

บทที่ 2

เรขาคณิตเชิงทรงกลม (Spherical Geometry)

หัวข้อเรื่อง

- 2.1 รูปทรงกลม (sphere)
- 2.2 จุดและเส้นบนทรงกลม
- 2.3 มุมเชิงทรงกลม (spherical angle)
- 2.4 สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (spherical triangle)
- 2.5 พื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม
- 2.6 รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม

วัตถุประสงค์ประจำบทเรียน

หลังจากศึกษาบทที่ 2 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. บอกความหมายและอธิบายลักษณะของรูปทรงกลมได้
2. อธิบายความหมายของวงกลมใหญ่ (great circle) วงกลมเล็ก (small circle) ระยะขั้ว (polar distance) ระยะเชิงทรงกลม (spherical distance) และมุมเชิงทรงกลม (spherical angle) ได้
3. บอกลักษณะมุมและด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (spherical triangle) ได้
4. บอกคุณสมบัติต่างๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมได้
5. แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิวทรงกลมกับพื้นที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมได้

บทที่ 2

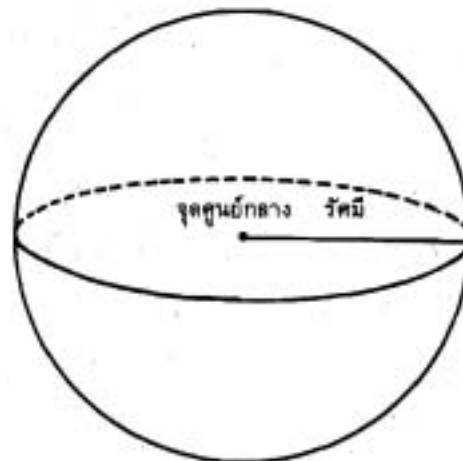
เรขาคณิตเชิงทรงกลม (Spherical Geometry)

2.0 บทนำ

ตรีโกณมิติเชิงระนาบ (plane trigonometry) เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของสามเหลี่ยมในระนาบ (plane triangle) ซึ่งเราทราบกันดีอยู่แล้ว แต่ตรีโกณมิติเชิงทรงกลม (spherical trigonometry) นั้น เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของสามเหลี่ยมบนผิวของทรงกลม ที่เราเรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (spherical triangle) ดังนั้น พื้นฐานในการศึกษาตรีโกณมิติเชิงทรงกลม ที่สำคัญยิ่งก็คือ ต้องอาศัยพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงทรงกลม (spherical geometry) เพราะฉะนั้นในบทนี้ จะกล่าวเรื่องราวเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงทรงกลม ในส่วนที่เกี่ยวข้องที่จะนำไปใช้ศึกษาตรีโกณมิติเชิงทรงกลมต่อไป

2.1 รูปทรงกลม (Sphere)

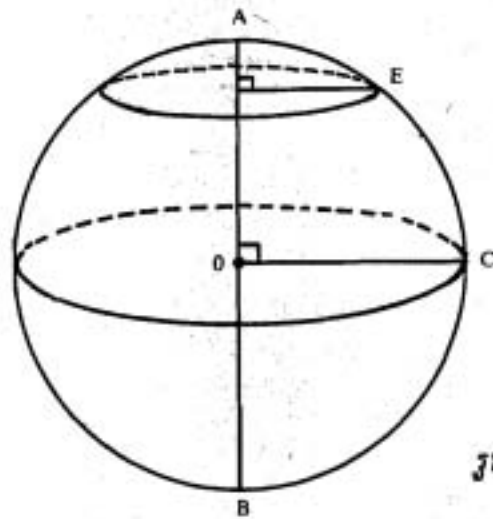
นิยาม 2.1.1 รูปทรงกลม คือ รูปที่ล้อมรอบด้วยผิวโค้ง โดยที่ทุก ๆ จุดบนผิวโค้งมีระยะห่างจากจุด ๆ หนึ่งเท่ากัน จุดคงที่จุดนั้น เรียกว่า จุดศูนย์กลางของทรงกลม ส่วนของเส้นตรงใด ๆ ที่เชื่อมระหว่างจุดบนผิวโค้งของทรงกลมกับจุดศูนย์กลางของทรงกลม เรียกว่า เส้นรัศมีของทรงกลม ความยาวของเส้นรัศมี เรียกว่า รัศมีของทรงกลม ดังรูป 2.1.1



รูป 2.1.1

หรืออาจกล่าวได้ว่า

ทรงกลมเกิดจากการหมุนครึ่งวงกลมรอบเส้นผ่านศูนย์กลาง ซึ่งทำหน้าที่เป็นแกนของการหมุน ปลายนอกของเส้นรัศมีที่ตั้งฉากกับแกนจะทำให้เกิดวงกลมใหญ่ ในขณะที่ปลายนอกของเส้นคอร์ดิอื่น ๆ ที่ตั้งฉากกับแกน (เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะทำให้เกิดวงกลมเล็ก ดังรูป 2.1.2



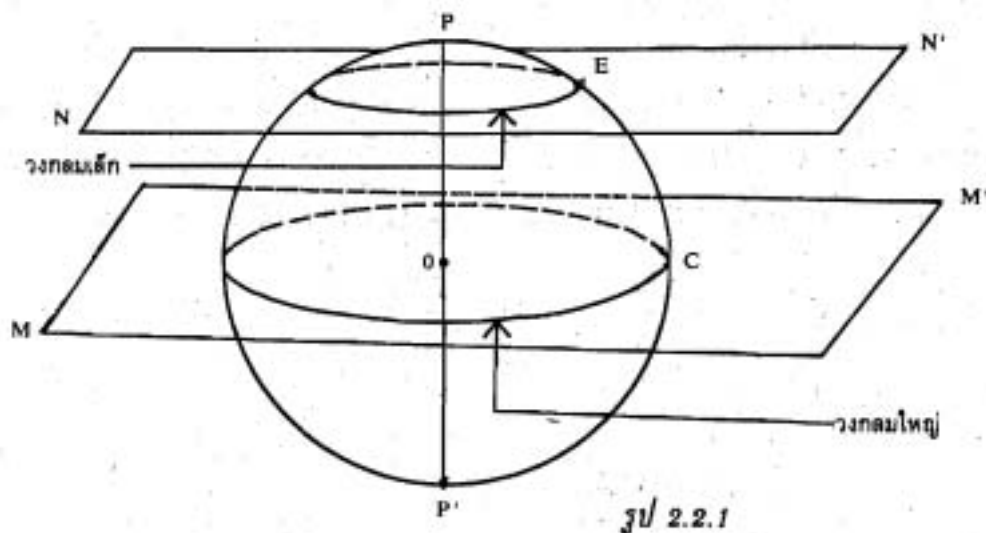
รูป 2.1.2

จากรูป 2.1.2 ทรงกลม O เกิดจากการหมุนครึ่งวงกลม ABC รอบเส้นผ่านศูนย์กลาง AB ซึ่งทำหน้าที่เป็นแกนของการหมุน ในกระบวนการเช่นนี้ จุด C ซึ่งเป็นจุดปลายนอกของรัศมี ที่ตั้งฉากกับแกนย่อมทำให้เกิดวงกลมใหญ่ โดยที่จุด E ซึ่งเป็นจุดปลายนอกของเส้นคอร์ดิที่ตั้งฉากกับแกน ย่อมทำให้เกิดวงกลมเล็ก

2.2 จุดและเส้นบนทรงกลม

เรขาคณิตเชิงทรงกลม (spherical geometry) เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของจุด เส้น สามเหลี่ยม ฯลฯ บนพื้นผิวของทรงกลม ซึ่งสิ่งเหล่านี้มีความหมายแตกต่างไปจากความหมายในเรขาคณิตเชิงระนาบ (plane) ข้อแตกต่างประการแรกก็คือ ความหมายของคำว่า "เส้น" ในเรขาคณิตเชิงระนาบ "เส้น" หมายถึง "เส้นตรง" แต่ในเรขาคณิตเชิงทรงกลม "เส้น" หมายถึง "วงกลมใหญ่" (great circle)

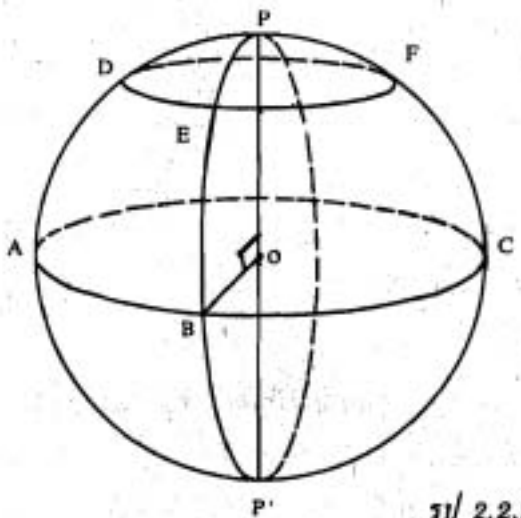
วงกลมใหญ่ (great circle) คือ วงกลมที่เกิดจากระนาบตัดทรงกลม โดยระนาบนั้นตัดผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม ซึ่งเส้นตัดจะเป็นวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากับรัศมีของทรงกลม แต่ถ้าระนาบตัดทรงกลมโดยที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม เส้นตัดจะเป็นวงกลมที่มีรัศมีสั้นกว่ารัศมีของทรงกลม เรียกวงกลมนี้ว่า วงกลมเล็ก (small circle) ดังรูป 2.2.1



รูป 2.2.1

เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม ซึ่งตั้งฉากกับระนาบของวงกลม เรียกว่า แกน (axis) ของวงกลม แกนนี้จะตัดทรงกลม 2 จุด เรียกจุดทั้งสองนี้ว่า ขั้ว (pole) ของวงกลม (ทั้งวงกลมเล็กและวงกลมใหญ่) ในรูป 2.2.1 จุด P และ P' เป็นขั้วของทั้งวงกลมเล็กและวงกลมใหญ่ ทั้งนี้เพราะว่าเส้นผ่านศูนย์กลาง PP' ตั้งฉากกับระนาบ MM' ซึ่งเป็นระนาบของวงกลมใหญ่ ดังนั้น P และ P' จึงเป็นขั้วของวงกลมใหญ่ และในขณะเดียวกัน เส้นผ่านศูนย์กลาง PP' ก็ตั้งฉากกับระนาบ NN' ซึ่งเป็นระนาบของวงกลมเล็ก ดังนั้น P และ P' จึงเป็นขั้วของวงกลมเล็กด้วย

ระยะขั้ว (polar distance) ของวงกลม คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลม ซึ่งวัดจากจุดใดจุดหนึ่งของวงกลม ไปยังขั้วของวงกลมนั้น ดังรูป 2.2.2

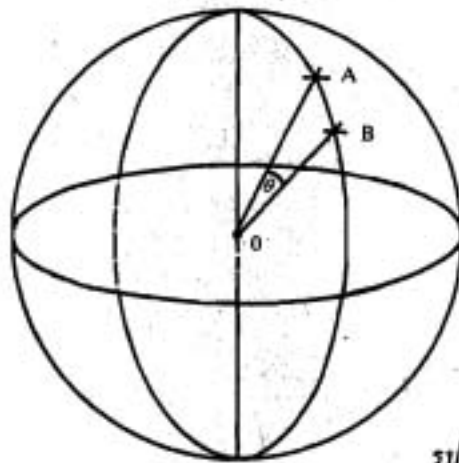


รูป 2.2.2

จากรูป 2.2.2 ระยะซั้วของวงกลมใหญ่ ABC เป็น 90° เพราะว่า ส่วนโค้ง PB มีความยาวเป็น 90° และระยะซั้วของวงกลมเล็ก DEF คือ ความยาวของส่วนโค้ง PE หรือ PF

ข้อสังเกต อาจกล่าวได้ว่า ระยะซั้วของวงกลมใหญ่ทั้งหมดเป็น 90°

ระยะเชิงทรงกลม (spherical distance) ระหว่างจุด 2 จุด คือ ความยาวของส่วนโค้งน้อย (minor arc) ของวงกลมใหญ่ที่ผ่านจุดทั้งสองนั้น ส่วนโค้งน้อยนี้เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุด บนผิวของทรงกลม ดังรูป 2.2.3 ระยะทางระหว่าง จุด A และจุด B ก็คือ ส่วนโค้งน้อย AB



รูป 2.2.3

โดยทั่ว ๆ ไป เรามักบอกความยาวส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ด้วยมุมซึ่งรอบรับส่วนโค้งนี้ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม ดังนั้น จากรูป 2.2.3 จะได้ว่า ส่วนโค้ง AB มีความยาวเป็น θ และได้ด้วยว่า หนึ่งในสี่ของวงกลมใหญ่ย่อมมีความยาวส่วนโค้งเป็น 90° โดยทั่ว ๆ ไป จุดสองจุดใด ๆ บนผิวของทรงกลม โดยที่จุดทั้งสองนี้ ไม่เป็นจุดปลายสุดของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมแล้ว จุดทั้งสองนี้ย่อมอยู่บนวงกลมใหญ่ จากรูป 2.2.3 A และ B เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บนผิวของทรงกลม โดยที่ เส้นตรง AB ไม่เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม แล้วย่อมได้ว่า จุด A, B และจุดศูนย์กลาง O ของทรงกลม ย่อมประกอบกันเป็นระนาบขึ้นหนึ่งระนาบ และระนาบนี้ตัดทรงกลมเป็นวงกลมใหญ่

ข้อสังเกต

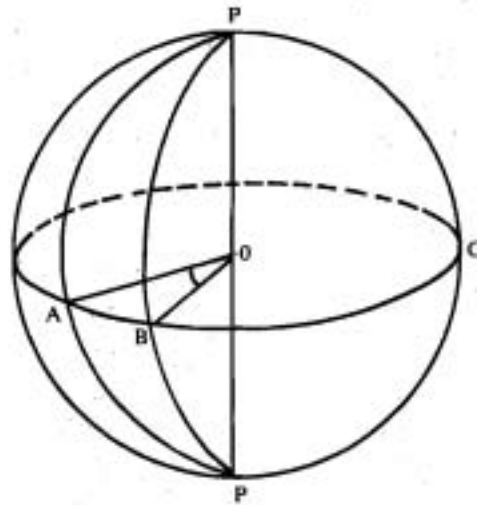
(1) จุด 2 จุดใด ๆ บนผิวของทรงกลมที่ไม่ใช่จุดซั้ว ย่อมทำให้เกิดวงกลมใหญ่เพียงวงเดียวเท่านั้น

(2) วงกลมใหญ่ 2 วงใด ๆ บนผิวทรงกลม ย่อมตัดกันสองแห่ง

2.3 มุมเชิงทรงกลม (spherical angle)

มุมเชิงทรงกลม คือ มุมที่เกิดจากส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สองวงตัดกัน เรียกส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ว่า แขน (side) และเรียกจุดตัดของวงกลมใหญ่ทั้งสองว่า จุดยอด (vertex) ของมุมเชิงทรงกลม

มุมเชิงทรงกลม มีขนาดของมุมเท่ากับมุมระหว่างสองระนาบที่เกิดจากระนาบของวงกลมใหญ่ ซึ่งมีส่วนโค้งเป็นแขนของมุมเชิงทรงกลม ดังรูป 2.3.1



