขั้วสองรูป มุมแต่ละมุมของรูปหนึ่งย่อมเป็นมุมประกอบสองมุมฉากของด้านตรงข้ามมุมของอีกรูปหนึ่ง

นั่นคือ
$$A = 180^\circ - a' \quad , \quad A' = 180^\circ - a$$
$$B = 180^\circ - b' \quad , \quad B' = 180^\circ - b$$
$$C = 180^\circ - c' \quad , \quad C' = 180^\circ - c$$

## 3.8 **สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก** (Quadrantal triangles)

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีด้าน ๆ หนึ่งยาวเท่ากับ $90^\circ$ เราเรียกว่า **สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก** โดยจะได้ว่า สามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ก็คือสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ซึ่งสามารถแก้ปัญหาได้โดยใช้สูตรพื้นฐานที่ใช้แก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากทั้ง 10 สูตร แล้วส่วนที่ต้องการหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก จะหาได้จากความสัมพันธ์ ตามทฤษฎีบท 3.7.2

**กฎจตุตถภาคของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก**

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC ซึ่งมี $c = 90^\circ$ จะได้ว่า

**กฎที่ 1** ด้าน a และมุม A (ด้าน b และมุม B) ย่อมอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน

**กฎที่ 2**

ถ้า $C < 90^\circ$ แล้ว มุม A และ B ย่อมอยู่ต่างจตุตถภาคกัน

ถ้า $C > 90^\circ$ แล้ว มุม A และ B ย่อมอยู่ในจตุตถภาคเดียวกัน

**ข้อสังเกต** จากกฎที่ 2 อาจกล่าวได้ว่า

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้านฉาก ABC ถ้าสองในสามส่วนของ A, B และ C อยู่ในจตุตถภาคเดียวกันแล้ว ส่วนที่สามย่อมอยู่ในจตุตถภาคที่สอง ถ้าสองในสามส่วนของ A, B และ C อยู่ต่างจตุตถภาคกันแล้ว ส่วนที่สามย่อมอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง