บทที่ 4

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง

(Oblique Spherical Triangles)

หัวข้อเรื่อง

4.1 ลักษณะของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง

4.2 กฎของไซน์ (Law of sines)

4.3 กฎของโคไซน์สำหรับด้านและสำหรับมุม

4.4 กฎห้าส่วน

4.5 สูตรครึ่งมุมและสูตรครึ่งด้าน

4.6 การอุปมานของเกาส์และของเนเปียร์

4.7 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สามด้านและกรณีกำหนดมุมให้สามมุม

4.8 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้านและกรณีกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุม

4.9 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่งและกรณีกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง

วัตถุประสงค์ประจำบทเรียน

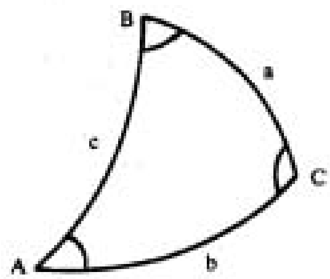
หลังจากศึกษาบทที่ 2 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. อธิบายลักษณะของรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงได้
2. เข้าใจถึงที่มาของสูตรที่จะนำมาใช้แก้ปัญหารูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ทั้งกฎของไซน์ กฎของโคไซน์ สำหรับด้านและสำหรับมุม กฎห้าส่วน สูตรครึ่งมุม และสูตรครึ่งด้าน รวมทั้งการอุปมานของเกาส์และอุปมานของเนเปียร์
3. สามารถนำสูตรที่ได้ศึกษามาแล้วไปใช้แก้ปัญหารูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงที่กำหนดส่วนใดๆ มาให้อย่างน้อยสามส่วนได้ทุกกรณี

บทที่ 4
สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง
(Oblique Spherical Triangles)

4.1 ลักษณะของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง (oblique spherical triangle) คือ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมซึ่งไม่มีมุมหนึ่งมุมใดเป็นมุมฉากเลย ดังรูป 4.1.1



รูป 4.1.1

รูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มีองค์ประกอบหกส่วน คือ มุม A, B, C และด้าน a, b, c เมื่อกำหนดส่วนใด ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงมาให้อย่างน้อยสามส่วน จะสามารถหาส่วนที่เหลือได้ ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง มีทั้งหมด 6 กรณีคือ

กรณีที่ 1 กำหนดด้านให้สามด้าน

กรณีที่ 2 กำหนดมุมให้สามมุม

กรณีที่ 3 กำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้าน

กรณีที่ 4 กำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุม

กรณีที่ 5 กำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง

กรณีที่ 6 กำหนดมุมให้สองมุมกับด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง

การแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง ในกรณีต่าง ๆ ทั้ง 6 กรณีนั้น จะต้องมีสูตรและกฎที่เหมาะสม ในบทนี้จึงจะกล่าวถึงสูตรและกฎที่จะนำมาใช้แก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง พร้อมทั้งวิธีการในการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงด้วย

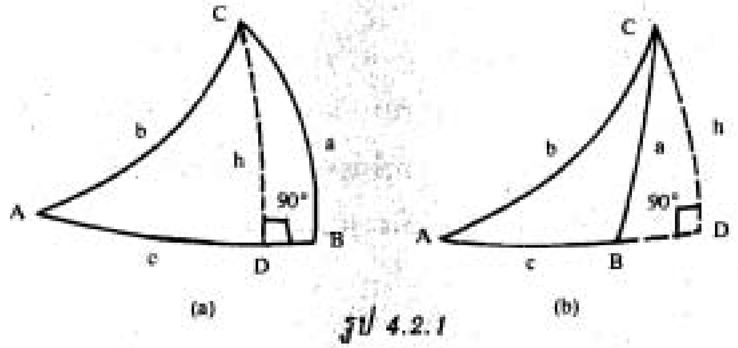
4.2 กฎของไซน์ (Law of sines)

กฎของไซน์ กล่าวว่า:

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

พิสูจน์



รูป 4.2.1

ในรูป 4.2.1 ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ ซึ่งมี a, b, c เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามกับ**มุม A,B,C ตามลำดับ จากจุด C ลากส่วนโค้งของวงกลมใหญ่มาตั้งฉากกับ AB ที่จุด D**

ดังรูป 4.2.1 (a) หรือส่วนของด้าน c ที่ถูกต่อออกไป ดังรูป 4.2.1 (b) จึงได้สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมจากสองรูป คือ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ACD และ BCD

เมื่อใช้กฎของเนเปียร์กับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ACD จะได้

$$\sin h = \sin b \sin A \qquad \text{..........(1)}$$

ในทำนองเดียวกัน ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก BCD ก็ได้ว่า

$$\sin h = \sin a \sin B \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) ได้ว่า

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

ดังนั้น $$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} \qquad \text{..........(3)}$$

ในทำนองเดียวกัน โดยการลากส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ จากจุด A มาตั้งฉากกับ CB ก็จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้ คือ

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (3) และ (4) จึงได้กฎของไซน์สำหรับสามเหลี่ยมเชิงกลมเป็น

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

ข้อสังเกต

1) กฎของไซน์นี้ อาจนำไปใช้แก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ในกรณีที่กำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง และกรณีที่กำหนดมุมให้สองมุมกับด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง

2) ในการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม โดยใช้กฎของไซน์นี้ เมื่อเราได้ส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมแล้ว ในบางครั้งเราอาจพบปัญหาว่า ส่วนที่หามาได้นั้นอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง หรือจตุตถภาคที่สอง หรืออาจจะอยู่ทั้งในจตุตถภาคที่หนึ่งหรือที่สองก็ได้ เนื่องจาก $\sin A = \sin (180° - A)$ อย่างไรก็ตาม เราอาจจะพิจารณาได้โดยอาศัยคุณสมบัติของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่ว่า

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

(i) ถ้า $a < b < c$ แล้ว $A < B < C$

(ii) $a + b > c$, $a + c > b$ และ $b + c > a$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงตรวจสอบดูว่า สิ่งที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นส่วนประกอบของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมได้หรือไม่ (โดยใช้กฎของไซน์)

   1.1) $A = 108° 40'$, $B = 134° 20'$, $C = 70° 18'$

   $a = 145° 36'$, $b = 154° 45'$, $c = 34° 9'$

   1.2) $A = 47° 21'$, $B = 22° 20'$, $C = 146° 40'$

   $a = 117° 9'$, $b = 27° 22'$, $c = 138° 20'$

   1.3) $A = 110° 10'$, $B = 133° 18'$, $C = 70° 16'$

   $a = 147° 6'$, $b = 155° 5'$, $c = 32° 59'$

2. จงใช้กฎของไซน์คำนวณหาส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉากต่อไปนี้

   2.1) $a = 58° 8' 19''$, $b = 32° 49' 22''$

   $B = 37° 12' 53''$, $c = 63° 40'$

   2.2) $a = 36° 14' 6''$, $A = 49° 29' 56''$

   $b = 38° 45'$, $c = 51° 1' 11''$

3. จงใช้กฎของไซน์ คำนวณหาส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมต่อไปนี้

   3.1) $A = 130° 5' 22''$, $B = 32° 26' 6''$

   $C = 36° 45' 26''$, $c = 51° 6' 12''$

   $a = 84° 14' 29''$

   3.2) $A = 70°$, $C = 94° 48' 12''$, $c = 116°$

   $a = 57° 56' 53''$, $b = 137° 20' 33''$

4. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ต่อไปนี้ กำหนดส่วนใดส่วนหนึ่งของสามเหลี่ยมมาให้ 2 ค่า จงพิจารณาว่าค่าที่ถูกต้องคือค่าใด

   4.1) $A = 65° 13'$, $B = 49° 28', 130° 33'$, $C = 128° 16'$ $a = 88° 24'$, $b = 56° 48'$, $c = 120° 11'$

   4.2) $A = 50° 10'$, $B = 135° 5'$, $C = 50° 30'$, $a = 69° 35', 110° 25'$, $b = 120' 30'$ $c = 70° 20'$

   4.3) $A = 127° 40'$, $B = 45° 15'$, $C = 124° 42', 15° 20'$, $a = 68° 53'$, $b = 56° 50'$, $c = 18° 10'$

   4.4) $A = 52° 20'$, $B = 45° 15'$, $C = 124° 42'$, $a = 68° 53'$, $b = 56° 50'$, $c = 104° 19', 18° 10'$

4.3 กฎของโคไซน์สำหรับด้านและสำหรับมุม

4.3.1 กฎของโคไซน์สำหรับด้าน (Law of cosines for sides)

กฎของโคไซน์สำหรับด้าน กล่าวว่า:

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

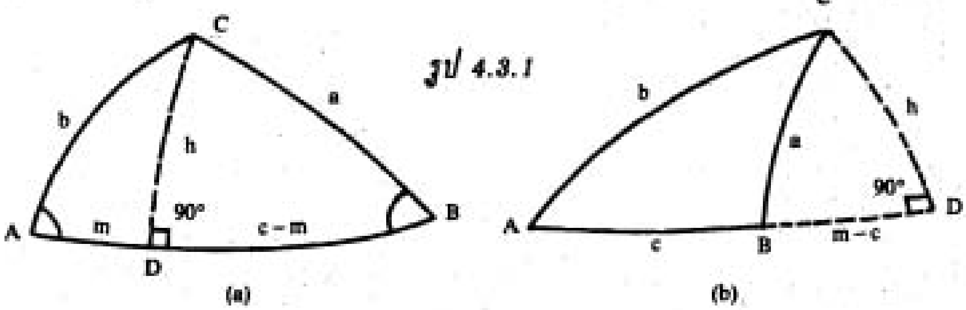
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

พิสูจน์

พิจารณารูป 4.3.1



รูป 4.3.1

ในรูป 4.3.1 ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ

ให้ $CD = h$ และ $AD = m$

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก ACD ได้ว่า

$$\sin m = \tan h \cot A \qquad \text{..........(1)}$$

$$\sin h = \sin b \sin A \qquad \text{..........(2)}$$

$$\cos b = \cos h \cos m \qquad \text{..........(3)}$$

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก BCD ได้ว่า

$$\cos a = \cos h \cos (c-m)$$

หรือ $\cos a = \cos h (\cos c \cos m + \sin c \sin m)$ ....(4)

(เนื่องจาก $\cos (c-m) = \cos (m-c)$)

แทนค่า $\sin m$ จาก (1) และ $\cos m$ จาก (3) ลงใน (4) จะได้

$$\cos a = \cos h (\cos c \frac{\cos b}{\cos h} + \sin c \tan h \cot A)$$

$$= \cos c \cos b + \sin c \sin h \cot A \qquad \text{..........(5)}$$

แทนค่า $\sin h$ จาก (2) ลงใน (5) จะได้

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \sin A \cot A$$

$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \qquad \text{..........(6)}$$

ในทำนองเดียวกัน ก็จะได้ว่า

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \qquad \text{..........(7)}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \qquad \text{..........(8)}$$

ซึ่งสมการ (6), (7) และ (8) คือ กฎของโคไซน์สำหรับด้าน นั่นเอง

ข้อสังเกต

กฎนี้อาจนำไปใช้แก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ในกรณีที่กำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้าน

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาด้าน c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งมี $a = 76° 24' 40''$, $b = 58° 18' 36''$ และ $C = 116° 30' 28''$

วิธีทำ

จากกฎของโคไซน์สำหรับด้านได้ว่า

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

แต่

$$\cos a = \cos 76° 24' 40'' = 0.23495$$

$$\cos b = \cos 58° 18' 36'' = 0.52532$$

$$\sin a = \sin 76° 24' 40'' = 0.97201$$

$$\sin b = \sin 58° 18' 36'' = 0.85090$$

$$\cos C = \cos 116° \, 30' \, 28''$$
$$= -0.44632$$

ดังนั้น $$\cos c = (0.23495)(0.52532) + (0.97201)(0.85090)(-0.44632)$$
$$= 0.12342 - 0.36914$$
$$= -0.24572$$
$$\therefore \; c = \cos^{-1}(-0.24572)$$
$$\approx 104° \, 13' \, 32''$$

ดังนั้น $$c = 104° \, 13' \, 32''$$

4.3.2 กฎของโคไซน์สำหรับมุม (Law of cosines for angles)

กฎของโคไซน์สำหรับมุม กล่าวว่า :

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$
$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

พิสูจน์

พิจารณาสามเหลี่ยมเชิงขั้ว A'B'C' ของสามเหลี่ยม ABC โดย (6) จะได้ว่า

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A' \qquad ....(9)$$

แต่จากความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับสามเหลี่ยมเชิงขั้วของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมนั้นได้ว่า $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $c' = 180° - C$ และ $A' = 180° - a$ จึงเขียน (9) ได้เป็น

$$\cos(180° - A) = \cos(180° - B)\cos(180° - C) + \sin(180° - B) \sin(180° - C) \cos(180° - a)$$

หรือ $$-\cos A = (-\cos B)(-\cos C) + \sin B \sin C(-\cos a)$$
$$= \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$$

หรือ $$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \qquad ....(10)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \qquad ....(11)$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \qquad ....(12)$$

ซึ่งสมการ (10),(11) และ (12) ก็คือ กฎของโคไซน์สำหรับมุม นั่นเอง

ตัวอย่าง 4.3.2 จงหามุม C ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งมี $A = 60°$, $B = 60°$ และ $c = 60°$

วิธีทำ

จากกฎโคไซน์สำหรับมุม ได้ว่า

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

ในที่นี้

$$\cos A = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\cos B = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\sin A = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin B = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos c = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \cos C = -(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\therefore \quad C = \cos^{-1} 0.125 = 82° \, 49' \, 9''$$

ดังนั้น $\quad C = 82° \, 49' \, 9''$

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงใช้กฎของโคไซน์สำหรับด้าน หาด้าน a ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังนี้

   1.1) $b = 60°, c = 30°, A = 45°$

   1.2) $b = 45°, c = 30°, A = 120°$

   1.3) $b = 45°, c = 60°, A = 150°$

2. จงใช้กฎของโคไซน์สำหรับมุม หามุม A ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังนี้

   2.1) $B = 120°, C = 150°, a = 135°$

   2.2) $B = 135°, C = 120°, a = 30°$

3. ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC กำหนดให้ $a = 30°, b = 45°, c = 60°$ จงหามุม A

4.4 กฎห้าส่วน

กฎห้าส่วน เป็นกฎที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมสองมุมกับด้านสามด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ ซึ่งมีทั้งหมด 6 สูตรดังนี้

1) $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$

2) $\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$

3) $\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$

4) $\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$

5) $\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$

6) $\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$

พิสูจน์

การพิสูจน์กฎห้าส่วน ทำได้โดยอาศัยกฎของโคไซน์สำหรับด้าน ดังนี้

1) จาก $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$

จะได้
$$\begin{aligned}
\sin a \sin c \cos B &= \cos b - \cos a \cos c \\
&= \cos b - \cos c(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A) \\
&= \cos b - \cos b \cos^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos A \\
&= \cos b(1 - \cos^2 c) - \sin b \sin c \cos c \cos A \\
&= \cos b \sin^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos A
\end{aligned}$$

หารทั้ง 2 ข้างด้วย $\sin c$ จะได้

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \qquad \text{..........(1)}$$

2) จาก $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

จะได้
$$\begin{aligned}
\sin a \sin b \cos C &= \cos c - \cos a \cos b \\
&= \cos c - \cos b(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A) \\
&= \cos c - \cos c \cos^2 b - \sin b \cos b \sin c \cos A \\
&= \cos c(1 - \cos^2 b) - \sin c \cos b \sin b \cos A \\
&= \cos c \sin^2 b - \sin c \cos b \sin b \cos A
\end{aligned}$$

หารทั้ง 2 ข้างด้วย $\sin b$ จะได้

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \qquad \text{..........(2)}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้สูตรซึ่งอยู่ในกลุ่มเดียวกันอีก 4 สูตรคือ

3) $\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$

4) $\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$

5) $\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$

6) $\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$

4.5 สูตรครึ่งมุม และสูตรครึ่งด้าน

4.5.1 สูตรครึ่งมุม (Half-angle formulas)

สูตรครึ่งมุม มีดังนี้ :

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

1) $\tan \frac{1}{2}A = \frac{r}{\sin (s-a)}$

2) $\tan \frac{1}{2}B = \frac{r}{\sin (s-b)}$

3) $\tan \frac{1}{2}C = \frac{r}{\sin (s-c)}$

เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$ และ $r = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}}$

พิสูจน์ การพิสูจน์สูตรครึ่งมุม ทำได้โดยอาศัยกฎของโคไซน์ สำหรับด้าน

1) จาก $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

จะได้ว่า $$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

แล้ว
$$\begin{aligned}
1 - \cos A &= 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\
&= \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\
&= \frac{\cos b \cos c + \sin b \sin c - \cos a}{\sin b \sin c} \\
&= \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} \\
&= \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(b-c+a) \sin \frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b \sin c}
\end{aligned}$$

และ

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b \sin c}$$

และ $$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \left(\frac{-2 \sin \frac{1}{2}(b-c+a) \sin \frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b \sin c}\right)$$

$$\cdot \left(\frac{\sin b \sin c}{-2 \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a-b-c)}\right)$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}$$

เพราะว่า $\sin \frac{1}{2}(b-c-a) = -\sin \frac{1}{2}(c+a-b)$

และ $\sin \frac{1}{2}(a-b-c) = -\sin \frac{1}{2}(b+c-a)$

ให้ $s = \frac{a+b+c}{2}$ แล้วจะได้ว่า

$$\frac{a+b-c}{2} = s-c, \quad \frac{c+a-b}{2} = s-b \quad \text{และ} \quad \frac{b+c-a}{2} = s-a$$

แต่ $$\tan \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin (s-c) \sin (s-b)}{\sin s \sin (s-a)}}$$

$$= \frac{1}{\sin (s-a)} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}}$$

ให้ $\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} = r$

เราจึงได้ว่า $\tan\frac{1}{2}A = \dfrac{r}{\sin(s-a)}$ ....(1)

ในทำนองเดียวกัน ก็จะได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}B = \frac{r}{\sin(s-b)} \qquad \text{..........(2)}$$

$$\tan\frac{1}{2}C = \frac{r}{\sin(s-c)} \qquad \text{..........(3)}$$

เมื่อ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ และ $r = \sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$

ข้อสังเกต

สูตรครึ่งมุมเป็นสูตรที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างครึ่งมุมใดมุมหนึ่งกับด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม จึงสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ในกรณีที่กำหนดด้านให้สามด้าน

4.5.2 สูตรครึ่งด้าน (Half-side formulas)

สูตรครึ่งด้าน มีดังนี้ :

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

1) $\cot\frac{1}{2}a = \dfrac{R}{\cos(S-A)}$

2) $\cot\frac{1}{2}b = \dfrac{R}{\cos(S-B)}$

3) $\cot\frac{1}{2}c = \dfrac{R}{\cos(S-C)}$

เมื่อ $S = \dfrac{A+B+C}{2}$ และ $R = \sqrt{\dfrac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}}$

พิสูจน์

ในที่นี้ จะพิสูจน์โดยใช้หลักการสามเหลี่ยมเชิงขั้ว (อาจพิสูจน์โดยใช้กฎของโคไซน์สำหรับมุมก็ได้)

1) พิจารณาสามเหลี่ยมเชิงขั้ว A'B'C' ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC

ให้ $S' = \dfrac{a'+b'+c'}{2}$ และ $r' = \sqrt{\dfrac{\sin(s'-a')\sin(s'-b')\sin(s'-c')}{\sin s'}}$

เนื่องจาก $a' = 180° - A, b' = 180° - B, c' = 180° - C, A' = 180° - a, B' = 180° - b$ และ $C' = 180° - c$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} s' &= \frac{1}{2}((180° - A) + (180° - B) + (180° - C)) \\ &= 270° - \frac{1}{2}(A + B + C) \\ &= 270° - S \end{aligned}$$

เมื่อ
$$S = \frac{A + B + C}{2}$$

แล้ว
$$\begin{aligned} \sin s' &= \sin(270° - S) \\ &= -\cos S \\ \sin(s' - a') &= \sin(270° - S - (180° - A)) \\ &= \sin(90° - (S - A)) \\ &= \cos(S - A) \\ \sin(s' - b') &= \sin(270° - S - (180° - B)) \\ &= \sin(90° - (S - B)) \\ &= \cos(S - B) \\ \sin(s' - c') &= \sin(270° - S - (180° - C)) \\ &= \sin(90° - (S - C)) \\ &= \cos(S - C) \end{aligned}$$

และ
$$r' = \sqrt{\frac{\cos(S - A)\cos(S - B)\cos(S - C)}{-\cos S}} = R$$

จากสูตรครึ่งมุม ได้ว่า
$$\tan\frac{1}{2}A' = \frac{r'}{\sin(s' - a')}$$

แต่
$$A' = 180° - a$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \tan\frac{1}{2}A' &= \tan\frac{1}{2}(180° - a) \\ &= \cot\frac{1}{2}a \end{aligned}$$

จึงได้ว่า
$$\cot\frac{1}{2}a = \frac{R}{\cos(S - A)} \qquad \text{..........(1)}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\cot\frac{1}{2}b = \frac{R}{\cos(S-B)} \qquad \text{..........(2)}$$

$$\cot\frac{1}{2}c = \frac{R}{\cos(S-C)} \qquad \text{..........(3)}$$

เมื่อ $S = \frac{A+B+C}{2}$ และ $R = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}}$

ข้อสังเกต

สูตรครึ่งด้านเป็นสูตรแสดงความสัมพันธ์ระหว่างครึ่งด้านใดด้านหนึ่งกับมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม จึงสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ในกรณีที่กำหนดมุมให้สามมุม

4.6 การอุปมานของเกาส์และของเนเปียร์

4.6.1 การอุปมานของเกาส์ (Gauss's analogies)

การอุปมานของเกาส์ มีสูตรดังนี้

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

1) $$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}$$

2) $$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

3) $$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}$$

4) $$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

และสูตรที่อยู่ในรูปอื่น ซึ่งได้จากการเปลี่ยนอักษรของสูตร 1) ถึงสูตร 4) เป็นวัฏจักร (cyclic) ซึ่งจะทำให้ได้สูตรเพิ่มขึ้นอีก 8 สูตร รวมเป็นสูตรทั้งหมด 12 สูตรด้วยกัน

พิสูจน์

ในที่นี้ จะแสดงการพิสูจน์เฉพาะสูตรที่ 1) เท่านั้น ส่วนสูตรอื่น ๆ นั้น ก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองคล้ายคลึงกัน

อนึ่ง การพิสูจน์จะอาศัยผลบางประการในขั้นตอนของการพิสูจน์สูตรครึ่งมุมมาช่วยในการพิสูจน์ด้วย

เนื่องจาก $1 - \cos A = 2\sin^2 \frac{1}{2} A$

จึงได้ว่า
$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos A)}$$
$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{1}{2}(b-c+a)\sin\frac{1}{2}(b-c-a)\right)}{\sin b \sin c}}$$
$$= \sqrt{\frac{-\sin\frac{1}{2}(b-c+a)\sin\frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b \sin c}}$$
$$= \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

ในทำนองเดียวกันก็จะได้ว่า
$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c \sin a}}$$

และเนื่องจาก $1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2} A$

จึงได้ว่า
$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos A)}$$
$$= \sqrt{\frac{-\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b \sin c}}$$
$$= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

ในทำนองเดียวกัน ก็จะได้ว่า
$$\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a}}$$

แล้วจะได้ว่า

$$\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B = \left(\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\right)\left(\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin c\sin a}}\right)$$

$$= \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}$$

$$= \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C$$

$$\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B = \left(\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\right)\left(\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\sin a}}\right)$$

$$= \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}$$

$$= \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C$$

และ

$$\sin\frac{1}{2}(A-B) = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B - \cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B$$

$$= \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C - \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C$$

$$= \frac{\sin(s-b) - \sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C$$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}((s-b)+(s-a))\sin\frac{1}{2}((s-b)-(s-a))}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}$$

ข้อสังเกต

การอุปมานของเกาส์นี้ แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนทั้งหกของรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม จึงมีประโยชน์อย่างยิ่งในการใช้เป็นสูตรสำหรับตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างส่วนทั้งหกของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

4.6.2 การอุปมานของเนเปียร์ (Napier's analogies)

การอุปมานของเนเปียร์ มีสูตรดังนี้ :

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

1) $$\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$

2) $$\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}$$

3) $$\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

4) $$\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

และสูตรที่อยู่ในรูปอื่น ซึ่งได้จากการเปลี่ยนอักษรของสูตร 1) ถึงสูตร 4) เป็นวัฏจักร ซึ่งจะได้สูตรเพิ่มขึ้นอีก 8 สูตร รวมเป็นสูตรทั้งหมด 12 สูตรด้วยกัน

พิสูจน์

ในที่นี้จะแสดงการพิสูจน์เฉพาะสูตรที่ 1) และสูตรที่ 2) เท่านั้น ส่วนสูตรอื่น ๆ ที่เหลือก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองคล้ายคลึงกัน

1) จากอุปมานของเกาส์ สูตรที่ 1) ได้ว่า

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}$$

ดังนั้น $$\sin\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C$$

และจากอุปมานของเกาส์ สูตรที่ 3) ได้ว่า

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}$$

ดังนั้น $$\cos\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C$$

และ $$\tan\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$= \left(\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c}\right)\left(\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \qquad \text{..........(1)}$$

2) จากอุปมานของเกาส์ สูตรที่ 1) ได้ว่า

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}$$

ดังนั้น $$\sin\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}\sin\frac{1}{2}c$$

และจากอุปมานของเกาส์ สูตรที่ 2) ได้ว่า

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

ดังนั้น $$\cos\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}\cos\frac{1}{2}c$$

และ $$\tan\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$= \left(\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}C}\right)\left(\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} \qquad \text{..........(2)}$$

ข้อสังเกต

การอุปมานของเนเปียร์นี้ แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมสองมุม กับด้านสามด้าน หรือระหว่างด้านสองด้าน กับมุมสามมุม ซึ่งอาจนำไปใช้แก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ในกรณีที่กำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้าน หรือกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุม

4.7 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สามด้าน และกรณีกำหนดมุมให้สามมุม

4.7.1 เมื่อกำหนดด้านให้สามด้าน คือ ด้าน a, b และ c อาจจะแก้ปัญหาโดยใช้กฎของโคไซน์สำหรับด้าน หรือใช้สูตรครึ่งมุม ก็ได้

ตัวอย่าง 4.7.1 จงหา A, B, C ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งมี $a = 30°$, $b = 60°$, $c = 60°$

วิธีทำ ในที่นี้จะแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC นี้ โดยใช้สูตรครึ่งมุม เพื่อหา A, B และ C คือ

$$\tan\frac{1}{2}A = \frac{r}{\sin(s-a)}$$

$$\tan\frac{1}{2}B = \frac{r}{\sin(s-b)}$$

$$\tan\frac{1}{2}C = \frac{r}{\sin(s-c)}$$

เมื่อ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ และ $r = \sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$

และตรวจสอบคำตอบที่ได้ด้วยกฎของไซน์ คือ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

จาก $a = 30°$, $b = 60°$, $c = 60°$

จะได้ว่า $s = \dfrac{a+b+c}{2} = 75°$

และ
$$s-a = 75° - 30° = 45°$$
$$s-b = 75° - 60° = 15°$$
$$s-c = 75° - 60° = 15°$$

ดังนั้น
$$\sin(s-a) = \sin 45° = 0.70711$$
$$\sin(s-b) = \sin 15° = 0.25882$$
$$\sin(s-c) = \sin 15° = 0.25882$$
$$\sin s = \sin 75° = 0.96593$$

และ $$r = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

ดังนั้น
$$r = \sqrt{\frac{(0.70711)(0.25882)(0.25882)}{0.96593}}$$
$$= \sqrt{0.04903}$$
$$= 0.22145$$

จาก $\tan\frac{1}{2}A = \dfrac{r}{\sin(s-a)}$

$\therefore$ $\tan\frac{1}{2}A = \dfrac{0.22145}{0.70711}$

$= 0.31317$

$\frac{1}{2}A = \tan^{-1} 0.31317$

$\frac{1}{2}A = 17^\circ\ 23'\ 20''$

ดังนั้น $A = 34^\circ\ 46'\ 40''$

จาก $\tan\frac{1}{2}B = \dfrac{r}{\sin(s-b)}$

$\therefore$ $\tan\frac{1}{2}B = \dfrac{0.22145}{0.25882}$

$= 0.85561$

$\frac{1}{2}B = \tan^{-1} 0.85561$

$= 40^\circ\ 33'\ 2''$

ดังนั้น $B = 81^\circ\ 6'\ 4''$

และ จาก $\tan\frac{1}{2}C = \dfrac{r}{\sin(s-c)}$

$\therefore$ $\tan\frac{1}{2}C = \dfrac{0.22145}{0.25882}$

$= 0.85561$

$\frac{1}{2}C = \tan^{-1} 0.85561$

$= 40^\circ\ 33'\ 2''$

ดังนั้น $C = 81^\circ\ 6'\ 4''$

ตรวจสอบ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{0.50000}{0.57039} = 0.87659$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{0.86603}{0.98796} = 0.87658$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{0.86603}{0.98796} = 0.87658$$

4.7.2 เมื่อกำหนดมุมให้สามมุม คือ มุม A, B และ C อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม หรือใช้สูตรครึ่งด้าน หรือใช้หลักการของสามเหลี่ยมเชิงขั้วกับกฎโคไซน์สำหรับด้าน หรือสูตรครึ่งมุมก็ได้

ตัวอย่าง 4.7.2 จงหาด้าน a, b, c ของสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมี $A = 60°$, $B = 30°$ และ $C = 120°$

วิธีทำ

ในที่นี้ จะแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม เพื่อหาค่า a, b และ c

จาก $A = 60°$ ได้ว่า $\sin A = 0.86603$

$\cos A = 0.50000$

จาก $B = 30°$ ได้ว่า $\sin B = 0.50000$

$\cos B = 0.86603$

จาก $C = 120°$ ได้ว่า $\sin C = 0.86603$

$\cos C = -0.50000$

จากกฎโคไซน์สำหรับมุม ได้ว่า

1) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

$$\therefore \quad \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{0.50000 + (0.86603)(-0.50000)}{(0.50000)(0.86603)}$$

$$= \frac{0.06698}{0.43306}$$

$$= 0.15466$$

$$\therefore \quad a = \cos^{-1} 0.15466$$

$$= 81° \, 6' \, 10''$$

2) $\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$

$$\therefore \quad \cos b = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A}$$

$$= \frac{0.86603 + (-0.5)(0.5)}{(0.86603)(0.86603)}$$

$$= \frac{0.61603}{0.75001}$$

$$= 0.82136$$

$$b = \cos^{-1} 0.82136$$

$$= 34° \ 46' \ 45''$$

3) $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$

$$\therefore \quad \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

$$= \frac{-0.5 + (0.5)(0.86603)}{(0.86603)(0.5)}$$

$$= \frac{-0.06698}{0.43301}$$

$$= -0.15468$$

$$c = \cos^{-1} (-0.15468)$$

$$= 98° \ 53' \ 54''$$

ตรวจสอบ

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{0.98797}{0.86603} = 1.14080$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{0.57041}{0.5} = 1.14082$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{0.98796}{0.86603} = 1.14079$$

แบบฝึกหัด 4.7

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังต่อไปนี้

1. $a = 30°, b = 45°, c = 60°$
2. $a = 150°, b = 120°, c = 60°$
3. $A = 60°, B = 135°, C = 60°$
4. $A = 150°, B = 120°, C = 135°$
5. $a = 110°, b = 32°, c = 96°$
6. $a = 108° 14', b = 75° 29', c = 56° 37'$
7. $a = 78° 15' 12'', b = 101° 20' 18'', c = 112° 38' 42''$
8. $a = 70° 0' 37'', b = 125° 30' 52'', c = 63° 47' 55''$
9. $A = 80°, B = 110°, C = 130°$
10. $A = 59° 55' 10'', B = 85° 36' 50'', C = 59° 55' 10''$
11. $A = 89° 5' 46'', B = 54° 32' 24'', C = 102° 14' 12''$
12. $A = 172° 17' 56'', B = 8° 28' 20'', C = 4° 23' 35''$

4.8 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้าน และกรณีกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุม

4.8.1 เมื่อกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้านทั้งสอง (คือ กำหนด a, c, B หรือ b, c, A หรือ a, b, C มาให้)

อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับด้าน หรือใช้สูตรการอุปมานของเนเปียร์ก็ได้

ตัวอย่าง 4.8.1 จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เมื่อ $a = 30°$, $B = 45°$ และ $c = 60°$

วิธีทำ

ในที่นี้จะต้องหา b, A และ C

สำหรับ b หาโดยใช้สูตร

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \qquad \text{..........(1)}$$

สำหรับการหา A กับ C ใช้สูตร

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A+C)}{\cot \frac{1}{2} B} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-c)}{\cos \frac{1}{2}(a+c)} \qquad \text{..........(2)}$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A-C)}{\cot \frac{1}{2} B} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-c)}{\sin \frac{1}{2}(a+c)} \qquad \text{..........(3)}$$

สูตรที่ใช้ตรวจสอบคือ : $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$ ....(4)

จาก (1) ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\cos b &= \cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30° \cos 45° \\
&= (0.5)(0.86603) + (0.86603)(0.5)(0.70711) \\
&= 0.43301 + 0.30619 \\
&= 0.7392 \\
b &= \cos^{-1} 0.73920 \\
&= 42° \ 20' \ 12''
\end{aligned}$$

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(A+C) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)\cot\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}(a+c)}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(30^\circ-60^\circ)\cot\frac{1}{2}(45^\circ)}{\cos\frac{1}{2}(30^\circ+60^\circ)}$$

$$= \frac{\cos(-15^\circ)\cot(22^\circ\ 30')}{\cos 45^\circ}$$

$$= \frac{(0.96593)(2.4142)}{(0.70711)}$$

$$= \frac{2.33195}{0.70711}$$

$$= 3.29786$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(A+C) = \tan^{-1} 3.29786$$

$$= 73^\circ\ 7'\ 51'' \qquad \text{..........(5)}$$

จาก (3) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(A-C) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)\cot\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}(a+c)}$$

$$= \frac{\sin(-15^\circ)\cot 22^\circ\ 30'}{\sin 45^\circ}$$

$$= \frac{(-0.25882)(2.4142)}{0.70711}$$

$$= -\frac{0.62484}{0.70711}$$

$$= -0.88365$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(A-C) = \tan^{-1}(-0.88365)$$

$$= -41^\circ\ 27'\ 55'' \qquad \text{..........(6)}$$

(5) + (6) ได้

$$A = 31^\circ\ 39'\ 56''$$

(5) − (6) ได้

$$C = 114^\circ\ 35'\ 46''$$

ตรวจสอบ :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 31^\circ\ 39'\ 56''} = \frac{0.5}{0.52496} = 0.95245$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin 42^\circ\ 20'\ 12''}{\sin 45^\circ} = \frac{0.67348}{0.70711} = 0.95244$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 114^\circ\ 35'\ 46''} = \frac{0.86603}{0.90927} = 0.95244$$

4.8.2 เมื่อกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุมทั้งสอง (คือ กำหนด A, C, b หรือ B, C, a หรือ A, B, c มาให้)

อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม หรือใช้สูตรอุปมานของเนเปียร์ หรือใช้หลักการของสามเหลี่ยมเชิงขั้วกับกฎโคไซน์สำหรับด้านหรือกับอุปมานของเนเปียร์ก็ได้

ตัวอย่าง 4.8.2 จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งมี $A = 150^\circ$, $c = 30^\circ$ และ $B = 120^\circ$

วิธีทำ ในที่นี้จะต้องหา C, a และ b

ใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม หามุม C โดย

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \qquad \text{..........(1)}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \cos C &= -\cos 150^\circ \cos 120^\circ + \sin 150^\circ \sin 120^\circ \cos 30^\circ \\
&= -(-\cos 30^\circ)(-\cos 60^\circ) + \sin 30^\circ \sin 60^\circ \cos 30^\circ \\
&= -(0.86603)(0.5) + (0.5)(0.86603)(0.86603) \\
&= -0.43301 + 0.37500 \\
&= -0.05801 \\
C &= \cos^{-1}(-0.05801) \\
&= 93^\circ\ 19'\ 33''
\end{aligned}$$

ใช้อุปมานของเนเปียร์ หาด้าน a และ b โดย

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(a+b)}{\tan \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \qquad \text{..........(2)}$$

และ

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(a-b)}{\tan \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \qquad \text{..........(3)}$$

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c$$

$$= \frac{\cos 15^\circ}{\cos 135^\circ}\tan 15^\circ$$

$$= \frac{(0.96593)(0.26795)}{(-0.70711)}$$

$$= -0.36603$$

$\therefore \quad \frac{1}{2}(a+b) = \tan^{-1}(-0.36603)$

ดังนั้น $\quad \frac{1}{2}(a+b) = 159^\circ\, 53'\, 44''$ ....(4)

จาก (3) ได้

$$\tan\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c$$

$$= \frac{\sin 15^\circ \tan 15^\circ}{\sin 135^\circ}$$

$$= \frac{(0.25882)(0.26795)}{(0.70711)}$$

$$= 0.09808$$

$\therefore \quad \frac{1}{2}(a-b) = \tan\,(0.09808)$

ดังนั้น $\quad \frac{1}{2}(a-b) = 5^\circ\, 37'\, 43''$ ....(5)

(4) + (5) ได้ $a = 165^\circ\, 31'\, 27''$

(4) − (5) ได้ $b = 156^\circ\, 16'\, 1''$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 4.8.2 นี้ เราอาจแก้ปัญหาโดยใช้หลักของสามเหลี่ยมเชิงขั้ว $A'B'C'$ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ที่กำหนดให้ก็ได้ โดยจะได้ $a' = 180^\circ - A$, $b' = 180^\circ - B$ และ $C' = 180^\circ - c$ แล้วคำนวณหา A', B' และ c' ตามกรณี 4.8.1 เมื่อได้ A', B' และ c' แล้ว ก็สามารถคำนวณหา a, b และ C ได้ โดยจะได้ $a = 180^\circ - A'$, $b = 180^\circ - B'$ และ $C = 180^\circ - c'$

แบบฝึกหัด 4.8

จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังต่อไปนี้

1. $b = 135°$, $A = 45°$, $c = 60°$
2. $a = 30°$, $C = 150°$, $b = 135°$
3. $B = 30°$, $a = 45°$, $C = 60°$
4. $A = 60°$, $b = 120°$, $C = 150°$
5. $c = 116°$, $A = 70°$, $B = 131° 18'$
6. $a = 88° 37' 40''$, $c = 125° 18' 20''$, $B = 102° 16' 36''$
7. $a = 76°, 24'$, $b = 58° 19'$, $C = 116° 30'$
8. $a = 86° 18' 40''$, $b = 45° 36' 20''$, $C = 120° 46' 30''$
9. $a = 41° 6'$, $b = 119° 24'$, $C = 162° 22' 30''$
10. $c = 120° 18' 33''$, $A = 27° 22' 34''$, $B = 91° 26' 44''$
11. $a = 42°, 45'$, $b = 47° 15'$, $C = 11° 11' 41''$
12. $a = 131° 15'$, $b = 129° 20'$, $C = 103° 37' 23''$

4.9 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง และกรณีกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง

4.9.1 เมื่อกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง (คือ กำหนด a, b, A หรือ a, b, B หรือ a, c, A หรือ a, c, C หรือ b, c, B หรือ b, c, C มาให้)

อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎของไซน์ และสูตรการอุปมานของเนเปียร์ เช่น ถ้าโจทย์กำหนด a, b และ A มาให้ ก็อาจหามุม B โดยใช้กฎของไซน์ที่ว่า

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \sin A$$

แล้วหาด้าน c และมุม C โดยใช้สูตรการอุปมานของเนเปียร์ที่ว่า

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(a-b)}{\tan \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}$$

และ
$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}$$

ตัวอย่าง 4.9.1 จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งมี $a = 80° 26' 12''$, $c = 115° 30' 36''$ และ $A = 72° 24' 24''$

วิธีทำ

ในที่นี้จะต้องหา C, B และ b

สำหรับ C หาโดยใช้สูตร

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a} \sin A \qquad \text{..........(1)}$$

สำหรับ b หาโดยใช้สูตร

$$\tan \frac{1}{2} b = \frac{\sin \frac{1}{2}(C+A)}{\sin \frac{1}{2}(C-A)} \tan \frac{1}{2}(c-a) \qquad \text{..........(2)}$$

สำหรับ B หาโดยใช้สูตร

$$\cot\frac{1}{2}B = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a)}{\sin\frac{1}{2}(c-a)}\tan\frac{1}{2}(C-A) \qquad \text{..........(3)}$$

สูตรตรวจสอบ ใช้อุปมานของเกาส์ คือ

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(C-A)}{\cos\frac{1}{2}B} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c-a)}{\sin\frac{1}{2}b} \qquad \text{..........(4)}$$

หา C :

จาก (1) ได้ว่า

$$\sin C = \frac{\sin 115^\circ 30' 36''}{\sin 80^\circ 26' 12''}\sin 72^\circ 24' 24''$$

$$= \frac{(0.90251)(0.95323)}{(0.98610)}$$

$$= 0.87243$$

$$C = \sin^{-1}(0.87243)$$

$$= 60^\circ 44' 32'' \quad \text{หรือ } 119^\circ 15' 18''$$

แต่จากโจทย์ ได้ว่า $a < c$

ดังนั้น ค่า C ที่ใช้ได้จะต้องมีความสัมพันธ์ว่า $A < C$ ด้วย ดังนั้น ค่า $C = 119^\circ 15' 18''$ เพียงค่าเดียว

หา b :

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}b = \frac{\sin 95^\circ 49' 52''}{\sin 23^\circ 25' 27''}\tan 17^\circ 32' 12''$$

$$= \frac{(0.99484)(0.31600)}{(0.39753)}$$

$$= 0.79080$$

$$\frac{1}{2}b = \tan^{-1}(0.7980)$$

$$= 38^\circ 20' 12''$$

$$\therefore \quad b = 76^\circ 40' 24''$$

หา B :

