

บทที่ 2

เรขาคณิตเชิงทรงกลม

2.1 รูปทรงกลม (Sphere)

นิยาม 2.1.1 รูปทรงกลม คือ รูปที่ล้อมรอบด้วยผิวโค้ง โดยที่ทุก ๆ จุดบนผิวโค้งมีระยะห่างจากจุด ๆ หนึ่งเท่ากัน จุดคงที่จุดนั้นเรียกว่า จุดศูนย์กลางของทรงกลม ส่วนของเส้นตรงใด ๆ ที่เชื่อมระหว่างจุดบนผิวโค้งของทรงกลมกับจุดศูนย์กลางของทรงกลม เรียกว่า เส้นรัศมีของทรงกลม ความยาวของเส้นรัศมีเรียกว่า รัศมีของทรงกลม

2.2 จุดและเส้นบนทรงกลม

วงกลมใหญ่ (great circle) คือ วงกลมที่เกิดจากระนาบตัดทรงกลม โดยระนาบนั้นตัดผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม ซึ่งเส้นตัดจะเป็นวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากับรัศมีของทรงกลม ถ้าระนาบตัดทรงกลมโดยที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม เส้นตัดจะเป็นวงกลมที่มีรัศมีสั้นกว่ารัศมีของทรงกลม เรียกวงกลมนี้ว่า **วงกลมเล็ก** (small circle) เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมซึ่งตั้งฉากกับระนาบของวงกลม เรียกว่า แกน (axis) ของวงกลม แกนนี้จะตัดทรงกลม 2 จุด เรียกจุดทั้งสองนี้ว่า **ขั้ว** (pole) ของวงกลม

ระยะขั้ว (polar distance) ของวงกลม คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลม ซึ่งวัดจากจุดใดจุดหนึ่งบนวงกลมไปยังขั้วของวงกลมนั้น

ข้อสังเกต

(1) จุด 2 จุดใด ๆ บนผิวของทรงกลมที่ไม่ใช่จุดขั้ว ย่อมทำให้เกิดวงกลมใหญ่เพียงวงเดียวเท่านั้น

(2) วงกลมใหญ่ 2 วงใด ๆ บนผิวทรงกลมย่อมตัดกันสองแห่ง

2.3 มุมเชิงทรงกลม (Spherical angle)

มุมเชิงทรงกลม คือ มุมที่เกิดจากส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สองวงตัดกัน เรียกส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ว่า แขน (side) และเรียกจุดตัดของวงกลมใหญ่ทั้งสองว่า จุดยอด (vertex) ของมุมเชิงทรงกลม มุมเชิงทรงกลมมีขนาดของมุมเท่ากับมุมระหว่างสองระนาบที่เกิดจากระนาบของวงกลมใหญ่ ซึ่งมีส่วนโค้งเป็นแขนของมุมเชิงทรงกลม มุมเชิงทรงกลมวัดเป็นองศาได้เท่ากับส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมนั้น

2.4 สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (Spherical triangle)

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม คือ ส่วนของผิวทรงกลมที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สามวง ส่วนโค้งของวงกลมใหญ่แต่ละวงที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมนี้ เราเรียกว่า ด้าน (side) และจุดยอดของมุมเชิงทรงกลมทั้งสามมุมเราเรียกว่า จุดยอด (vertices) ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

โดยปกติมักใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่ A, B, C แทนจุดยอดของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC และใช้อักษรตัวพิมพ์เล็ก a, b, c แทนด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุม A, B, C ตามลำดับ

ข้อสังเกต

(1) ความยาวของด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมวัดได้ด้วยมุมหน้า (face angle) ของมุมระหว่างสามระนาบ ดังนั้น ด้าน a, b, c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จึงวัดเป็นองศาหรือเรเดียน

(2) ขนาดของมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม วัดได้ด้วยมุมระหว่างสองระนาบที่เกิดจากระนาบของด้านคู่นั้น

โดยทั่ว ๆ ไป เราจะพิจารณาเฉพาะสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีด้านแต่ละด้านและมุมแต่ละมุมน้อยกว่า 180 องศา ซึ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมดังกล่าวจะมีคุณสมบัติดังนี้

- 1) ด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งรวมกันเข้า ย่อมมากกว่าด้านที่สาม นั่นคือ $a + b > c$, $a + c > b$ และ $b + c > a$
- 2) ด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งรวมกันเข้า ย่อมน้อยกว่า 360 องศา นั่นคือ $0^\circ < a + b + c < 360^\circ$
- 3) ถ้าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองย่อมมีขนาดเท่ากัน
- 4) ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีขนาดเท่ากันแล้ว ด้านที่อยู่ตรง

ข้ามกับมุมทั้งสองย่อมยาวเท่ากัน

5) ถ้าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีความยาวไม่เท่ากันแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสองย่อมมีขนาดไม่เท่ากัน และมุมที่ใหญ่กว่า ย่อมอยู่ตรงข้ามกับด้านที่ยาวกว่า

6) ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีขนาดไม่เท่ากันแล้ว ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสองย่อมยาวไม่เท่ากัน และด้านที่ยาวกว่าย่อมอยู่ตรงข้ามกับมุมที่ใหญ่กว่า

7) มุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่ง รวมกันเข้าย่อมมากกว่า 180 องศา และน้อยกว่า 540 องศา

นั่นคือ $180^\circ < A+B+C < 540^\circ$

8) มุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งรวมกันเข้าย่อมน้อยกว่าผลบวกระหว่างมุมที่สามกับ 180 องศา

นั่นคือ $A+B < C+180^\circ$

$$A+C < B+180^\circ$$

และ $B+C < A+180^\circ$

ข้อสังเกต สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมอาจมีมุมฉากมากกว่าหนึ่งมุมหรืออาจมีมุมป้านมากกว่าหนึ่งมุมก็ได้ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมฉากเพียงหนึ่งมุมเรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก (right spherical triangle) ที่มีมุมฉากสองมุมเรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมสองมุมฉาก (birectangular spherical triangle) และที่มีมุมฉากสามมุมที่เรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมสามมุมฉาก (trirectangular spherical triangle)

มุมส่วนเกินเชิงทรงกลม (spherical excess) คือ ผลต่างระหว่างผลบวกของมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับผลบวกของมุมของสามเหลี่ยมบนระนาบ หรือกล่าวได้ว่า มุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ก็คือ จำนวนองศาที่ผลรวมของมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม เกินกว่า 180°

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม 2 รูปเท่ากันทุกประการ ถ้าสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นอยู่บนทรงกลมเดียวกัน หรืออยู่บนทรงกลมที่เท่ากัน และมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากับมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งตามลำดับ

2.5 พื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

ถ้าทรงกลมมีรัศมียาวเท่ากับ R แล้ว จะได้ว่า

พื้นที่ผิวของทรงกลม คือ $4\pi R^2$

และพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมบนผิวของทรงกลมนี้ คือ $\frac{\pi R^2 E}{180}$ เมื่อ E เป็นมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมที่อยู่ในรูปองศา

ข้อสังเกต สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม 2 รูป ที่มีผลบวกของมุมภายในเท่ากัน ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน

2.6 รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม (Spherical polygons)

รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม คือ ส่วนบนพื้นผิวของทรงกลมที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สามวงหรือมากกว่า รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลมทุกรูปมีมุมระหว่างหลายระนาบซึ่งจุดยอดของมุมอยู่ที่ศูนย์กลางของทรงกลม ขนาดด้านของรูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลมวัดได้ด้วยมุมหน้าของมุมระหว่างหลายระนาบที่สมนัยกัน

ข้อสังเกต รูป n เหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ สามารถแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมได้ $n-2$ รูป โดยการลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่ง และผลรวมของมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเหล่านี้ ย่อมเท่ากับผลรวมของผลต่างระหว่างผลบวกของมุมของรูปหลายเหลี่ยมกับ $(n-2)180^\circ$