บทที่ 6

บทประยุกต์เกี่ยวกับแนวทางและระยะทางบนทรงกลมโลก

หัวข้อเรื่อง

6.1 ลักษณะของทรงกลมโลกและสามเหลี่ยมโลก

6.2 แนวทางและระยะทางของการเดินเรือตามแนวขนานของละติจูด

6.3 แนวทางและระยะทางของการเดินเรือตามแนวราบ

6.4 แนวทางและระยะทางของการเดินเรือตามแนววงกลมใหญ่

วัตถุประสงค์ประจำบทเรียน

หลังจากศึกษาบทที่ 6 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. อธิบายลักษณะของทรงกลมโลก ตลอดจนส่วนประกอบที่เกี่ยวข้อง โดยเฉพาะความหมายของเส้นศูนย์สูตร เส้นเมริเดียน ค่าละติจูด และค่าลองจิจูดของจุดใดๆ บนผิวโลกได้

2. อธิบายลักษณะของสามเหลี่ยมโลกได้

3. บอกหน่วยของระยะทางระหว่างจุดตามแนววงกลมใหญ่ และอธิบายลักษณะของการ บอกแนวทางของเรือทั้งแนวทางเริ่มต้น (initial course) และแนวทางขณะถึง (course arrival) ณ ตำแหน่งใดๆ ได้

4. แสดงวิธีการหาแนวทางและระยะทางของการเดินเรือไปทางทิศตะวันออกหรือทิศตะวันตกตามแนววงกลมเล็กที่ขนานกับเส้นศูนย์สูตรหรือตามแนวขนานของละติจูดได้

5. แสดงวิธีการหาแนวทางและระยะทางของการเดินเรือบนผิวโลก ในกรณีที่มีระยะทางน้อยกว่า 200 ไมล์ทะเลได้

6. แสดงวิธีการหาแนวทางระยะทางของการเดินเรือบนผิวโลกตามแนววงกลมใหญ่ทั่วๆ ไปได้

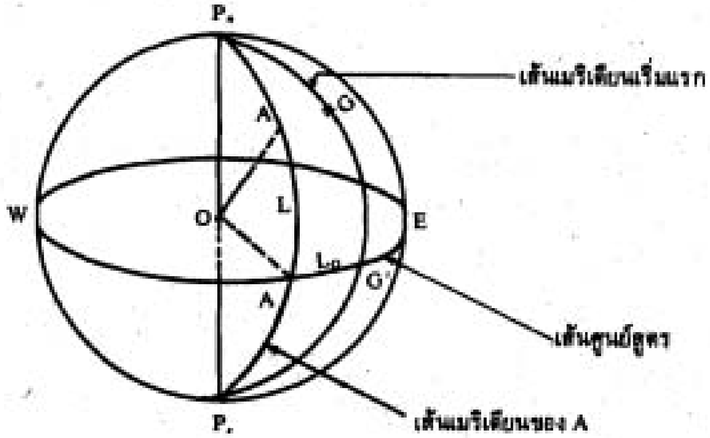
บทที่ 6

บทประยุกต์เกี่ยวกับแนวทาง (course) และระยะทาง (distance) บนทรงกลมโลก

6.1 ลักษณะของทรงกลมโลกและสามเหลี่ยมโลก

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว โลกเรามีรูปร่างลักษณะค่อนข้างใกล้เคียงกับรูปทรงรี (ellipsoid) ดังนั้น สำหรับงานที่ต้องการความถูกต้องสูงแล้วในการคิดคำนวณจะใช้รูปทรงรี แต่สำหรับงานที่ต้องการความถูกต้องไม่สูงมากนัก แล้วในการคิดคำนวณมักจะพิจารณาให้โลกเป็นทรงกลม เพื่อว่าการแก้ปัญหาหรือการคิดคำนวณงานนั้น ๆ จะสามารถนำเอาความรู้เกี่ยวกับวิชาตรีโกณมิติเชิงทรงกลม (spherical trigonometry) มาช่วยแก้ปัญหาได้ ทรงกลมที่ใช้แทนโลกนั้น เราเรียกว่า ทรงกลมโลก (terrestrial sphere) ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวประมาณ 7,917 ไมล์

โดยปกติโลกหมุนรอบเส้นผ่านศูนย์กลาง ซึ่งเราเรียกเส้นผ่านศูนย์กลางนี้ว่า แกน (axis) ของโลก แกนของโลกนี้จะตัดผิวโลกที่จุด 2 จุด จุดหนึ่งเรียกว่า ขั้วโลกเหนือ (north pole) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย P_n และอีกจุดหนึ่งเรียกว่า ขั้วโลกใต้ (south pole) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย P_s ดังรูป 6.1.1



รูป 6.1.1

เส้นศูนย์สูตร (equator) คือ วงกลมใหญ่บนโลกซึ่งระนาบของวงกลมใหญ่นั้นตั้งฉากกับแกนของโลก หรืออาจให้ความหมายได้อีกแบบหนึ่งว่า เส้นศูนย์สูตร ก็คือ วงกลมใหญ่ที่มี P_n และ P_s เป็นขั้วนั่นเอง

เส้นเมริเดียน (meridian) คือ ครึ่งวงกลมใหญ่ที่ผ่านขั้วโลกทั้งสอง โดยมีขั้วโลกทั้งสองเป็นจุดตั้งต้นและจุดสิ้นสุด นั่นคือ สำหรับจุด A ใด ๆ บนผิวโลกที่ไม่ใช่จุดขั้ว เราจะเรียกครึ่งวงกลม P_nAP_s ว่า เส้นเมริเดียนของ A (ดูรูป 6.1.1)

เส้นเมริเดียนเริ่มแรก (first or prime meridian) คือ เส้นเมริเดียนที่ผ่านหอดูดาวที่กรีนิช (Greenwich) ประเทศอังกฤษ จากรูป 6.1.1 คือ เส้นเมริเดียนของ G หรือเส้น P_nGP_s ก็คือ เส้นเมริเดียนเริ่มแรกนั่นเอง

เนื่องจากเส้นเมริเดียนตัดกับเส้นศูนย์สูตรเป็นมุมฉาก ดังนั้น ระยะเชิงมุมของจุด (angular distance of points) บนผิวโลกจากเส้นศูนย์สูตรสามารถวัดได้ด้วยความยาวตามเส้นเมริเดียนนั่นเอง

ละติจูด (latitude) ของจุดใด ๆ บนผิวโลก คือ ระยะเชิงมุมจากเส้นศูนย์สูตรไปตามเส้นเมริเดียนจนถึงจุดนั้น มักเขียนแทนด้วย L ในรูป 6.1.1 ละติจูดของ A ก็คือ มุม A′0A หรือส่วนโค้ง A′A ของเส้นเมริเดียนของ A ละติจูดของจุดแบ่งออกเป็นละติจูดเหนือ (north latitude) กับละติจูดใต้ (south latitude) ซึ่งขึ้นอยู่กับว่าจุดที่กล่าวถึงนั้นอยู่ในครึ่งทรงกลมส่วนที่อยู่เหนือเส้นศูนย์สูตรหรือใต้เส้นศูนย์สูตร โดยทั่ว ๆ ไป ค่าละติจูดเหนือให้มีค่าเป็นจำนวนบวก และค่าละติจูดใต้ให้มีค่าเป็นจำนวนลบ หรืออาจจะใช้วิธีระบุคำว่า เหนือหรือใต้ก็ได้ เช่น ใช้ 50° เหนือ แทน 50° และใช้ 50° ใต้ แทน −50° เป็นต้น

ผลต่างระหว่างละติจูด L_1 กับ L_2 $(L_1 > L_2)$ ตามลำดับ ก็คือ ค่า $L_1 - L_2$ ถ้าจุดทั้งสองนั้นอยู่บนครึ่งทรงกลมเดียวกัน แต่ถ้าจุดทั้งสองนั้นอยู่ต่างครึ่งทรงกลมกัน แล้วค่าผลต่างนั้นคือ $L_1 + L_2$

วงกลมเล็กที่ขนานกับเส้นศูนย์สูตร เราเรียกว่า แนวขนานของละติจูดหรือแนวขนาน (parallels of latitude or parallel) จุดทุก ๆ จุดบนแนวขนานเดียวกัน ย่อมมีค่าละติจูดเท่ากัน

ลองจิจูด (longitude) ของจุดใด ๆ บนผิวโลก ก็คือ มุมทรงกลมที่ขั้วโลกระหว่างเส้นเมริเดียนที่ผ่านจุดนั้น กับเส้นเมริเดียนเริ่มแรก มักเขียนแทนด้วย λ ค่าลองจิจูดของจุดใด ๆ อาจวัดไปทางทิศตะวันออกหรือทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนเริ่มแรก แล้วแต่ว่าจุด ๆ นั้นอยู่ทางทิศตะวันออกหรือทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนเริ่มแรก ตามแต่กรณี โดยมีค่าระหว่าง 0° ถึง 180° ในรูป 6.1.1 ลองจิจูดของ A ก็คือ มุมเชิงทรงกลม $G'P_nA'$ หรือ ก็คือส่วนโค้ง G′A′ นั่นเอง

ผลต่างระหว่างลองจิจูด λ_1 กับ λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) ตามลำดับ ก็คือ ค่า $\lambda_1 - \lambda_2$ ถ้าจุดทั้งสองอยู่ห่างจากเส้นเมริเดียนเริ่มแรกไปในทิศทางเดียวกัน แต่ถ้าจุดทั้งสองอยู่ห่างจากเส้นเมริเดียนเริ่มแรกไปในทิศทางตรงกันข้ามแล้ว ค่าผลต่างนั้นก็คือ ค่าที่น้อยกว่าระหว่าง $\lambda_1 + \lambda_2$ กับค่า $360° - (\lambda_1 + \lambda_2)$ (ค่าใดน้อยกว่าก็นำค่านั้นมาใช้)

อนึ่ง เส้นศูนย์สูตรและเส้นเมริเดียนเริ่มแรกเปรียบเสมือนแกนโคออร์ดิเนต 2 แกนที่อยู่บนพื้นผิวโลก โดยเส้นศูนย์สูตรเปรียบเสมือนแกน X และเส้นเมริเดียนเริ่มแรกเปรียบเสมือนแกน Y ของระบบโคออร์ดิเนตพิกัดฉากในระนาบ ดังนั้น ค่าลองจิจูดและค่าละติจูดของจุด A ก็คือ โคออร์ดิเนตของจุด A ที่สอดคล้องกับแกนเส้นศูนย์สูตรและแกนเส้นเมริเดียนเริ่มแรก โดยค่าลองจิจูดเปรียบเสมือนกับค่าโคออร์ดิเนต x และค่าละติจูดก็เปรียบเสมือนกับค่าโคออร์ดิเนต y การกำหนดละติจูดเหนือและละติจูดใต้ ลองจิจูดตะวันออกและลองจิจูดตะวันตก ก็สมนัยกับเครื่องหมายบวกและเครื่องหมายลบของค่าโคออร์ดิเนตของจุดในระนาบ เช่น

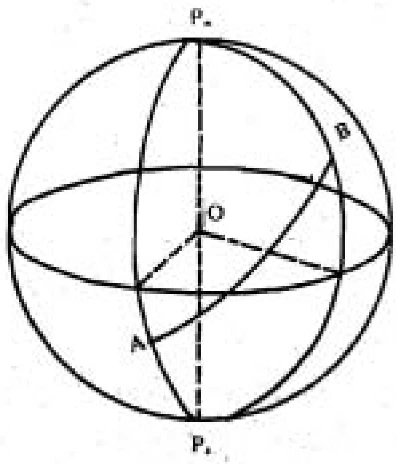
จุดที่มีลองจิจูด a° ตะวันออก และละติจูด b° เหนือ ก็เปรียบเสมือน จุด (a, b) ในระนาบ

จุดที่มีลองจิจูด a° ตะวันตก และละติจูด b° เหนือ ก็เปรียบเสมือนจุด (−a, b) ในระนาบ

จุดที่มีลองจิจูด a° ตะวันตก และละติจูด b° ใต้ ก็เปรียบเสมือนจุด (−a, −b) ในระนาบ

และจุดที่มีลองจิจูด a° ตะวันออก และละติจูด b° ใต้ ก็เปรียบเสมือนจุด (a, −b) ในระนาบ

สามเหลี่ยมโลก (terrestrial triangle) เส้นเมริเดียนที่ผ่านจุด 2 จุดบนพื้นผิวโลก และส่วนโค้งที่สั้นกว่าของวงกลมใหญ่ที่เชื่อมจุดทั้งสองนั้น จะทำให้เกิดสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม 2 รูป ดังรูป 6.1.2



รูป 6.1.2

จากรูป 6.1.2 ได้ว่า เส้นเมริเดียนที่ผ่านจุด A กับเส้นเมริเดียนที่ผ่านจุด B และส่วนโค้งที่สั้นกว่าของวงกลมใหญ่ที่เชื่อมระหว่าง A กับ B (คือ ส่วนโค้ง AB) ทำให้เกิดสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม 2 รูป คือ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_nB กับ AP_sB สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_nB นี้ มีชื่อเฉพาะเรียกว่า **สามเหลี่ยมโลก** (terrestrial triangle) ซึ่งสามเหลี่ยมโลกนี้จะนำไปใช้หาระยะทาง (distance) ระหว่างจุดตามแนววงกลมใหญ่ (ความยาวของส่วนโค้ง AB) ซึ่งปกติมักกำหนดให้อยู่ในรูป "ไมล์ทะเล" (nautical miles)

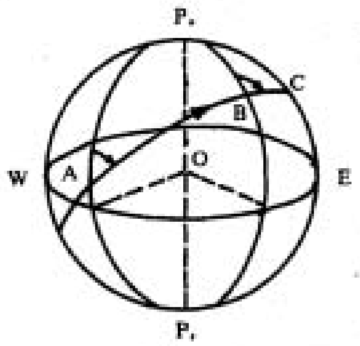
โดย

1 ลิบดาของส่วนโค้งวงกลมใหญ่ = 1 ไมล์ทะเล

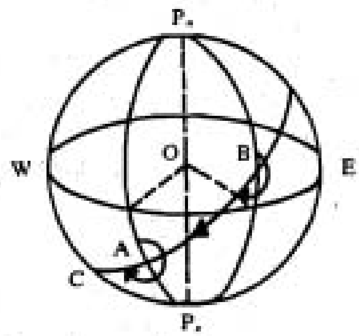
= 6,080 ฟุต

อนึ่ง ถ้าเรือ (หรืออากาศยาน) เคลื่อนที่ไปตามวงกลมใหญ่ระหว่างจุด 2 จุดแล้ว แนวทาง (course) ของเรือก็คือ มุมระหว่างเส้นเมริเดียนของเรือ กับวงกลมใหญ่นั้น โดยปกติ แนวทางจะวัดจากทิศเหนือไปทางทิศตะวันออก (วัดตามเข็มนาฬิกา)

ตัวอย่าง 6.1.1 พิจารณารูป 6.1.3 และรูป 6.1.4



รูป 6.1.3



รูป 6.1.4

ในรูป 6.1.3 เรือลำหนึ่งเดินทางจาก A ไปยัง B แนวทางเริ่มต้น (initial course) หรือแนวทางที่ A ก็คือ มุม P_nAB และแนวทางขณะถึง (course on arrival) หรือแนวทางที่ B ก็คือ มุม P_nBC

ในรูป 6.1.4 เรือลำหนึ่งเดินทางจาก B ไป A แนวทางเริ่มต้น หรือแนวทางที่ B ก็คือ มุม P_nBA และแนวทางขณะถึง หรือแนวทางที่ A ก็คือมุม P_nAC

ตัวอย่าง 6.1.2 จงหาผลต่างของลองจิจูดระหว่างสถานที่ต่อไปนี้

1.1) ซานฟรานซิสโกกับดาการ์

1.2) ซานฟรานซิสโกกับเมลเบอร์น

1.3) ดาการ์กับเคปทาวน์

1.4) เมลเบอร์นกับเคปทาวน์

เมื่อกำหนดให้

ซานฟรานซิสโก มี ลองจิจูด 122° 15′ 42″ ตะวันตก

ดาการ์ มี ลองจิจูด 17° 25′ ตะวันตก

เมลเบอร์น มี ลองจิจูด 144° 58′ 30″ ตะวันออก

และ เคปทาวน์ มี ลองจิจูด 18° 26′ ตะวันออก

วิธีทำ

1.1) เพราะซานฟรานซิสโกกับดาการ์อยู่ในทิศทางเดียวกัน คือทิศตะวันตกทั้งคู่

ดังนั้น $\lambda_1 - \lambda_2 = 122° 15' 42'' - 17° 25'$

$= 104° 50' 42''$

1.2) เพราะว่า ซานฟรานซิสโกกับเมลเบอร์นอยู่ในทิศทางตรงกันข้าม คือ ซานฟรานซิสโกอยู่ทางทิศตะวันตก แต่เมลเบอร์นอยู่ทางทิศตะวันออก

ดังนั้น $360° - (\lambda_1 + \lambda_2) = 360° - (122° 15' 42'' + 144° 58' 30'')$

$= 360° - 267° 14' 12''$

$= 92° 45' 48''$

1.3) เพราะว่า ดาการ์กับเคปทาวน์อยู่ในทิศทางตรงกันข้าม

ดังนั้น $\lambda_1 + \lambda_2 = 17° 25' + 18° 26'$

$= 35° 51'$

1.4) เพราะว่า เมลเบอร์นกับเคปทาวน์อยู่ในทิศทางเดียวกัน

ดังนั้น $\lambda_1 - \lambda_2 = 144° 58' 30'' - 18° 26'$

$= 126° 32' 30''$

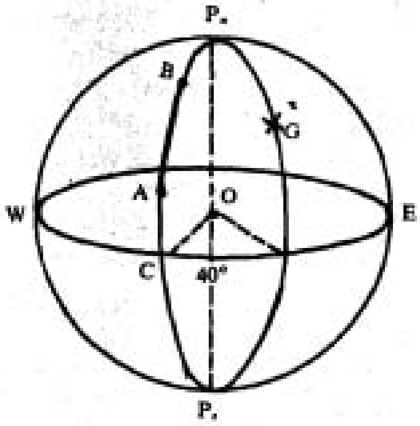
ตัวอย่าง 6.1.3 จงหาระยะทาง (หน่วยเป็นไมล์ทะเล) ระหว่างสถานที่ A กับ B บนพื้นผิวโลก

เมื่อ A มี (ละติจูด 30° 25′ เหนือ, ลองจิจูด 40° ตะวันตก)

และ B มี (ละติจูด 75° 10′ เหนือ, ลองจิจูด 40° ตะวันตก)

วิธีทำ

พิจารณารูป 6.1.5



รูป 6.1.5

ในรูป 6.1.5 ได้ว่า

CA = 30° 25′ เหนือ และ CB = 75° 10′ เหนือ

ดังนั้น AB = CB − CA

= 75° 10′ − 30° 25′

= 44° 45′

= 2685′

จึงได้ว่า ระยะทางระหว่าง A กับ B คือ 2,685 ไมล์ทะเล

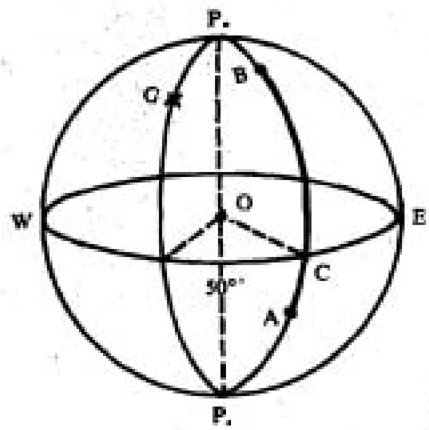
ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาระยะทาง (หน่วยเป็นไมล์ทะเล) ระหว่างสถานที่ A กับ B บนพื้นผิวโลก

เมื่อ A มี (ละติจูด 30° 25′ ใต้, ลองจิจูด 50° ตะวันออก)

และ B มี (ละติจูด 75° 10′ เหนือ, ลองจิจูด 50° ตะวันออก)

วิธีทำ

พิจารณารูป 6.1.6



รูป 6.1.6

ในรูป 6.1.6 ได้ว่า

$CA = 30° 25'$ **ใต้,** และ $CB = 75° 10'$ เหนือ

ดังนั้น
$$\begin{aligned} AB &= CA + CB \\ &= 30° 25' + 75° 10' \\ &= 105° 35' \\ &= 6335' \end{aligned}$$

จึงได้ว่า ระยะทางระหว่าง A กับ B คือ 6,335 ไมล์ทะเล

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงหาผลต่างของลองจิจูดระหว่างสถานที่ต่อไปนี้

1.1) นิวยอร์คกับเพิร์ลฮาเบอร์

1.2) นิวยอร์คกับมอสโคว์

1.3) นิวยอร์คกับซิดนีย์

1.4) ซิดนีย์กับมอสโคว์

เมื่อกำหนดให้

นิวยอร์คมีลองจิจูด 74° 1′ ตะวันตก

เพิร์ลฮาเบอร์มีลองจิจูด 157° 58′ 18″ ตะวันตก

มอสโคว์มีลองจิจูด 37° 34′ 18″ ตะวันออก

และซิดนีย์มีลองจิจูด 151° 13′ ตะวันออก

2. จงหาระยะทาง (หน่วยเป็นไมล์ทะเล) ระหว่างสถานที่ A กับ B บนพื้นผิวโลก เมื่อ

2.1) A มี (ละติจูด 40° 40′ เหนือ, ลองจิจูด 120° ตะวันตก)

และ B มี (ละติจูด 75° 25′ เหนือ, ลองจิจูด 120° ตะวันตก)

2.2) A มี (ละติจูด 50° 20′ เหนือ, ลองจิจูด 80° ตะวันตก)

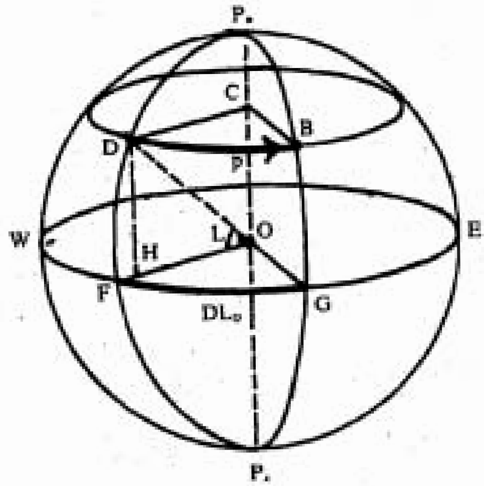
และ B มี (ละติจูด 30° 50′ ใต้, ลองจิจูด 80° ตะวันตก)

2.3) A มี (ละติจูด 10° 30′ ใต้, ลองจิจูด 40° ตะวันออก)

และ B มี (ละติจูด 50° 20′ ใต้, ลองจิจูด 40° ตะวันออก)

6.2 แนวทางและระยะทางของการเดินเรือตามแนวขนานของละติจูด

ในหัวข้อนี้ จะศึกษาถึงการหาแนวทางและระยะทางของการเดินเรือไปทางทิศตะวันออกหรือทิศตะวันตก ตามวงกลมเล็กที่ขนานกับเส้นศูนย์สูตร ซึ่งเราเรียกว่า ตามแนวขนานของละติจูด



รูป 6.2.1

ในรูป 6.2.1 สมมุติว่าเรือลำหนึ่งแล่นไปทางทิศตะวันออก โดยเริ่มต้นจากจุด D แล่นไปเป็นระยะทาง p ไมล์ทะเล ถึงจุด B เนื่องจากเรือลำนี้แล่นไปตามแนวขนานของละติจูด ค่าละติจูดของ B จึงเท่ากับค่าละติจูดของจุดเริ่มต้น D เราต้องการจะทราบค่าลองจิจูดของ B

ให้ค่าผลต่างของลองจิจูดระหว่าง B กับ D ซึ่งเขียนแทนด้วย DL_o นั้น วัดด้วยส่วนโค้ง FG ซึ่งเป็นระยะบนเส้นศูนย์สูตรที่เกิดจากเส้นเมริเดียนที่ผ่านจุด D และ B ตัดกับเส้นศูนย์สูตร ค่าผลต่างของลองจิจูดระหว่าง B กับ D นี้ จะเป็นลองจิจูดตะวันออกหรือตะวันตกนั้นก็เป็นไปตามระยะทางที่เรือแล่น ว่าเป็นทิศตะวันออกหรือทิศตะวันตกแล้วแต่กรณี

ในการหาลองจิจูดของ B นั้น เราจำเป็นต้องเปลี่ยนระยะทางที่เรือแล่นตามส่วนโค้งจาก D ไป B (ซึ่งในที่นี้มีระยะ p ไมล์ทะเล) ให้เป็นค่าลิบดา (มีข้อน่าสังเกตว่า เนื่องจากระยะทางนี้วัดตามแนวขนานของละติจูดหรือตามส่วนโค้งของวงกลมเล็ก ดังนั้นความสัมพันธ์ที่ว่า 1 ไมล์ทะเล = 1 ลิบดา จึงไม่สอดคล้อง)

ในรูป 6.2.1 ลากเส้นเชื่อมจากจุด D และจุด B ไปยังจุด C ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมเล็ก (แนวขนานของละติจูด) และลากเส้นเชื่อมจุด D, F และ G ไปยังจุด O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของ

ทรงกลมโลก และลากเส้น DH ไปตั้งฉากกับ OF จะสังเกตเห็นว่า มุม FOD คือ ค่าละติจูดของ D ซึ่งในที่นี้จะเขียนแทนด้วย L

เนื่องจาก $\angle FOG = \angle DCB$ ดังนั้น ส่วนโค้ง FG กับส่วนโค้ง DB ย่อมเป็นสัดส่วนกับรัศมีของวงกลม คือ OF และ CD ตามลำดับ

ดังนั้น

$$\frac{\text{ส่วนโค้ง FG}}{\text{ส่วนโค้ง DB}} = \frac{OF}{CD} = \frac{OD}{OH} = \sec L$$

ส่วนโค้ง FG = ส่วนโค้ง DB $\times \sec L$

หรือ $DL_o = p \sec L$

นั่นคือ

ผลต่างของลองจิจูด (ลิปดา) = ระยะทางตามแนวขนาน (ไมล์ทะเล) × ซีแคนต์ของละติจูด

ตัวอย่าง 6.2.1 เรือลำหนึ่งแล่นไปตามแนวขนานของละติจูด 44° 30′ ไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทาง 55 ไมล์ทะเล จงหาว่าตำแหน่งที่เรือไปถึงนั้นได้เปลี่ยนค่าลองจิจูดไปเท่าไร?

วิธีทำ

จากรูป 6.2.1 ได้ว่า

P = 55 ไมล์ทะเล ไปทางทิศตะวันออก

$L = 44° 30'$

จาก $DL_o = p \sec L$

ดังนั้น $DL_o = 55 \sec 44° 30'$ ตะวันออก

$= \dfrac{55}{\cos 44° 30'}$ ตะวันออก

$= \dfrac{55}{0.71325}$ ตะวันออก

$= 77.11'$ ตะวันออก

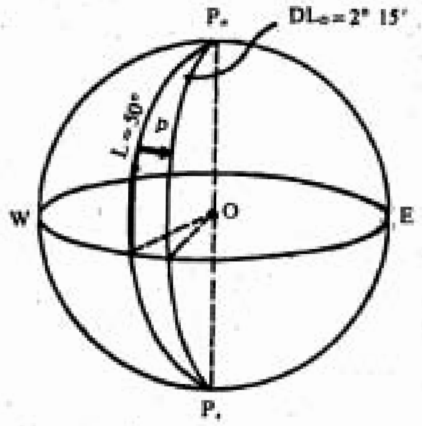
$= 1° 17.11'$ ตะวันออก

นั่นคือ ตำแหน่งที่เรือแล่นไปถึงนั้น ได้เปลี่ยนค่าลองจิจูดไป 1° 17.11′ ตะวันออก

ตัวอย่าง 6.2.2 เรือลำหนึ่งแล่นไปตามแนวขนานของละติจูด 50° เหนือ ไปทางทิศตะวันออกจนกระทั่งค่าลองจิจูดเปลี่ยนไป 2° 15′ จงหาระยะทางตามแนวขนานนั้น

วิธีทำ

พิจารณารูป 6.2.2



รูป 6.2.2

จากรูป 6.2.2 ได้ว่า

$$DL_o = 2° 15'$$
$$= 135' \text{ ตะวันออก}$$

และ $L = 50°$

จาก $DL_o = p \sec L$

ดังนั้น
$$p = DL_o \times \cos L$$
$$= 135 \cos 50°$$
$$= (135)(0.64279)$$
$$= 86.78 \text{ ไมล์ทะเล (ตะวันออก)}$$

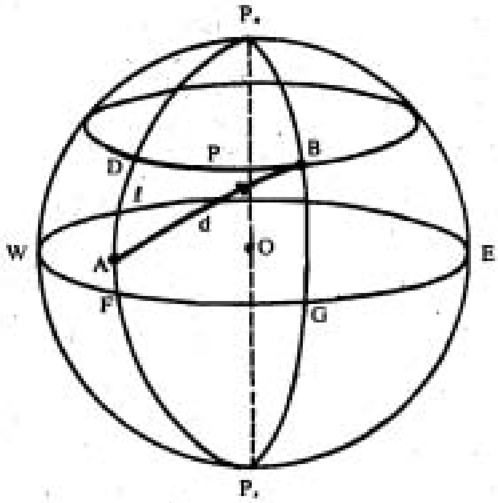
นั่นคือ เรือแล่นไปตามแนวขนานของละติจูด เป็นระยะทาง 86.78 ไมล์ทะเล ทางทิศตะวันออก

แบบฝึกหัด 6.2

1. เรือลำหนึ่งแล่นไปตามแนวขนานของละติจูด 35° เหนือ ไปทางทิศตะวันตกเป็นระยะทาง 180 ไมล์ทะเล จงหาว่าตำแหน่งที่เรือไปถึงนั้นได้เปลี่ยนค่าลองจิจูดไปเท่าไร
2. เรือลำหนึ่งแล่นไปตามแนวขนานของละติจูด 42° เหนือ ไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทาง 220 ไมล์ทะเล จงหาว่าตำแหน่งที่เรือไปถึงมีค่าลองจิจูดเป็นเท่าไร
   ถ้า 2.1) เรือเริ่มต้นออกจากลองจิจูด 140° ตะวันออก
   2.2) เรือเริ่มต้นออกจากลองจิจูด 135° ตะวันตก
3. เรือลำหนึ่งแล่นไปตามแนวขนานของละติจูด 42° เหนือ ไปทางทิศตะวันตก จนกระทั่งค่าลองจิจูดเปลี่ยนไป 5° 45′ จงหาระยะทางตามแนวขนานนั้น
4. เรือลำหนึ่งแล่นไปตามแนวขนานของละติจูด 20° เหนือ ไปทางทิศตะวันออก จนกระทั่งค่าลองจิจูดเปลี่ยนไป 13° 45′ จงหาระยะทางตามแนวขนานนั้น

6.3 แนวทางและระยะทางของการเดินเรือตามแนวราบ

สมมุติว่า เรือลำหนึ่งแล่นไปเป็นระยะทาง d ไมล์ทะเล ตามแนวของวงกลมใหญ่ จาก A ไปยัง B ดังรูป 6.3.1



รูป 6.3.1

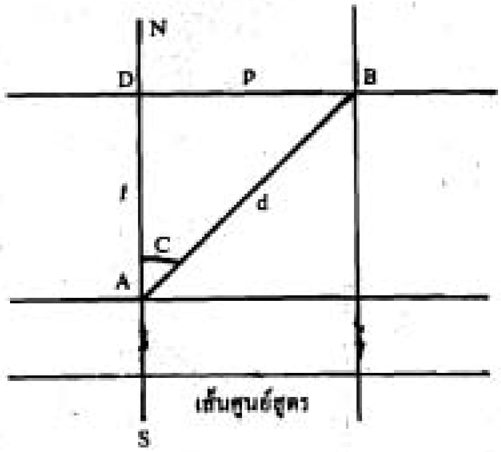
ในรูป 6.3.1 จาก B ลากเส้นขนานของละติจูดไปตัดกับเส้นเมริเดียนที่ผ่าน A ณ. จุด D และให้เส้นเมริเดียนที่ผ่าน A ไปตัดกับเส้นศูนย์สูตรที่ F กับให้เส้นเมริเดียนที่ผ่าน B ไปตัดกับเส้นศูนย์สูตรที่ G แล้วจะได้ว่า

l = ส่วนโค้ง AD เป็นค่าเปลี่ยนแปลงของละติจูดหรือผลต่างของละติจูด

และ p = ส่วนโค้ง DB เป็นระยะทางตามแนวขนาน (ของละติจูด)

การพิจาณาระยะทางบนพื้นผิวโลกโดยปกติถ้าเป็นระยะทางยาว ๆ เราต้องพิจารณาเป็นส่วนโค้ง ทั้งนี้เนื่องจากผิวโลกเป็นทรงกลม แต่ถ้าระยะทางที่ใช้เป็นระยะทางสั้น ๆ เพื่อความสะดวกในการคิดคำนวณ เราจึงมักใช้เป็นระยะทางบนพื้นราบ (plane) ดังนั้น โดยทั่ว ๆ ไป ถ้าระยะทางบนผิวโลกที่จะพิจารณาน้อยกว่า 200 ไมล์ทะเลเราก็จะใช้เป็นระยะทางบนพื้นราบ

ในพื้นราบหรือระนาบ (plane) นี้ เส้นศูนย์สูตรและเส้นขนานของละติจูดจะแทนด้วยเส้นขนานตามแนวนอน ในขณะที่เส้นเมริเดียนซึ่งเป็นเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นศูนย์สูตรนั้น ก็จะแทนด้วยเส้นขนานตามแนวดิ่ง ดังรูป 6.3.2



รูป 6.3.2

ในรูป 6.3.2 จะได้ว่า

NAS เป็นเส้นเมริเดียนที่ผ่านจุด A

และ DB เป็นส่วนหนึ่งของเส้นขนานของละติจูดที่ผ่านจุด B

แล้ว d = AB เป็นระยะทางระหว่าง A กับ B

p = DB เป็นระยะทางตามแนวขนาน (ของละติจูด)

l = AD เป็นค่าเปลี่ยนแปลงของละติจูด (ผลต่างของละติจูด)

และ C = $\angle BAD$ เป็นมุมของแนวทาง (course angle)

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD ซึ่งมี D เป็นมุมฉาก

จะได้ว่า

(1) $l = d \cos C$

(2) $p = d \sin C$

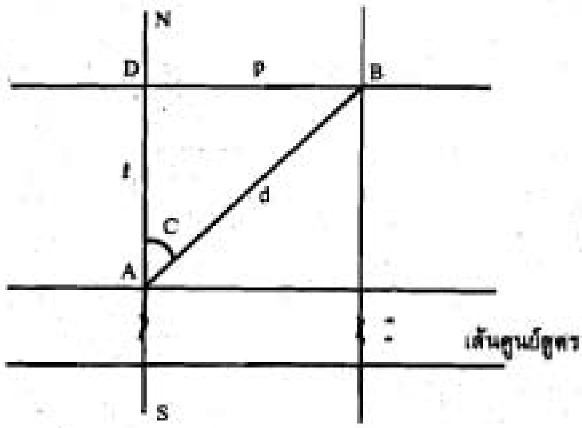
(3) $\tan C = \dfrac{p}{l}$

ค่าเปลี่ยนแปลงของละติจูด จะเป็นค่าเหนือหรือใต้นั้น เป็นไปตาม B ว่าอยู่ทางเหนือหรืออยู่ทางใต้ของ A ในรูป 6.3.2 ได้ว่า ค่าเปลี่ยนแปลงของละติจูด คือ ℓ ไมล์ทะเล เหนือ หรือ ℓ ลิบดา เหนือ, ระยะทางตามแนวขนานละติจูด คือ p ไมล์ทะเลตะวันออก และแนวทาง (ของการเดินเรือ) คือ C° (หรือ เหนือ C° ตะวันออก)

ตัวอย่าง 6.3.1 เรือลำหนึ่งแล่นไปในแนวทาง 30° (หรือ เหนือ 30° ตะวันออก) จากจุด A ซึ่งมี (ละติจูด 45° เหนือ, ลองจิจูด 70° ตะวันตก) ไปเป็นระยะทาง 120 ไมล์ทะเล ถึงจุด B จงหาระยะทางตามแนวขนาน และละติจูดของจุด B

วิธีทำ

พิจารณารูป 6.3.3



รูป 6.3.3

จากรูป 6.3.3 ABD เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมี D เป็นมุมฉาก

โจทย์กำหนดให้ $d = 120, \angle C = 30°$ จึงได้ว่า

$$p = d \sin C$$
$$= 120 \sin 30°$$
$$= 60$$ ไมล์ทะเล ตะวันออก

และ
$$\ell = d \cos C$$
$$= 120 \cos 30°$$
$$= 103.9$$ ไมล์ทะเล เหนือ

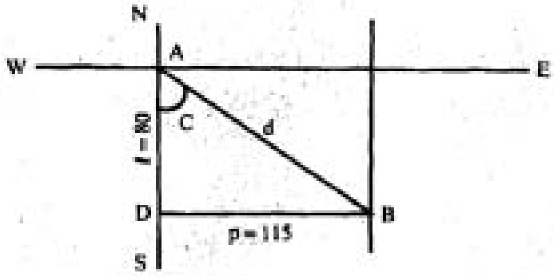
ดังนั้น ค่าเปลี่ยนแปลงของละติจูด คือ $103.9' = 1° 44'$

และค่าละติจูดของ B คือ $45° + 1° 44' = 46° 44'$ เหนือ

ตัวอย่าง 6.3.2 เครื่องบินลำหนึ่งบินจาก A ไป B โดยมีค่าเปลี่ยนแปลงของละติจูด (หรือผลต่างของละติจูด) เป็น ℓ = 80 ไมล์ทะเล ได้ และมีระยะทางตามแนวขนานเป็น 115 ไมล์ทะเล ตะวันออก จงหาแนวทางและระยะทางของเครื่องบิน ในการบินครั้งนี้

วิธีทำ

พิจารณารูป 6.3.4



รูป 6.3.4

จากรูป 6.3.4 ABD เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี D เป็นมุมฉาก และโจทย์กำหนดให้ $p = 115$, $\ell = 80$

จาก $\quad \tan C = \dfrac{p}{\ell}$

$$= \frac{115}{80}$$

$$= 1.4375$$

ดังนั้น $\quad \angle C = 55^\circ\ 11'$

จึงกล่าวได้ว่า แนวทางของการบินเป็นมุม ใต้ $55^\circ\ 11'$ ตะวันออก หรือเป็นมุม $180^\circ - 55^\circ\ 11'$ $= 124^\circ\ 49'$ หรือเหนือ $124^\circ\ 49'$ ตะวันออก

และ จาก $\quad d = \dfrac{\ell}{\cos C}$

$$= \frac{80}{\cos 55^\circ\ 11'}$$

$$= 140.1 \text{ ไมล์ทะเล}$$

จึงได้ว่า เครื่องบินบินไปเป็นระยะทาง 140.1 ไมล์ทะเล

แบบฝึกหัด 6.3

1. เรือลำหนึ่งแล่นไปในแนวทาง 245° 10′ (หรือ ใต้ 65° 10′ ตะวันตก) จากซานฟรานซิสโก ซึ่งมีละติจูด 37° 50′ เหนือ ไปเป็นระยะทาง 150 ไมล์ทะเล จงหาระยะทางตามแนวขนานของเรือ และค่าละติจูดของจุดที่เรือแล่นไปถึง

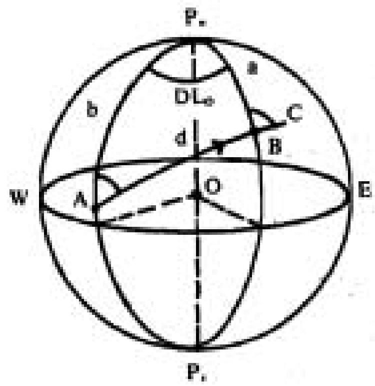
2. เรือลำหนึ่งแล่นไปเป็นระยะทาง 125 ไมล์ทะเล ในแนวทาง 42° 40′ จากจุด A ซึ่งมีละติจูด 40° เหนือ จงหาระยะทางตามแนวขนาน และค่าละติจูดของจุดที่เรือไปถึง

3. เรือลำหนึ่งแล่นไปในแนวทาง 160° จากจุด A ซึ่งมีละติจูด 52° 20′ ใต้ ไปยังจุด B ซึ่งมีละติจูด 56° 40′ ใต้ จงหาระยะทางของการเดินเรือจาก A ไป B และระยะทางตามแนวขนานของเรือ

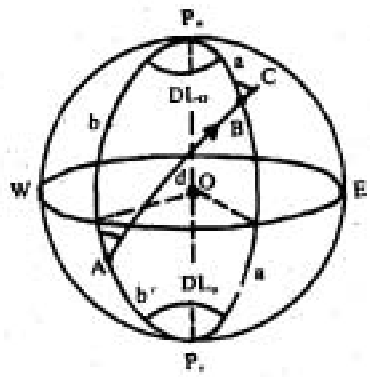
4. ถ้า B เป็นจุดที่อยู่ทาง 125 ไมล์ทะเล ตะวันตก และ 90 ไมล์ทะเล เหนือ ของจุด A แล้ว จงหาระยะทางจาก A ถึง B และแนวทางในการเดินเรือจาก A ไปยัง B

6.4 แนวทางและระยะทางของการเดินเรือตามแนววงกลมใหญ่

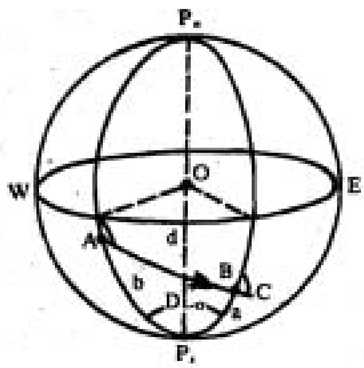
ในการเดินเรือตามแนวของวงกลมใหญ่จากจุด A ถึงจุด B ดังรูป 6.4.1, รูป 6.4.2 และรูป 6.4.3 เป็นการเดินเรือตามแนวของส่วนที่สั้นกว่าของวงกลมใหญ่ จาก A ถึง B ปัญหาพื้นฐานของการเดินเรือตามแนวของวงกลมใหญ่ ก็คือ การหาระยะทางจาก A ถึง B และการหาทิศทางของการเดินทางที่จุดใด ๆ



รูป 6.4.1



รูป 6.4.2



รูป 6.4.3

ปัญหาของการเดินเรือตามแนวของวงกลมใหญ่นี้ จำเป็นต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (โดยปกติมักจะเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง) มาช่วยแก้ปัญหา โดยสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมนี้จะมีขั้วเหนือหรือขั้วใต้ขั้วใดขั้วหนึ่งเป็นจุดยอด โดยถ้าจุด A และ B อยู่ในครึ่งทรงกลมเดียวกันแล้ว จะใช้จุดขั้วของครึ่งทรงกลมนั้นเป็นจุดยอด แต่ถ้า A กับ B อยู่คนละครึ่งทรงกลมแล้ว อาจจะใช้ขั้วใดขั้วหนึ่งเป็นจุดยอดก็ได้

ในรูป 6.4.1 จุด A และจุด B อยู่ในครึ่งทรงกลมเหนือทั้งคู่ โดยในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_nB มีส่วนต่าง ๆ ดังนี้

b = ส่วนโค้ง AP_n = 90° − ละติจูด A

a = ส่วนโค้ง BP_n = 90° − ละติจูด B

และ DL_o = $\angle AP_nB$ = ผลต่างระหว่างลองจิจูด A กับ B

ในรูป 6.4.2 จุด A อยู่ในครึ่งทรงกลมใต้ และจุด B อยู่ในครึ่งทรงกลมเหนือ โดยในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_nB มีส่วนต่าง ๆ ดังนี้

b = ส่วนโค้ง AP_n = 90° + ละติจูด A

a = ส่วนโค้ง BP_n = 90° − ละติจูด B

และ DL_o = $\angle AP_nB$ = ผลต่างระหว่างลองจิจูด A กับ B

ในขณะที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_sB มีส่วนต่าง ๆ ดังนี้

b′ = ส่วนโค้ง AP_s = 90° − ละติจูด A

a′ = ส่วนโค้ง BP_s = 90° + ละติจูด B

และ DL_o = $\angle AP_sB$ = ผลต่างระหว่างลองจิจูด A กับ B

ในรูป 6.4.3 จุด A และจุด B อยู่ในครึ่งทรงกลมใต้ทั้งคู่ โดยในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_sB มีส่วนต่าง ๆ ดังนี้

b = ส่วนโค้ง AP_s = 90° − ละติจูด A

a = ส่วนโค้ง BP_s = 90° − ละติจูด B

และ DL_o = $\angle AP_sB$ = ผลต่างระหว่างลองจิจูด A กับ B

โดยในแต่ละรูป (รูป 6.4.1, รูป 6.4.2 และรูป 6.4.3) มี

d = ส่วนโค้ง AB = ระยะบนวงกลมใหญ่ระหว่าง A กับ B

$\angle P_nAB$ = แนวทางเริ่มต้น

และ $\angle P_nBC$ = แนวทางขณะถึง

ตัวอย่าง 6.4.1 เรือลำหนึ่งแล่นไปตามแนววงกลมใหญ่ จากท่าเรือดัทช์ (Dutch Harbor) ซึ่งมี (ละติจูด 53° 53′ เหนือ, ลองจิจูด 166° 35′ ตะวันตก) ไปยังเมลเบอร์น (Melbourne) ซึ่งมี (ละติจูด 37° 50′ ใต้, ลองจิจูด 144° 59′ ตะวันออก)

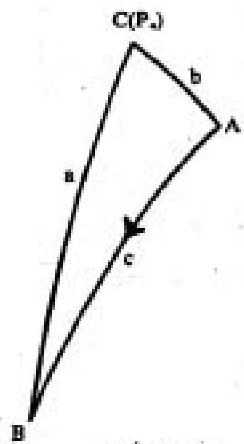
1) จงหาระยะทาง, แนวทางเริ่มต้น และแนวทางขณะถึง

2) จงหาจุดตัดของเส้นทางเดินเรือกับเส้นศูนย์สูตร, จงหาแนวทางที่จุดตัดนี้ และจงหาระยะทางระหว่างจุดตัดนี้กับท่าเรือดัทช์

3) จงหาจุดบนเส้นทางเดินเรือ ในขณะที่เรือมีค่าลองจิจูด 180°, จงหาแนวทางที่จุดนี้ และจงหาระยะทางระหว่างจุดนี้กับท่าเรือดัทช์

วิธีทำ

1) ในรูป 6.4.4 A คือท่าเรือดัทช์ และ B คือเมลเบอร์น



รูป 6.4.4

แล้ว $b = 90° - $ ละติจูด A

$= 90° - 53° 53'$

$= 36° 7'$

$a = 90° + $ ละติจูด B

$= 90° + 37° 50'$

$= 127° 50'$

และ $C = $ ผลต่างระหว่างลองจิจูดของ A กับ B

$= 360° - (166° 35' + 144° 59')$

$= 48° 26'$

ดังนั้น จากรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เราต้องการหา A, B และ c ซึ่งหาได้โดยใช้สูตรการอุปมานของเนเปียร์ คือ

$$\tan\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C \qquad \text{..........(1)}$$

$$\tan\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C \qquad \text{..........(2)}$$

และ

$$\tan\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a-b) \qquad \text{..........(3)}$$

โดย A, B หาได้จาก (1), (2) และ c หาได้จาก (3)

จาก (1) ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\tan\frac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cot\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C \\
&= \frac{(\cos 45^\circ\ 51'\ 30'')}{(\cos 81^\circ\ 58'\ 30'')}(\cot 24^\circ\ 13') \\
&= \frac{(0.69644)}{(0.13961)}(2.2234) \\
&= 11.09136 \\
\therefore\quad \frac{1}{2}(A+B) &= \tan^{-1}(11.09136) \\
&= 84^\circ\ 50'\ 53'' \qquad \text{..........(4)}
\end{aligned}$$

จาก (2) ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\tan\frac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C \\
&= \frac{(\sin 45^\circ\ 51'\ 30'')}{(\sin 81^\circ\ 58'\ 30'')}(\cot 24^\circ\ 13')
\end{aligned}$$

$$= \frac{(0.71762)}{(0.99021)}(2.2234)$$

$$= 1.61133$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(A-B) = \tan^{-1}(1.61133)$$

$$= 58^\circ\ 10'\ 32'' \qquad \text{..........(5)}$$

(4) + (5) ได้ $\quad A = 143^\circ\ 1'\ 22''$

(4) − (5) ได้ $\quad B = 26^\circ\ 40'\ 21''$

จาก (3) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a-b)$$

$$= \frac{(\sin 84^\circ\ 50'\ 51'')}{(\sin 58^\circ\ 10'\ 30'')}(\tan 45^\circ\ 51'\ 30'')$$

$$= \frac{(0.99596)}{(0.84966)}(1.0304)$$

$$= 1.2078$$

$$\frac{1}{2}c = \tan^{-1}(1.2078)$$

$$= 50^\circ\ 22'\ 34''$$

$$\therefore \quad c = 100^\circ\ 45'\ 8''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(i) ระยะทางที่ต้องการคือ 100° 45′ 8″ = 6045.13 ไมล์ทะเล

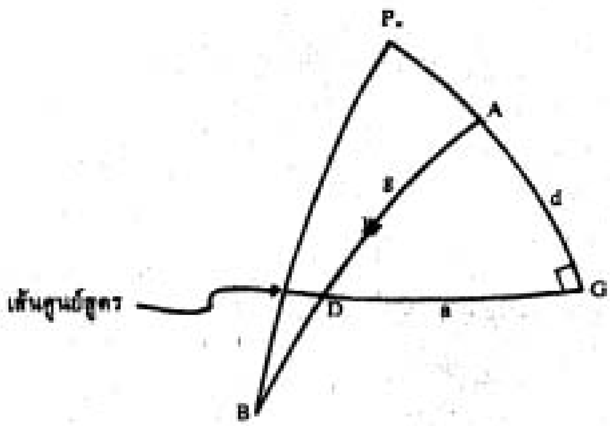
(ii) แนวทางเริ่มต้น คือ

360° − 143° 1′ 22″ = 216° 58′ 38″ หรือเหนือ 216° 58′ 38″ ตะวันออก

(iii) แนวทางขณะถึง คือ

180° + 26° 40′ 21″ = 206° 40′ 21″ หรือเหนือ 206° 40′ 21″ ตะวันออก

2) ในรูป 6.4.5 A คือ ท่าเรือดัชท์ B คือ เมลเบอร์น



รูป 6.4.5

และให้ D เป็นจุดตัดของเส้นทางเดินเรือกับเส้นศูนย์สูตร, G เป็นจุดตัดของเส้นเมริเดียนที่ผ่าน A กับเส้นศูนย์สูตร

พิจารณารูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AGD ซึ่งมี $G = 90°$ และ

$$d = \text{ส่วนโค้ง } GA = 53° 53'$$

$$A = \angle DAG = 180° - 143° 1' 22''$$

$$= 36° 58' 38''$$

ต้องการหา a, D และ g

โดยกฎของเนเปียร์ จะได้ว่า

$$\tan a = \sin d \tan A \qquad \text{..........(6)}$$

$$\cos D = \cos d \sin A \qquad \text{..........(7)}$$

$$\tan g = \frac{\tan d}{\cos A} \qquad \text{..........(8)}$$

จาก (6) ได้ว่า

$$\tan a = \sin 53° 53' \tan 36° 58' 38''$$

$$= (0.80782)(0.75293)$$

$$= 0.60823$$

$$\therefore \quad a = \tan^{-1}(0.60823)$$

$$= 31° 18' 33''$$

จาก (7) ได้ว่า

$$\cos D = \cos d \sin A$$
$$= (\cos 53° 53')(\sin 36° 58' 38'')$$
$$= (0.58943)(0.60149)$$
$$= 0.35453$$
$$\therefore \quad D = \cos^{-1}(0.35453)$$
$$= 69° 14' 7''$$

จาก (8) ได้ว่า

$$\tan g = \frac{\tan d}{\cos A}$$
$$= \frac{\tan 53° 53'}{\cos 36° 58' 38''}$$
$$= \frac{1.3705}{0.79888}$$
$$= 1.7155$$
$$\therefore \quad g = \tan^{-1}(1.7155)$$
$$= 59° 45' 40''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(i) จุดตัดของเส้นทางเดินเรือกับเส้นศูนย์สูตร (หรือจุด D) มีค่าลองจิจูดเท่ากับ 166° 35' + 31° 18' 33" = 197° 53' 33" ตะวันตก = 360° – 197° 53' 33" ตะวันออก หรือ 162° 6' 27" ตะวันออก

นั่นคือ จุดตัดของเส้นทางเดินเรือกับเส้นศูนย์สูตร มีค่าลองจิจูดเท่ากับ 197° 53' 33" ตะวันตก หรือ 162° 6' 27" ตะวันออก

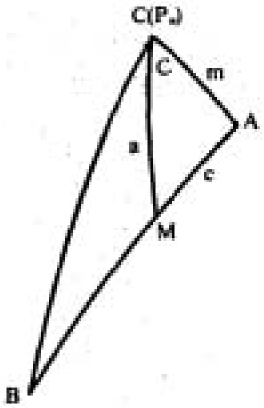
(ii) แนวทางที่จุดตัด D คือ 180°+20° 45' 53" = 200° 45' 53"

นั่นคือ แนวทางที่จุด D คือ 200° 45° 53"

(iii) ระยะทางระหว่างจุด D กับท่าเรือดัชท์ (A) คือ ค่า g = 59° 45' 40" = 3585.66' = 3585.66 ไมล์ทะเล

นั่นคือ ระยะทางระหว่างจุด D กับท่าเรือดัชท์ คือ 3585.66 ไมล์ทะเล

3) ในรูป 6.4.6 ให้ A เป็นท่าเรือดัชท์ B คือ เมลเบอร์น และ M เป็นจุดบนเส้นทางเดินเรือที่มีค่าลองจิจูด 180°



รูป 6.4.6

พิจารณาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AMC

ซึ่งมี $C = 180° - 166° 35' = 13° 25'$

$A = 143° 1' 22''$

และ $m = 90° - 53° 53' = 36° 7'$

ในที่นี้ ต้องการหา a, c, M

โดยสูตรการอุปมานของเนเปียร์ จะได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(a+c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}\tan\frac{1}{2}m \qquad \text{..........(9)}$$

$$\tan\frac{1}{2}(a-c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}(A+C)}\tan\frac{1}{2}m \qquad \text{..........(10)}$$

และ

$$\cot\frac{1}{2}M = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+c)}{\sin\frac{1}{2}(a-c)}\tan\frac{1}{2}(A-C) \qquad \text{..........(11)}$$

โดย a, c หาได้จาก (9), (10) และ M หาได้จาก (11)

จาก (9) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(a+c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}\tan\frac{1}{2}m$$

$$= \frac{\cos 64°\ 48'\ 11''}{\cos 78°\ 13'\ 11''}\tan 18°\ 3'\ 30''$$

$$= \frac{0.42570}{0.20416}(0.32604)$$

$$= 0.67983$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(a+c) = \tan^{-1}(0.67983)$$

$$= 34°\ 12'\ 33'' \qquad \text{..........(12)}$$

จาก (10) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(a-c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}(A+C)}\tan\frac{1}{2}m$$

$$= \frac{\sin 64°\ 48'\ 11''}{\sin 78°\ 13'\ 11''}\tan 18°\ 3'\ 30''$$

$$= \frac{0.90485}{0.97894}(0.32604)$$

$$= 0.30136$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(a-c) = \tan^{-1}(0.30136)$$

$$= 16°\ 46'\ 15'' \qquad \text{..........(13)}$$

(12) + (13) ได้

$$a = 50°\ 58'\ 48''$$

(12) − (13) ได้

$$c = 17°\ 26'\ 18''$$

จาก (11) ได้ว่า

$$\cot\frac{1}{2}M = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+c)}{\sin\frac{1}{2}(a-c)}\tan\frac{1}{2}(A-C)$$

$$= \frac{\sin 34^\circ 12' 33''}{\sin 16^\circ 46' 15''} (\tan 64^\circ 48' 11'')$$

$$= \frac{0.56221}{0.28853} (2.1254)$$

$$= 4.1414$$

$$\frac{1}{2} M = \cot^{-1} (4.1414)$$

$$= 13^\circ 34' 30''$$

$$\therefore \quad M = 27^\circ 9'$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

(i) ละติจูดของจุด M ซึ่งเป็นจุดบนเส้นทางเดินเรือที่ต้องการคือ $(90^\circ - a)$ เหนือ $= 90^\circ - 50^\circ 58' 48''$ เหนือ $= 39^\circ 1' 12''$ เหนือ

(ii) แนวทางที่จุด M คือ $180^\circ + 27^\circ 9' = 207^\circ 9'$

(iii) ระยะทางระหว่างจุด M กับท่าเรือดัชท์ (A) คือ $17^\circ 26' 18'' = 1046.3' = 1046.3$ ไมล์ทะเล

แบบฝึกหัด 6.4

1. จงหาระยะทาง, แนวทางเริ่มต้น และแนวทางขณะถึง ในการเดินทางจากโฮโนลูลู ซึ่งมี (ละติจูด 21° 18′ 18″ เหนือ, ลองจิจูด 157° 52′ 18″ ตะวันตก) ไปยังซานฟรานซิสโก ซึ่งมี (ละติจูด 37° 47′ 30″ เหนือ, ลองจิจูด 122° 25′ 42″ ตะวันตก)

2. เรือลำหนึ่งแล่นออกจากนิวยอร์ค ซึ่งมี (ละติจูด 40° 48′ 36″ เหนือ, ลองจิจูด 73° 57′ 30″ ตะวันตก) ไปตามวงกลมใหญ่ด้วยแนวทางเริ่มต้น 36°
   2.1) จงหาละติจูดและลองจิจูดของตำแหน่งที่เรือเดินทางไปได้ 500 ไมล์ทะเล
   2.2) จงบอกจุดเหนือสุด (northern-most point) ของเส้นทางเดินเรือ

3. จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง
   3.1) ชิคาโก ซึ่งมี (ละติจูด 41° 50′ เหนือ, ลองจิจูด 87° 37′ ตะวันตก) กับท่าเรือดัชท์ ซึ่งมี (ละติจูด 53° 54′ เหนือ, ลองจิจูด 166° 30′ ตะวันตก)
   3.2) นิวยอร์ค ซึ่งมี (ละติจูด 40° 43′ เหนือ, ลองจิจูด 74° ตะวันตก) กับริโอเดจาเนโร ซึ่งมี (ละติจูด 22° 54′ ใต้, ลองจิจูด 43° 11′ ตะวันตก)
   3.3) ท่าเรือดัชท์กับริโอเดจาเนโร

4. จงหาระยะทางตามแนววงกลมใหญ่, แนวทางเริ่มต้น และแนวทางขณะถึง ในการเดินทางจากวอชิงตัน ซึ่งมี (ละติจูด 38° 55′ เหนือ, ลองจิจูด 77° 4′ ตะวันตก) ไปยังมอสโคว์ ซึ่งมี (ละติจูด 55° 45′ เหนือ, ลองจิจูด 37° 34′ ตะวันออก)

5. จงหาระยะทางตามแนววงกลมใหญ่, แนวทางเริ่มต้น และแนวทางขณะถึง ในการเดินทางจากกัลกัตตา ซึ่งมี (ละติจูด 22° 35′ เหนือ, ลองจิจูด 88° 27′ ตะวันออก) ไปยังเมลเบอร์น ซึ่งมี (ละติจูด 37° 48′ ใต้, ลองจิจูด 144° 58′ ตะวันออก)

6. จงหาตำแหน่งของเรือในโจทย์ข้อ 5. เมื่อเรือแล่นผ่านเส้นศูนย์สูตร และจงหาระยะทางจากจุดที่เรือแล่นผ่านเส้นศูนย์สูตรกับกัลกัตตา

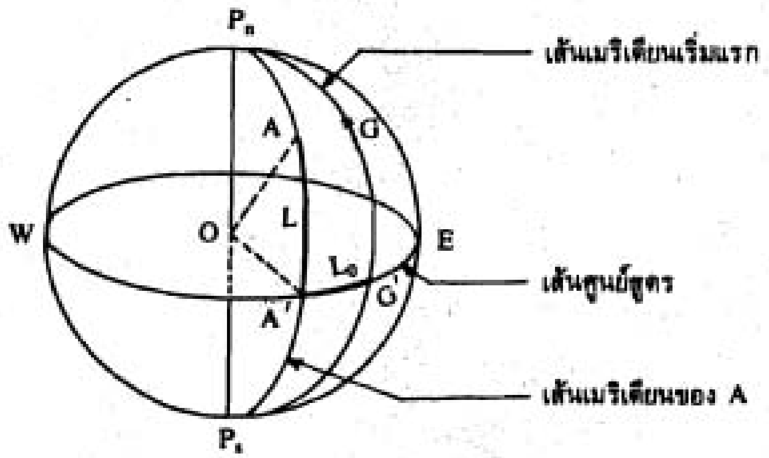
7. เครื่องบินลำหนึ่งบินจากโฮโนลูลู ซึ่งมี (ละติจูด 21° 18′ เหนือ, ลองจิจูด 157° 52′ ตะวันตก) ด้วยแนวทาง 40° 43′
   7.1) จงหาจุดบนเส้นทางการบินที่อยู่ใกล้ขั้วโลกเหนือมากที่สุด
   7.2) จงหาตำแหน่งบนเส้นทางการบิน เมื่อมีค่าลองจิจูดเป็น 74° ตะวันตก

บทสรุป บทประยุกต์เกี่ยวกับแนวทางและระยะทางบนทรงกลมโลก

6.1 ลักษณะของทรงกลมโลกและสามเหลี่ยมโลก

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว โลกเรามีรูปร่างลักษณะค่อนข้างใกล้เคียงกับรูปทรงรี (ellipsoid) ดังนั้น สำหรับงานที่ต้องการความถูกต้องสูงแล้วในการคิดคำนวณจะใช้รูปทรงรี แต่สำหรับงานที่ต้องการความถูกต้องไม่สูงมากนัก แล้วในการคิดคำนวณมักจะพิจารณาให้โลกเป็นทรงกลม เพื่อว่าการแก้ปัญหาหรือการคิดคำนวณงานนั้น ๆ จะสามารถนำเอาความรู้เกี่ยววิชาตรีโกณมิติเชิงทรงกลม (spherical trigonometry) มาช่วยแก้ปัญหาได้ ทรงกลมที่ใช้แทนโลกนั้น เราเรียกว่า ทรงกลมโลก (terrestrial sphere) ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวประมาณ 7,917 ไมล์

โดยปกติโลกหมุนรอบเส้นผ่านศูนย์กลาง ซึ่งเราเรียกเส้นผ่านศูนย์กลางนี้ว่า แกน (axis) ของโลก แกนของโลกนี้จะตัดผิวโลกที่จุด 2 จุด จุดหนึ่งเรียกว่า ขั้วโลกเหนือ (north pole) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย P_n และอีกจุดหนึ่งเรียกว่า ขั้วโลกใต้ (south pole) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย P_s ดังรูป 6.1.1



รูป 6.1.1

เส้นศูนย์สูตร (equator) คือ วงกลมใหญ่บนโลก ซึ่งระนาบของวงกลมใหญ่นั้นตั้งฉากกับแกนของโลก หรืออาจให้ความหมายได้อีกแบบหนึ่งว่า เส้นศูนย์สูตรก็คือ วงกลมใหญ่ที่มี P_n และ P_s เป็นขั้วนั่นเอง