รูป 2.3.1

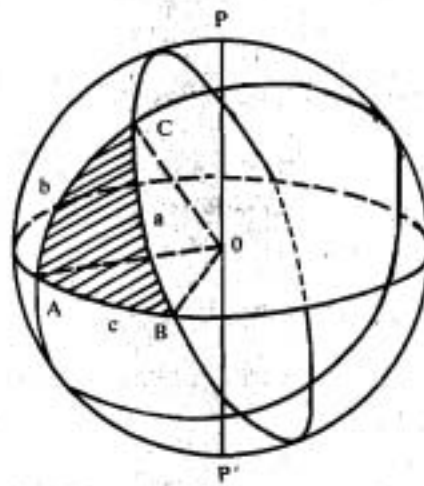
จากรูป 2.3.1 APB เป็นมุมเชิงทรงกลมบนทรงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง โดยมี P เป็นจุดยอด และส่วนโค้ง PA กับ PB เป็นแขนของมุมเชิงทรงกลม APB และวงกลม ABC เป็นวงกลมใหญ่ที่มีจุดยอด P ของมุมเชิงทรงกลมเป็นขั้ว มุมระหว่างสองระนาบ $A-P_0-B$ ก็คือมุมระนาบ AOB ซึ่งเป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง O ของวงกลม ABC และยังได้ว่า มุม AOB วัดเป็นองศาได้เท่ากับความยาวของส่วนโค้ง AB (เพราะว่ามุมที่ศูนย์กลางของวงกลมวัดเป็นองศาหรือเรเดียน เท่ากับความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้น)

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า มุมเชิงทรงกลม (spherical angle) วัดเป็นองศาได้เท่ากับส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมนั้น

2.4 สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (spherical triangle)

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม คือ ส่วนของผิวทรงกลมที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สามวง ส่วนโค้งของวงกลมใหญ่แต่ละวงที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมนี้ เราเรียกว่า ด้าน

(sides) และจุดยอดของมุมเชิงทรงกลมทั้งสามมุม เราเรียกว่า จุดยอด (vertices) ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม โดยปกติเรามักใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่ A, B, C แทนจุดยอดของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม และใช้อักษรตัวพิมพ์เล็ก a, b และ c แทนด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุม A, B และ C ตามลำดับ พิจารณา รูป 2.4.1



รูป 2.4.1

จากรูป 2.4.1 ได้ว่า A, B และ C เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับจุดศูนย์กลาง O ของทรงกลม คือ ลากเส้น OA, OB และ OC แล้วจะทำให้เกิดมุมระหว่างสามระนาบ (trihedral angle) ที่ศูนย์กลางของทรงกลม ขึ้น คือ มุม O-ABC (นั่นคือ ระนาบของวงกลมใหญ่ทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ทำให้เกิดมุมระหว่างสามระนาบขึ้นที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม) วัดความยาวของด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้วยมุมหน้า (face angle) ของมุมระหว่างสามระนาบ นั่นคือ วัดความยาวของด้าน a, b และ c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้วยมุมหน้า BOC, COA และ AOB ของมุมระหว่างสามระนาบตามลำดับ และวัดขนาดของมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ด้วยมุมระหว่างสองระนาบที่เกิดจากระนาบของด้านคู่หนึ่ง นั่นคือ วัดขนาดของมุม A ด้วยมุมระหว่างสองระนาบ B-OA-C วัดขนาดของมุม B ด้วยมุมระหว่างสองระนาบ A-OB-C และวัดขนาดของมุม C ด้วยมุมระหว่างสองระนาบ A-OC-B

ข้อสังเกต เนื่องจากวัดความยาวของด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ด้วยมุมหน้าของมุมระหว่างสามระนาบ ดังนั้น ด้าน a, b, c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม จึงวัดเป็นองศาหรือเรเดียน

โดยทั่ว ๆ ไป เราจะพิจารณาเฉพาะสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีด้านแต่ละด้าน และมุมแต่ละมุม น้อยกว่า 180° ซึ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมดังกล่าวจะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