จาก (3) ได้ว่า

$$\cot\frac{1}{2}B = \frac{\sin 97°\ 58'\ 24''}{\sin 17°\ 32'\ 12''}\tan(23°\ 25'\ 27'')$$

$$= \frac{(0.99033)(0.43324)}{(0.30132)}$$

$$= 1.42390$$

$$\frac{1}{2}B = \cot^{-1}(1.4239)$$

$$= 35°\ 4'\ 46''$$

$$\therefore \quad B = 70°\ 9'\ 32''$$

ตรวจสอบ

จาก (4) ได้

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(C-A)}{\cos\frac{1}{2}B} = \frac{\sin 23°\ 25'\ 27''}{\cos 35°\ 4'\ 46''}$$

$$= \frac{(0.39753)}{(0.81836)}$$

$$= 0.48576$$

และ

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(c-a)}{\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\sin 17°\ 32'\ 12''}{\sin 38°\ 20'\ 12''}$$

$$= \frac{(0.30132)}{(0.62029)}$$

$$= 0.48577$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$C = 119°\ 15'\ 18''$$

$$b = 76°\ 40'\ 24''$$

และ $B = 70°\ 9'\ 32''$

ตัวอย่าง 4.9.2 จงแก้ปัญหาสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งมี $b = 81° 42' 18''$, $c = 52° 19' 48''$ และ $C = 47° 25' 6''$

วิธีทำ

ในที่นี้ จะต้องหา B, A และ a

สำหรับ B หาโดยใช้สูตร

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c} \sin C \qquad \text{..........(1)}$$

สำหรับ A หาโดยใช้สูตร

$$\cot \frac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c)}{\sin \frac{1}{2}(b-c)} \tan \frac{1}{2}(B-C) \qquad \text{..........(2)}$$

สำหรับ a หาโดยใช้สูตร

$$\tan \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2}(B+C)}{\sin \frac{1}{2}(B-C)} \tan \frac{1}{2}(b-c) \qquad \text{..........(3)}$$

สูตรสำหรับตรวจสอบ คือ

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2} A} = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2} a} \qquad \text{..........(4)}$$

หา B :

จาก (1) ได้ว่า

$$\sin B = \frac{\sin 81° 42' 18''}{\sin 52° 19' 48''} \sin 47° 25' 6''$$

$$= \frac{(0.98954)(0.73631)}{(0.79154)}$$

$$= 0.92050$$

$$B = \sin^{-1}(0.92050)$$

$$= 67° \text{ หรือ } 113°$$

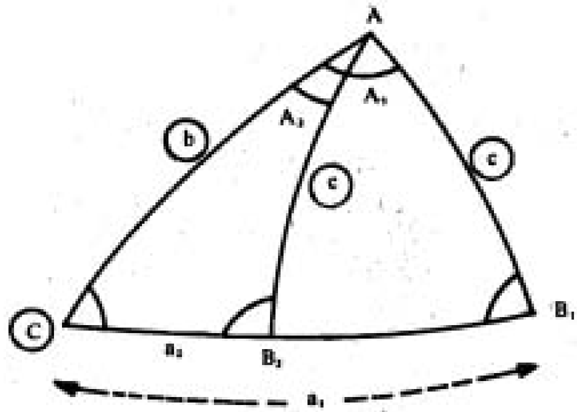
จากโจทย์กำหนดให้ว่า $b > c$

ดังนั้น ค่า B ที่ใช้ได้จะต้องมีความสัมพันธ์ว่า $B > C$ ด้วย

ดังนั้น ค่า $B = 67°$ และ $113°$

นั่นคือ ค่า B เป็นไปได้ทั้งสองค่า

ให้ $B_1 = 67°$ และ $B_2 = 113°$ ดูรูป 4.9.1



รูป 4.9.1

กรณีที่ 1 พิจารณาเมื่อ $B_1 = 67°$ หา A_1 และ a_1

หา A_1 :

จาก (2) ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\cot\frac{1}{2}A_1 &= \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}(b-c)}\tan\frac{1}{2}(B_1 - C) \\
&= \frac{\sin 67°\ 1'\ 3''}{\sin 14°\ 41'\ 15''}\tan 9°\ 47'\ 27'' \\
&= \frac{(0.92063)}{(0.25355)}(0.17256) \\
&= 0.62655 \\
\frac{1}{2}A_1 &= \cot^{-1}(0.62655) \\
&= 57°\ 55'\ 51'' \\
\therefore \quad A_1 &= 115°\ 51'\ 42''
\end{aligned}
$$

หา a_1 :

จาก (3) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}a_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}(B_1+C)}{\sin\frac{1}{2}(B_1-C)}\tan\frac{1}{2}(b-c)$$

$$= \frac{\sin 57^\circ 12' 33''}{\sin 9^\circ 47' 27''}\tan 14^\circ 41' 15''$$

$$= \frac{(0.84065)}{(0.17005)}(0.26211)$$

$$= 52^\circ 20' 30''$$

$$\frac{1}{2}a_1 = \tan^{-1}(1.2958)$$

$$= 52^\circ 20' 30''$$

$$\therefore \quad a_1 = 104^\circ 41'$$

ดังนั้น จึงได้ว่า $B_1 = 67^\circ$, $A_1 = 115^\circ 51' 42''$ และ $a_1 = 104^\circ 41'$

ตรวจสอบ

จาก (4) ได้

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B_1-C)}{\cos\frac{1}{2}A_1} = \frac{\sin 9^\circ 47' 27''}{\cos 57^\circ 55' 51''}$$

$$= \frac{0.17005}{0.53095}$$

$$= 0.32027$$

และ $$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a_1} = \frac{\sin 14^\circ 41' 15''}{\sin 52^\circ 20' 30''}$$

$$= \frac{0.25355}{0.79167}$$

$$= 0.32027$$

กรณีที่ 2

พิจารณาเมื่อ $B_2 = 113°$ หา A_2 และ a_2

หา A_2 :

จาก (2) ได้ว่า

$$\cot\frac{1}{2}A_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}(b-c)}\tan\frac{1}{2}(B_2-C)$$

$$= \frac{\sin 67°\ 1'\ 3''}{\sin 14°\ 41'\ 15''}\tan 32°\ 47'\ 27''$$

$$= \frac{(0.92063)}{(0.25355)}(0.64423)$$

$$= 2.33917$$

$$\frac{1}{2}A_2 = \cot^{-1}(2.33917)$$

$$= 23°\ 8'\ 50''$$

$$\therefore \quad A_2 = 46°\ 17'\ 40''$$

จาก (3) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}a_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(B_2+C)}{\sin\frac{1}{2}(B_2-C)}\tan\frac{1}{2}(b-c)$$

$$= \frac{\sin 80°\ 12'\ 33''}{\sin 32°\ 47'\ 27''}\tan 14°\ 41'\ 15''$$

$$= \frac{(0.98544)}{(0.54167)}(0.26211)$$

$$= 0.47693$$

$$\frac{1}{2}a_2 = \tan^{-1}(0.47693)$$

$$= 25°\ 29'\ 37''$$

$$\therefore \quad a_2 = 50°\ 59'\ 14''$$

ดังนั้น จึงได้ว่า $B_2 = 113°$, $A_2 = 46°\ 17'\ 40''$ และ $a_2 = 50°\ 59'\ 42''$

ตรวจสอบ

จาก (4) ได้ว่า

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B_2-C)}{\cos\frac{1}{2}A_2} = \frac{\sin 32^\circ\ 47'\ 27''}{\cos 23^\circ\ 8'\ 50''}$$

$$= \frac{0.54157}{0.91950}$$

$$= 0.5889$$

และ

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a_2} = \frac{\sin 14^\circ\ 41'\ 15''}{\sin 25^\circ\ 29'\ 37''}$$

$$= \frac{0.25355}{0.43041}$$

$$= 0.5890$$

ดังนั้น จึงได้ว่า สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เมื่อกำหนด $b = 81^\circ\ 42'\ 18''$, $c = 52'\ 19'\ 48''$ และ $C = 47^\circ\ 25'\ 6''$ จะได้คำตอบเป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 คือ สามเหลี่ยม A_1B_1C มี $B_1 = 67^\circ$, $A_1 = 115^\circ\ 51'\ 42''$ และ $a_1 = 104^\circ\ 41'$

กรณีที่ 2 คือ สามเหลี่ยม A_2B_2C มี $B_2 = 113^\circ$, $A_2 = 46^\circ\ 17'\ 40''$ และ $a_2 = 50^\circ\ 59'\ 42''$ (ดูรูป 4.9.1 ประกอบ)

หมายเหตุ ตัวอย่าง 4.9.2 นี้ เราเรียกว่า กรณีกำกวมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC

4.9.2 เมื่อกำหนดมุมให้สองมุมและด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง (คือ กำหนด A, B, a หรือ A, B, b หรือ A, C, a หรือ A, C, c หรือ B, C, b หรือ B, C, c มาให้)

อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎของไซน์และสูตรการอุปมานของเนเปียร์ เช่น ถ้าโจทย์กำหนด A, B และ a มาให้ ก็อาจหาค่า b โดยใช้กฎของไซน์ที่ว่า

$$\sin b = \frac{\sin a}{\sin A}\sin B$$

แล้วหาด้าน c และมุม C โดยใช้สูตรการอุปมานของเนเปียร์ที่ว่า

$$\tan\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a-b)$$

และ $$\cot\frac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\tan\frac{1}{2}(A-B)$$

ตัวอย่าง 4.9.3 จงแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดให้ $A = 35° 52' 30''$, $B = 56° 10' 42''$ และ $a = 40° 38' 36''$

วิธีทำ

ในที่นี้ จะต้องหาค่า b, c และ C

สำหรับ b หาโดยใช้สูตร

$$\sin b = \frac{\sin a}{\sin A}\sin B \qquad \text{..........(1)}$$

สำหรับ c หาโดยใช้สูตร

$$\tan\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+A)}{\sin\frac{1}{2}(B-A)}\tan\frac{1}{2}(b-a) \qquad \text{..........(2)}$$

สำหรับ C หาโดยใช้สูตร

$$\cot\frac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(b-a)}\tan\frac{1}{2}(B-A) \qquad \text{..........(3)}$$

สูตรสำหรับตรวจสอบ คือ

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B+A)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\cos\frac{1}{2}c} \qquad \text{..........(4)}$$

หา b :

จาก (1) ได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin b &= \frac{\sin 40° 38' 36''}{\sin 35° 52' 30''}\sin 56° 10' 42'' \\ &= \frac{(0.65135)}{(0.58602)}(0.83077) \\ &= 0.92338\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad b = \sin^{-1}(0.92338)$$

$$= 67^\circ\ 25'\ 32'' \quad \text{หรือ } 112^\circ\ 34'\ 28''$$

จากโจทย์ ได้ว่า $B > A$

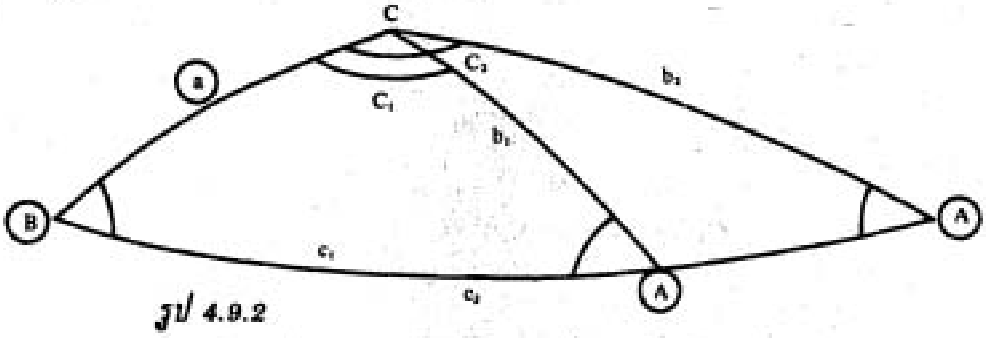
ดังนั้น ค่า b ที่นำมาใช้จะต้องมีความสัมพันธ์ว่า $b > a$ ด้วย

ดังนั้น $b = 67^\circ\ 25'\ 32''$ และ $112^\circ\ 34'\ 28''$

นั่นคือ b ใช้ได้ทั้งสองค่า

ให้ $b_1 = 67^\circ\ 25'\ 32''$ และ $b_2 = 112^\circ\ 34'\ 28''$

ดูรูป 4.9.2



รูป 4.9.2

กรณีที่ 1

พิจารณาเมื่อ $b_1 = 67^\circ\ 25'\ 32''$ หา c_1 และ C_1

หา c_1 :

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}c_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+A)}{\sin\frac{1}{2}(B-A)}\tan\frac{1}{2}(b_1-a)$$

$$= \frac{\sin 46^\circ\ 1'\ 36''}{\sin 10^\circ\ 9'\ 6''}\tan 13^\circ\ 23'\ 28''$$

$$= \frac{(0.71966)}{(0.17626)}(0.23807)$$

$$= 0.97202$$

$$\frac{1}{2}c_1 = \tan^{-1}(0.97202)$$

$$= 44^\circ\ 11'\ 13''$$

$$\therefore \qquad c_1 = 88^\circ\ 22'\ 26''$$

หา C_1 :

จาก (3) ได้ว่า

$$\cot\frac{1}{2}C_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}(b_1+a)}{\sin\frac{1}{2}(b_1-a)}\tan\frac{1}{2}(B-A)$$

$$= \frac{\sin 54^\circ\ 2'\ 4''}{\sin 13^\circ\ 23'\ 28''}\tan 10^\circ\ 9'\ 6''$$

$$= \frac{(0.80937)}{(0.23159)}(0.17906)$$

$$= 0.62578$$

$$\frac{1}{2}C_1 = \cot^{-1}(0.62578)$$

$$= 57^\circ\ 57'\ 45''$$

$$\therefore \quad C_1 = 115^\circ\ 55'\ 30''$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$b_1 = 67^\circ\ 25'\ 32''$, $c_1 = 88^\circ\ 22'\ 26''$ และ $C_1 = 115^\circ\ 55'\ 30''$

กรณีที่ 2

พิจารณาเมื่อ $b_2 = 112^\circ\ 34'\ 28''$ หา c_2 และ C_2

หา c_2 :

จาก (2) ได้ว่า

$$\tan\frac{1}{2}c_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+A)}{\sin\frac{1}{2}(B-A)}\tan\frac{1}{2}(b_2-a)$$

$$= \frac{\sin 46^\circ\ 1'\ 36''}{\sin 10^\circ\ 9'\ 6''}\tan 35^\circ\ 57'\ 56''$$

$$= \frac{(0.71966)}{(0.17626)}(0.72562)$$

$$= 2.9627$$

$$\frac{1}{2}c_2 = \tan^{-1}(2.9627)$$

$$= 71^\circ\ 20'\ 56''$$

$$\therefore \quad c_2 = 142^\circ\ 41'\ 52''$$

หา C_2 :

จาก (3) ได้ว่า

$$\cot\frac{1}{2}C_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(b_2+a)}{\sin\frac{1}{2}(b_2-a)}\tan\frac{1}{2}(B-A)$$

$$= \frac{\sin 76^\circ\ 36'\ 32''}{\sin 35^\circ\ 58'\ 56''}\tan 10^\circ\ 9'\ 6''$$

$$= \frac{(0.97281)}{(0.58753)}(0.17906)$$

$$= 0.29648$$

$$\frac{1}{2}C_2 = \cot^{-1}(0.29648)$$

$$= 73^\circ\ 29'\ 9''$$

ดังนั้น $C_2 = 146^\circ\ 58'\ 18''$

จึงได้ว่า $b_2 = 112^\circ\ 34'\ 28''$, $c_2 = 142^\circ\ 41'\ 52''$ และ $C_2 = 73^\circ\ 29'\ 9''$

สำหรับการตรวจสอบ ให้นักศึกษาตรวจสอบเอง

ดังนั้น จึงได้ว่าสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เมื่อกำหนด $A = 35^\circ\ 52'\ 30''$, $B = 56^\circ\ 10'\ 42''$, $a = 40^\circ\ 38'\ 36''$ จะได้คำตอบ 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 คือ สามเหลี่ยม AB_1C_1

มี $b_1 = 67^\circ\ 25'\ 32''$, $c_1 = 88^\circ\ 22'\ 26''$ และ $C_1 = 115^\circ\ 55'\ 30''$

กรณีที่ 2 คือ สามเหลี่ยม AB_2C_2

มี $b_2 = 112^\circ\ 34'\ 28''$, $c_2 = 142^\circ\ 41'\ 52''$ และ $C_2 = 73^\circ\ 29'\ 9''$ (ดูรูป 4.9.2 ประกอบ)

หมายเหตุ ตัวอย่าง 4.9.3 นี้ เราเรียกว่า กรณีกำกวมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC

แบบฝึกหัด 4.9

จงแก้สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ซึ่งกำหนดส่วนต่าง ๆ ให้ดังต่อไปนี้