เส้นเมริเดียน (meridian) คือ ครึ่งวงกลมใหญ่ที่ผ่านขั้วโลกทั้งสอง โดยมีขั้วโลกทั้งสองเป็นจุดตั้งต้นและจุดสิ้นสุด นั่นคือ สำหรับจุด A ใด ๆ บนผิวโลกที่ไม่ใช่จุดขั้ว เราจะเรียกครึ่งวงกลม P_nAP_S ว่า เส้นเมริเดียนของ A (ดูรูป 6.1.1)

เส้นเมริเดียนเริ่มแรก (first or prime meridian) คือ เส้นเมริเดียนที่ผ่านหอดูดาวที่กรีนิช (Greenwich) ประเทศอังกฤษ จากรูป 6.1.1 คือ เส้นเมริเดียนของ G หรือเส้น P_nGP_s ก็คือเส้นเมริเดียนเริ่มแรกนั่นเอง

เนื่องจากเส้นเมริเดียนตัดกับเส้นศูนย์สูตรเป็นมุมฉาก ดังนั้น ระยะเชิงมุมของจุด (angular distance of points) บนผิวโลกจากเส้นศูนย์สูตร สามารถวัดได้ด้วยความยาวตามเส้นเมริเดียนนั่นเอง

ละติจูด (latitude) ของจุดใด ๆ บนผิวโลก คือ ระยะเชิงมุมจากเส้นศูนย์สูตร ไปตามเส้นเมริเดียนจนถึงจุดนั้น มักเขียนแทนด้วย L ในรูป 6.1.1 ละติจูดของ A ก็คือมุม $A'0A$ หรือส่วนโค้ง $A'A$ ของเส้นเมริเดียนของ A ละติจูดของจุดแบ่งออกเป็นละติจูดเหนือ (north latitude) กับละติจูดใต้ (south latitude) ซึ่งขึ้นอยู่กับว่าจุดที่กล่าวถึงนั้นอยู่ในครึ่งทรงกลมส่วนที่อยู่เหนือเส้นศูนย์สูตรเหนือใต้เส้นศูนย์สูตร โดยทั่ว ๆ ไปค่าละติจูดเหนือให้มีค่าเป็นจำนวนบวก และค่าละติจูดใต้ให้มีค่าเป็นจำนวนลบ หรืออาจจะใช้วิธีระบุคำว่า เหนือหรือใต้ ก็ได้ เช่นใช้ 50° เหนือ แทน 50° และใช้ 50° ใต้ แทน -50° เป็นต้น

ผลต่างระหว่างละติจูด L_1 กับ L_2 $(L_1 > L_2)$ ตามลำดับ ก็คือค่า $L_1 - L_2$ ถ้าจุดทั้งสองนั้นอยู่บนครึ่งทรงกลมเดียวกัน แต่ถ้าจุดทั้งสองนั้นอยู่ต่างครึ่งทรงกลมกันแล้ว ค่าผลต่างนั้นคือ $L_1 + L_2$

วงกลมเล็กที่ขนานกับเส้นศูนย์สูตร เราเรียกว่า แนวขนานของละติจูด หรือ แนวขนาน (parallels of latitude or parallel) จุดทุก ๆ จุดบนแนวขนานเดียวกัน ย่อมมีค่าละติจูดเท่ากัน

ลองจิจูด (longitude) ของจุดใด ๆ บนผิวโลก ก็คือ มุมทรงกลมที่ขั้วโลกระหว่างเส้นเมริเดียนที่ผ่านจุดนั้น กับเส้นเมริเดียนเริ่มแรก มักเขียนแทนด้วย λ ค่าลองจิจูดของจุดใด ๆ อาจวัดไปทางทิศตะวันออกหรือทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนเริ่มแรก แล้วแต่ว่าจุด ๆ นั้นอยู่ทางทิศตะวันออกหรือทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนเริ่มแรก ตามแต่กรณี โดยมีค่าระหว่าง 0° ถึง 180° ในรูป 6.1.1 ลองจิจูด A ก็คือ มุมเชิงทรงกลม $G'P_nA'$ หรือก็คือส่วนโค้ง $G'A'$ นั่นเอง

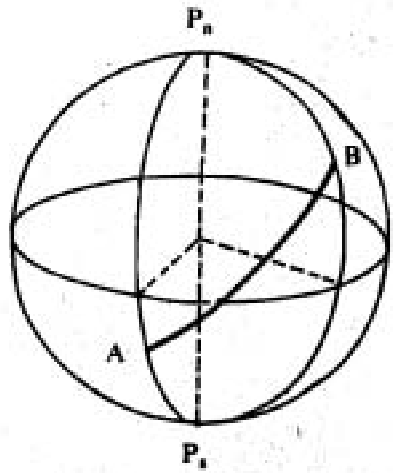
ผลต่างระหว่างลองจิจูด λ_1 กับ λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$ ตามลำดับ ก็คือค่า $\lambda_1 - \lambda_2$ ถ้าจุดทั้งสอง

อยู่ห่างจากเส้นเมริเดียนเริ่มแรกไปในทิศทางเดียวกัน แต่ถ้าจุดทั้งสองอยู่ห่างจากเส้นเมริเดียนเริ่มแรกไปในทิศทางตรงกันข้ามแล้ว ค่าผลต่างนั้นก็คือ ค่าที่น้อยกว่าระหว่าง $\lambda_1+\lambda_2$ กับค่า $360° - (\lambda_1+\lambda_2)$ (ค่าใดน้อยกว่า ก็นำค่านั้นมาใช้)

อนึ่ง เส้นศูนย์สูตรและเส้นเมริเดียนเริ่มแรก เปรียบเสมือนแกนโคออร์ดิเนต 2 แกน ที่อยู่บนพื้นผิวโลก โดยเส้นศูนย์สูตรเปรียบเสมือนแกน X และเส้นเมริเดียนเริ่มแรก เปรียบเสมือนแกน Y ของระบบโคออร์ดิเนตพิกัดฉากในระนาบ ดังนั้น ค่าละติจูดและค่าลองจิจูดของจุด A ก็คือ โคออร์ดิเนตของจุด A ที่สอดคล้องกับแกนเส้นศูนย์สูตรและแกนเส้นเมริเดียนเริ่มแรก โดยค่าละติจูดเปรียบเสมือนกับค่าโคออร์ดิเนต y และค่าลองจิจูดก็เปรียบเสมือนกับค่าโคออร์ดิเนต x การกำหนดละติจูดเหนือและละติจูดใต้ ลองจิจูดตะวันออกและลองจิจูดตะวันตกก็สมนัยกับเครื่องหมายบวกและเครื่องหมายลบของค่าโคออร์ดิเนตของจุดในระนาบ เช่น

จุดที่มีลองจิจูด a° ตะวันออก และละติจูด b° เหนือ ก็เปรียบเสมือนจุด (a, b) ในระนาบ
จุดที่มีลองจิจูด a° ตะวันตก และละติจูด b° เหนือ ก็เปรียบเสมือนจุด (−a, b) ในระนาบ
จุดที่มีลองจิจูด a° ตะวันตก และละติจูด b° ใต้ ก็เปรียบเสมือนจุด (−a, −b) ในระนาบ
และจุดที่มีลองจิจูด a° ตะวันออก และละติจูด b° ใต้ ก็เปรียบเสมือนจุด (a, −b) ในระนาบ

สามเหลี่ยมโลก (terrestrial triangle) เส้นเมริเดียนที่ผ่านจุด 2 จุด บนพื้นผิวโลก และส่วนโค้งที่สั้นกว่าของวงกลมใหญ่ที่เชื่อมจุดทั้งสองนั้น จะทำให้เกิดสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม 2 รูป ดังรูป 6.1.2



รูป 6.1.2

จากรูป 6.1.2 ได้ว่า เส้นเมริเดียนที่ผ่านจุด A กับเส้นเมริเดียนที่ผ่านจุด B และส่วนโค้งที่สั้นกว่าของวงกลมใหญ่ที่เชื่อมระหว่าง A กับ B (คือ ส่วนโค้ง AB) ทำให้เกิดสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม 2 รูป คือ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_nB กับ AP_sB สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_nB นี้ มีชื่อเฉพาะเรียกว่า สามเหลี่ยมโลก (terrestrial triangle) ซึ่งสามเหลี่ยมโลกนี้จะนำไปใช้หาระยะทาง (distance) ระหว่างจุดตามแนววงกลมใหญ่ (ความยาวของส่วนโค้ง AB) ซึ่งปกติมักกำหนดให้อยู่ในรูป "ไมล์ทะเล" (nautical miles) โดย

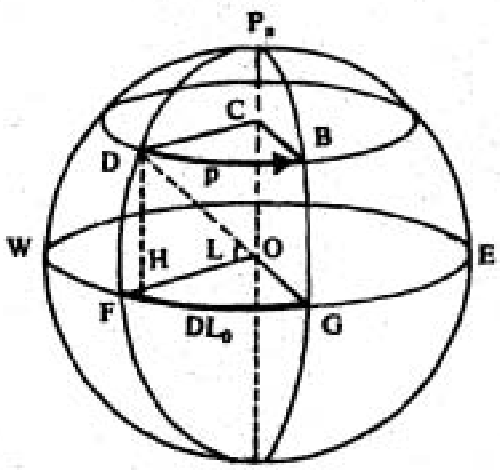
1 ลิปดาของส่วนโค้งวงกลมใหญ่ = 1 ไมล์ทะเล

= 6,080. ฟุต

อนึ่ง ถ้าเรือเคลื่อนที่ไปตามวงกลมใหญ่ระหว่างจุด 2 จุดแล้ว แนวทางของเรือ ก็คือมุมระหว่างเส้นเมริเดียนของเรือกับวงกลมใหญ่นั้น โดยปกติแนวทางจะวัดจากทิศเหนือไปทางทิศตะวันออก (วัดตามเข็มนาฬิกา)

6.2 แนวทางและระยะทางของการเดินเรือตามแนวขนานของละติจูด

ในหัวข้อนี้จะศึกษาถึงการหาแนวทางและระยะทางของการเดินเรือไปทางทิศตะวันออกหรือทิศตะวันตก ตามวงกลมเล็กที่ขนานกับเส้นศูนย์สูตร ซึ่งเราเรียกว่า ตามแนวขนานของละติจูด



รูป 6.2.1

ในรูป 6.2.1 สมมติว่า เรือลำหนึ่งแล่นไปทางทิศตะวันออก โดยเริ่มต้นจากจุด D แล่นไปเป็นระยะทาง p ไมล์ทะเล ถึงจุด B เนื่องจากเรือลำนี้แล่นไปตามแนวขนานของละติจูด ค่าละติจูดของ B จึงเท่ากับค่าละติจูดของจุดเริ่มต้น D เราต้องการจะทราบค่าลองจิจูดของ B