- (1) ด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งรวมกันย่อมมากกว่าด้านที่สาม นั่นคือ $a + b > c$, $a + c > b$ และ $b + c > a$
- (2) ด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่ง รวมกันเข้าย่อมน้อยกว่า 360° นั่นคือ $0^\circ < a + b + c < 360^\circ$
- (3) ถ้าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่ง ยาวเท่ากันแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองย่อมมีขนาดเท่ากัน
- (4) ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีขนาดเท่ากันแล้ว ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสองย่อมยาวเท่ากัน
- (5) ถ้าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีความยาวไม่เท่ากันแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสองย่อมมีขนาดไม่เท่ากัน และมุมที่ใหญ่กว่าย่อมอยู่ตรงข้ามกับด้านที่ยาวกว่า
- (6) ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีขนาดไม่เท่ากันแล้ว ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสองย่อมยาวไม่เท่ากัน และด้านที่ยาวกว่าย่อมอยู่ตรงข้ามกับมุมที่ใหญ่กว่า
- (7) มุมทั้งสามมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่ง รวมกันมากกว่า 180° และน้อยกว่า 540°

$$\text{นั่นคือ } 180^\circ < A + B + C < 540^\circ$$

- (8) มุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่ง รวมกันย่อมน้อยกว่าผลบวกระหว่างมุมที่สามกับ 180°

$$\text{นั่นคือ } A + B < C + 180^\circ$$

$$A + C < B + 180^\circ$$

$$\text{และ } B + C < A + 180^\circ$$

ข้อสังเกต

สามเหลี่ยมบนระนาบมีมุมฉากอย่างมากหนึ่งมุม หรือมีมุมป้านอย่างมากหนึ่งมุม แต่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมอาจมีสองหรือสามมุมฉาก หรืออาจมีมุมป้านสองหรือสามมุมป้าน สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมฉากเพียงหนึ่งมุม เรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก (right spherical triangle) สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมฉากสองมุม เรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

สองมุมฉาก (birectangular spherical triangle) และสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมฉากสามมุม เรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมสามมุมฉาก (trirectangular spherical triangle)

มุมส่วนเกินเชิงทรงกลม (spherical excess) คือ ผลต่างระหว่างผลบวกของมุมของรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม กับผลบวกของมุมของรูปสามเหลี่ยมบนระนาบ หรืออาจกล่าวได้ว่า มุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ก็คือ จำนวนองศาที่มุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเกินกว่า 180° มักเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ E

เช่น สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุม $A = 75^\circ$, $B = 82^\circ$ และ $C = 125^\circ$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} E &= (A + B + C) - 180^\circ \\ &= (75^\circ + 82^\circ + 125^\circ) - 180^\circ \\ &= 102^\circ \end{aligned}$$

แสดงว่า $E = 102^\circ$ เป็นมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC

การเท่ากันทุกประการของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

ถ้าสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมสองรูปอยู่บนทรงกลมเดียวกัน หรือทรงกลมที่เท่ากัน มีมุมทั้งสามของรูปหนึ่งเท่ากับมุมทั้งสามของอีกรูปหนึ่งตามลำดับแล้ว สามเหลี่ยมทั้งสองย่อมเท่ากันทุกประการ

ข้อสังเกต สำหรับสามเหลี่ยม 2 รูปบนระนาบ ถ้ามีมุมทั้งสามที่ได้ลำดับกันเท่ากันแล้ว สามเหลี่ยมทั้งสองจะเป็นสามเหลี่ยมคล้าย แต่สำหรับบนทรงกลมแล้ว สามเหลี่ยมทั้งสองจะเท่ากันทุกประการ ดังนั้น ในเรขาคณิตเชิงทรงกลม จึงไม่มีสามเหลี่ยมคล้าย

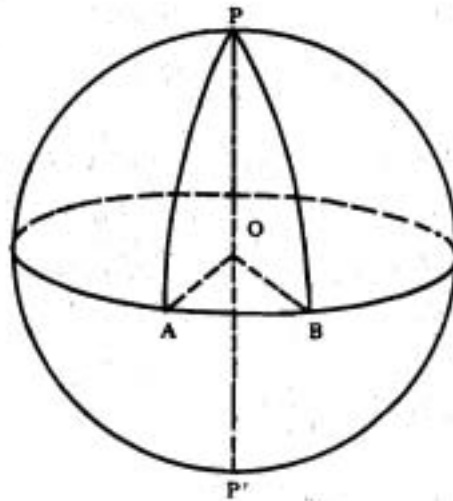
ตัวอย่าง 2.4.1 ให้ A และ B เป็นจุดของวงกลมใหญ่ 2 จุด ซึ่งอยู่บนผิวทรงกลมที่มี 0 เป็นจุดศูนย์กลาง และให้จุด P เป็นขั้วของวงกลมใหญ่แล้ว จงแก้ปัญหของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABP เมื่อกำหนดให้