1. $a = 52^\circ 45' 20''$, $b = 71^\circ 12' 40''$, $A = 46^\circ 22' 10''$
2. $a = 68^\circ 52' 48''$, $b = 56^\circ 49' 46''$, $B = 45^\circ 15' 12''$
3. $a = 34^\circ 0' 30''$, $A = 61^\circ 29' 30''$, $B = 24^\circ 30' 30''$
4. $a = 42^\circ 15' 20''$, $A = 36^\circ 20' 20''$, $B = 46^\circ 30' 40''$
5. $a = 59^\circ 28' 27''$, $A = 52^\circ 50' 20''$, $B = 66^\circ 7' 20''$
6. $a = 63^\circ 29' 56''$, $b = 132^\circ 14' 23''$, $C = 61^\circ 18' 27''$
7. $a = 98' 53' 12''$, $c = 64^\circ 35' 48''$, $A = 95^\circ 23' 24''$
8. $b = 37^\circ 47' 12''$, $c = 103^\circ 1' 24''$, $B = 24^\circ 25' 36''$
9. $a = 80^\circ 5' 18''$, $b = 82^\circ 4'$, $A = 83^\circ 34' 12''$
10. $A = 117^\circ 54' 24''$, $C = 45^\circ 8' 36''$, $a = 76^\circ 37' 30''$

บทสรุป สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง

4.1 ลักษณะของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียง คือ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมซึ่งไม่มีมุมหนึ่งมุมใดเป็นมุมฉากเลย

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มีองค์ประกอบหกส่วน คือ มุม A, B, C และด้าน a, b, c เมื่อกำหนดส่วนใด ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงมาให้อย่างน้อยสามส่วน จะสามารถหาส่วนที่เหลือได้

ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเฉียงมีทั้งหมด 6 กรณี คือ

กรณีที่ 1 กำหนดด้านให้สามด้าน

กรณีที่ 2 กำหนดมุมให้สามมุม

กรณีที่ 3 กำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้าน

กรณีที่ 4 กำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุม

กรณีที่ 5 กำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง

กรณีที่ 6 กำหนดมุมให้สองมุมกับด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง

การแก้ปัญหาในกรณีต่าง ๆ ทั้ง 6 กรณีนั้น จะต้องมีสูตรและกฎที่เหมาะสม ดังจะกล่าวต่อไป

4.2 กฎของไซน์ (Law of sines)

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

ข้อสังเกต ในการแก้ปัญหาโดยใช้กฎของไซน์นั้น ในบางครั้งอาจพบปัญหาว่า ส่วน

ที่หามาได้นั้นอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง หรือจตุตถภาคที่สอง หรืออาจจะอยู่ทั้งในจตุตถภาคที่หนึ่งและที่สองก็ได้ เนื่องจาก $\sin A = \sin(180° - A)$ นั่นเอง อย่างไรก็ตาม เราอาจจะพิจารณาได้โดยอาศัยคุณสมบัติของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่ว่า

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

(1) ถ้า $a < b < c$ แล้ว $A < B < C$

(2) $a+b > c$, $a+c > b$ และ $b+c > a$

4.3 กฎของโคไซน์สำหรับด้านและสำหรับมุม

4.3.1) กฎของโคไซน์สำหรับด้าน กล่าวว่า :

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

(2) $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$

(3) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

4.3.2) กฎของโคไซน์สำหรับมุม

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

(2) $\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$

(3) $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$

4.4 กฎห้าส่วน

กฎห้าส่วนเป็นกฎที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมสองมุมกับด้านสามด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ มีดังนี้

(1) $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$

(2) $\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$

(3) $\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$

(4) $\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$

(5) $\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$

(6) $\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$

ที่หามาได้นั้นอยู่ในจตุตถภาคที่หนึ่ง หรือจตุตถภาคที่สอง หรืออาจจะอยู่ทั้งในจตุตถภาคที่หนึ่งและที่สองก็ได้ เนื่องจาก $\sin A = \sin(180° - A)$ นั่นเอง อย่างไรก็ตาม เราอาจจะพิจารณาได้โดยอาศัยคุณสมบัติของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่ว่า

สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะได้ว่า

(1) ถ้า $a < b < c$ แล้ว $A < B < C$

(2) $a+b > c$, $a+c > b$ และ $b+c > a$

4.3 กฎของโคไซน์สำหรับด้านและสำหรับมุม

4.3.1) กฎของโคไซน์สำหรับด้าน กล่าวว่า :

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

(2) $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$

(3) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

4.3.2) กฎของโคไซน์สำหรับมุม

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

(2) $\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$

(3) $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$

4.4 กฎห้าส่วน

กฎห้าส่วนเป็นกฎที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมสองมุมกับด้านสามด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ มีดังนี้

(1) $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$

(2) $\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$

(3) $\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$

(4) $\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$

(5) $\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$

(6) $\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$

4.5 สูตรครึ่งมุมและสูตรครึ่งด้าน

4.5.1) สูตรครึ่งมุม

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $$\tan\frac{1}{2}A = \frac{r}{\sin(s-a)}$$

(2) $$\tan\frac{1}{2}B = \frac{r}{\sin(s-b)}$$

(3) $$\tan\frac{1}{2}C = \frac{r}{\sin(s-c)}$$

เมื่อ $$s = \frac{a+b+c}{2}$$

และ $$r = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

4.5.2) สูตรครึ่งด้าน

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $$\cot\frac{1}{2}a = \frac{R}{\cos(S-A)}$$

(2) $$\cot\frac{1}{2}b = \frac{R}{\cos(S-B)}$$

(3) $$\cot\frac{1}{2}c = \frac{R}{\cos(S-C)}$$

เมื่อ $$S = \frac{A+B+C}{2}$$

และ $$R = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}}$$

4.6 การอุปมานของเกาส์และของเนเปียร์

4.6.1) การอุปมานของเกาส์ (Gauss's analogies)

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}$$

(2) $$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c}$$

(3) $$\frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}c}$$

(4) $$\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c}$$

และสูตรที่อยู่ในรูปอื่น ๆ ซึ่งได้จากการเปลี่ยนอักษรของ (1) ถึง (4) เป็นวัฏจักร จะทำให้ได้สูตรอีก 8 สูตร รวมเป็นสูตรทั้งหมด 12 สูตรด้วยกัน

4.6.2) การอุปมานของเนเปียร์ (Napier's analogies)

ในสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ใด ๆ จะได้ว่า

(1) $$\frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}$$

(2) $$\frac{\tan \frac{1}{2}(a-b)}{\tan \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}$$

(3) $$\frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}$$

(4) $$\frac{\tan \frac{1}{2}(a+b)}{\tan \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}$$

และสูตรที่อยู่ในรูปอื่น ๆ ซึ่งได้จากการเปลี่ยนอักษรของ (1) ถึง (4) เป็นวัฏจักร ซึ่งจะได้สูตรเพิ่มอีก 8 สูตร รวมเป็น 12 สูตร

4.7 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สามด้าน และกรณีกำหนดมุมให้สามมุม

4.7.1) เมื่อกำหนดด้านให้สามด้าน คือ กำหนดด้าน a, b และ c มาให้ อาจแก้ปัญหา

โดยใช้กฎโคไซน์สำหรับด้านหรือใช้สูตรครึ่งมุมก็ได้

4.7.2) เมื่อกำหนดมุมให้สามมุม คือ กำหนดมุม A, B และ C มาให้ อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม หรือใช้สูตรครึ่งด้านก็ได้

4.8 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้าน และกรณีกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุม

4.8.1) เมื่อกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมระหว่างด้านทั้งสอง คือ กำหนด a, c, B หรือ b, c, A หรือ a, b, C มาให้ อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับด้าน หรือใช้สูตรการอุปมานของเนเปียร์ก็ได้

4.8.2) เมื่อกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านระหว่างมุมทั้งสอง คือ กำหนด A, C, b หรือ B, C, a หรือ A, B, c มาให้ อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎโคไซน์สำหรับมุม หรือใช้สูตรการอุปมานของเนเปียร์ หรือใช้หลักการของสามเหลี่ยมเชิงขั้วกับกฎโคไซน์สำหรับด้านหรือกับอุปมานของเนเปียร์ก็ได้

4.9 การแก้ปัญหากรณีกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง และกรณีกำหนดมุมให้สองมุมกับด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง

4.9.1) เมื่อกำหนดด้านให้สองด้านกับมุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง คือ กำหนด a, b, A หรือ a, b, B หรือ a, c, A หรือ a, c, C หรือ b, c, B หรือ b, c, C มาให้ อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎของไซน์และสูตรการอุปมานของเนเปียร์

4.9.2) เมื่อกำหนดมุมให้สองมุมและด้านตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่ง คือกำหนด A, B, a หรือ A, B, b หรือ A, C, a หรือ A, C, c หรือ B, C, b หรือ B, C, c มาให้ อาจแก้ปัญหาโดยใช้กฎของไซน์และสูตรการอุปมานของเนเปียร์