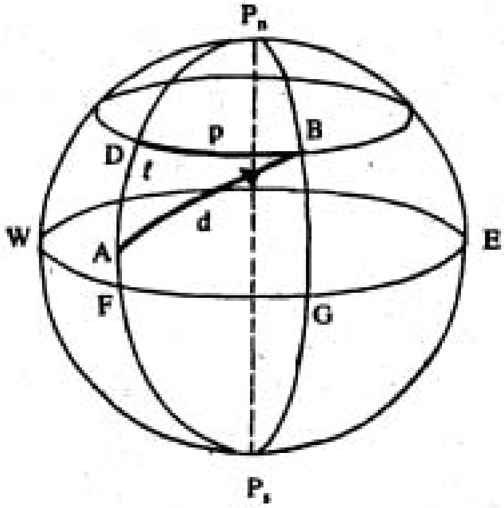
ค่าผลต่างของลองจิจูดระหว่าง B กับ D ซึ่งเขียนแทนด้วย DL_o นั้น วัดได้ด้วยส่วนโค้ง FG ซึ่งเป็นระยะบนเส้นศูนย์สูตรที่เกิดจากเส้นเมริเดียนที่ผ่านจุด D และ B ตัดกับเส้นศูนย์สูตร ซึ่งจะได้ว่า

$$DL_o = p \sec L$$

หรือ ผลต่างของลองจิจูด (ลิปดา) = ระยะทางตามแนวขนาน (ไมล์ทะเล) × เซแคนต์ของละติจูด

6.3 แนวทางและระยะทางของการเดินเรือตามแนวราบ

สมมติว่าเรือลำหนึ่งแล่นไปเป็นระยะทาง d ไมล์ทะเล ตามแนวของวงกลมใหญ่ จาก A ไปยัง B ดังรูป 6.3.1



รูป 6.3.1

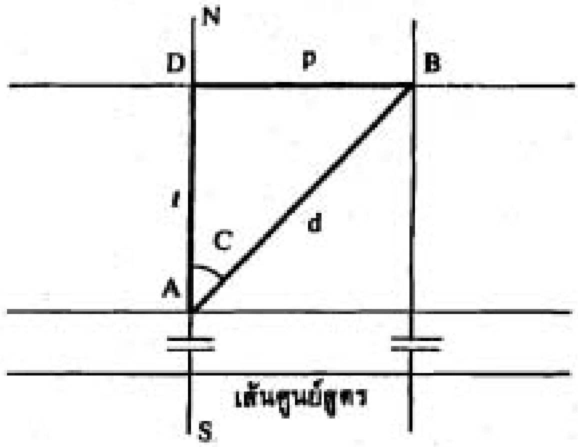
ในรูป 6.3.1 จาก B ลากเส้นขนานของละติจูด ไปตัดกับเส้นเมริเดียนที่ผ่าน A ณ จุด D และให้เส้นเมริเดียนที่ผ่าน A ไปตัดกับเส้นศูนย์สูตรที่ F กับให้เส้นเมริเดียนที่ผ่าน B ไปตัดกับเส้นศูนย์สูตรที่ G แล้วจะได้ว่า

ℓ = ส่วนโค้ง AD เป็นค่าเปลี่ยนแปลงของละติจูดหรือผลต่างของละติจูด

และ p = ส่วนโค้ง DB เป็นระยะทางตามแนวขนานของละติจูด

การพิจารณาระยะทางบนพื้นผิวโลกที่โดยปกติถ้าเป็นระยะทางยาว ๆ เราต้องพิจารณาเป็นส่วนโค้ง ทั้งนี้เนื่องจากผิวโลกเป็นทรงกลม แต่ถ้าระยะทางที่ใช้เป็นระยะทางสั้น ๆ เพื่อความสะดวกในการคิดคำนวณ เราจึงมักใช้เป็นระยะทางบนพื้นราบ (plane) ดังนั้น โดยทั่ว ๆ ไป ถ้าระยะทางบนผิวโลกที่จะพิจารณาน้อยกว่า 200 ไมล์ทะเล เราก็จะใช้เป็นระยะทางบนพื้นราบ

ในพื้นราบหรือระนาบ (plane) นี้ เส้นศูนย์สูตรและเส้นขนานของละติจูด จะแทนด้วยเส้นขนานตามแนวนอน ในขณะที่เส้นเมริเดียนซึ่งเป็นเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นศูนย์สูตรนั้น ก็จะถูกแทนด้วยเส้นขนานตามแนวดิ่ง ดังรูป 6.3.2



รูป 6.3.2

ในรูป 6.3.2 จะได้ว่า

NAS เป็นเส้นเมริเดียนที่ผ่านจุด A

และ DB เป็นส่วนหนึ่งของเส้นขนานของละติจูดที่ผ่านจุด B แล้ว

d = AB เป็นระยะทางระหว่าง A กับ B

p = DB เป็นระยะทางตามแนวขนาน (ของละติจูด)

ℓ = AD เป็นค่าเปลี่ยนแปลงของละติจูด (ผลต่างของละติจูด) และ

C = $\angle BAD$ เป็นมุมของแนวทาง (course angle)

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD ซึ่งมี D เป็นมุมฉาก จะได้ว่า

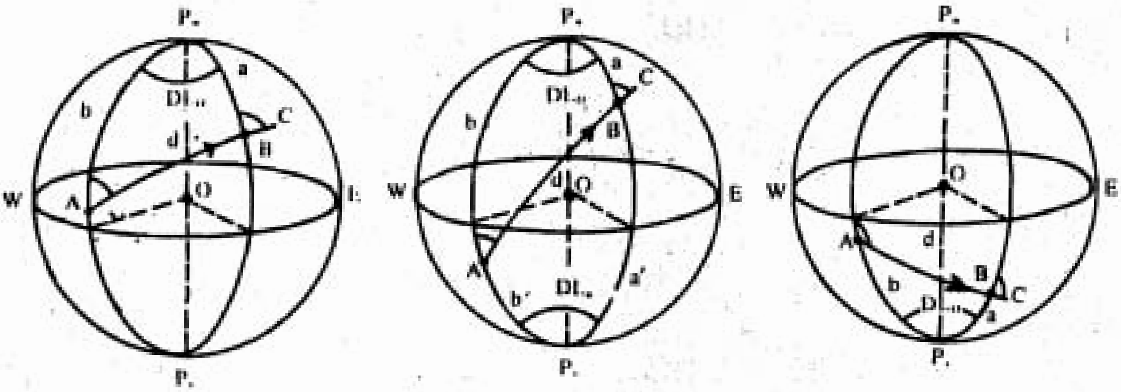
(1) $\ell = d \cos C$

(2) $p = d \sin C$

(3) $\tan C = \frac{p}{\ell}$

ค่าเปลี่ยนแปลงของละติจูดจะเป็นค่าเหนือหรือใต้นั้น เป็นไปตาม B ว่า อยู่ทางเหนือหรืออยู่ทางใต้ของ A ในรูป 6.3.2 ได้ว่า ค่าเปลี่ยนแปลงของละติจูดคือ ℓ ไมล์ทะเลเหนือ หรือ ℓ ลิปดาเหนือ ระยะทางตามแนวขนานละติจูด คือ p ไมล์ทะเลตะวันออก และแนวทาง (ของการเดินเรือ) คือ C° (หรือ เหนือ C° ตะวันออก)

6.4 แนวทางและระยะทางของการเดินเรือตามแนววงกลมใหญ่



รูป 6.4.1 รูป 6.4.2 รูป 6.4.3

ในการเดินเรือตามแนวของวงกลมใหญ่จากจุด A ถึงจุด B ดังรูป 6.4.1, รูป 6.4.2 และรูป 6.4.3 เป็นการเดินเรือตามแนวของส่วนที่สั้นกว่าของวงกลมใหญ่ จาก A ถึง B ปัญหาพื้นฐานของการเดินเรือตามแนวของวงกลมใหญ่ ก็คือการหาระยะทางจาก A ถึง B และการหาทิศทางของการเดินทางที่จุดใด ๆ

ปัญหาของการเดินเรือตามแนวของวงกลมใหญ่นี้ จำเป็นต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (โดยปกติมักจะเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง) มาช่วยแก้ปัญหา โดยสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมนี้จะมีขั้วเหนือหรือขั้วใต้ขั้วใดขั้วหนึ่งเป็นจุดยอด โดยถ้าจุด A และ B อยู่ในครึ่งทรงกลมเดียวกันแล้ว จะใช้จุดขั้วของครึ่งทรงกลมนั้นเป็นจุดยอด แต่ถ้า A กับ B อยู่คนละครึ่งทรงกลมแล้ว อาจจะใช้ขั้วใดขั้วหนึ่งเป็นจุดยอดก็ได้

ในรูป 6.4.1 จุด A และจุด B อยู่ในครึ่งทรงกลมเหนือ โดยในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_nB มีส่วนต่าง ๆ ดังนี้

b = ส่วนโค้ง AP_n = 90° − ละติจูด A

a = ส่วนโค้ง BP_n = 90° − ละติจูด B และ

DL_o = $\angle AP_nB$ = ผลต่างระหว่างลองจิจูด A กับ B

ในรูป 6.4.2 จุด A อยู่ในครึ่งทรงกลมใต้ และจุด B อยู่ในครึ่งทรงกลมเหนือ โดยในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_nB มีส่วนต่าง ๆ ดังนี้

b = ส่วนโค้ง AP_n = $90° +$ ละติจูด A

a = ส่วนโค้ง BP_n = $90° -$ ละติจูด B และ

DL_o = $\angle AP_nB$ = ผลต่างระหว่างลองจิจูด A กับ B

ในขณะที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_sB มีส่วนต่าง ๆ ดังนี้

b' = ส่วนโค้ง AP_s = $90° -$ ละติจูด A

a' = ส่วนโค้ง BP_S = $90° +$ ละติจูดB และ

DL_o = $\angle AP_sB$ = ผลต่างระหว่างลองจิจูด A กับ B

ในรูป 6.4.3 จุด A และจุด B อยู่ในครึ่งทรงกลมใต้ทั้งคู่ โดยในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม AP_sB มีส่วนต่าง ๆ ดังนี้

b = ส่วนโค้ง AP_s = $90° -$ ละติจูด A

a = ส่วนโค้ง BP_s = $90° -$ ละติจูด B และ

DL_o = $\angle AP_sB$ = ผลต่างระหว่างลองจิจูด A กับ B

โดยในแต่ละรูป (รูป 6.4.1, รูป 6.4.2 และรูป 6.4.3) มี

d = ส่วนโค้ง AB = ระยะบนวงกลมใหญ่ระหว่าง A กับ B

$\angle P_nAB$ = แนวทางเริ่มต้น และ

$\angle P_nBC$ = แนวทางขณะถึง