(1) $AB = 75^\circ$

(2) $AB = 90^\circ$

วิธีทำ

ลากส่วนโค้งของวงกลมใหญ่เชื่อม AP และ BP ดังรูป 2.4.1



รูป 2.4.1

เพราะว่า ทุก ๆ จุดบนวงกลมใหญ่ ย่อมมีระยะห่างจากจุดขั้วของวงกลมใหญ่เป็น 90° ดังนั้น $AP = BP = 90^\circ$

มุมเชิงทรงกลม PAB หรือมุม A ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABP วัดขนาดได้ด้วยมุมระหว่างสองระนาบ P-AO-B ซึ่งมีหน้าของมุมเป็นระนาบที่ตั้งฉากกัน ดังนั้น มุม A = 90°

และมุมเชิงทรงกลม PBA หรือมุม B วัดขนาดได้ด้วยมุมระหว่างสองระนาบ P-BO-A ซึ่งมีหน้าของมุมเป็นระนาบที่ตั้งฉากกัน ดังนั้น มุม B = 90°

(1) เพราะว่ามีมุมเชิงทรงกลม APB หรือ มุม P วัดขนาดได้ด้วยมุมระนาบ AOB ซึ่งมีขนาดเท่ากับส่วนโค้ง AB

จากกำหนดให้ $AB = 75^\circ$

ดังนั้น ด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABP ก็คือ $AP = 90^\circ, BP = 90^\circ$ และ $AB = 75^\circ$ และมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABP ก็คือ $A = 90^\circ, B = 90^\circ$ และ $P = 75^\circ$

(2) กำหนดให้ $AB = 90^\circ$

ดังนั้น ในทำนองเดียวกันกับ (1) จึงได้ว่า

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABP มีด้าน $AP = BP = AB = 90^\circ$ และมีมุม $A = B = P = 90^\circ$

ตัวอย่าง 2.4.2 ในแต่ละข้อต่อไปนี่ จงพิจารณาว่า สิ่งต่าง ๆ ที่กำหนดมาให้สามารถเป็นด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ได้หรือไม่

(1) $AB = 60^\circ, BC = 80^\circ, CA = 100^\circ$

(2) $AB = 45^\circ, BC = 55^\circ, CA = 125^\circ$

(3) $AB = 100^\circ, BC = 120^\circ, CA = 150^\circ$

วิธีทำ

(1) จาก $AB = 60^\circ$, $BC = 80^\circ$ และ $CA = 100^\circ$ จะได้ว่า AB , BC และ CA สามารถประกอบเป็นด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ได้ เพราะว่า ผลรวมของความยาวของด้านสองด้านใด ๆ ยาวกว่าด้านที่สาม คือ

$$AB + BC > CA \quad (60^\circ + 80^\circ > 100^\circ)$$

$$AB + CA > BC \quad (60^\circ + 100^\circ > 80^\circ)$$

$$BC + CA > AB \quad (80^\circ + 100^\circ > 60^\circ)$$

และความยาวของด้านทั้งสามรวมกันน้อยกว่า 360° คือ $AB + BC + CA < 360^\circ$ หรือ $60^\circ + 80^\circ + 100^\circ = 240^\circ < 360^\circ$

(2) จาก $AB = 45^\circ$, $BC = 55^\circ$ และ $CA = 125^\circ$

จะได้ว่า AB , BC และ CA ไม่สามารถประกอบเป็นด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เพราะว่า $AB + BC < CA$

$$\text{หรือ} \quad 45^\circ + 55^\circ = 100^\circ < 125^\circ$$

(3) จาก $AB = 100^\circ$, $BC = 120^\circ$ และ $CA = 150^\circ$

จะได้ว่า AB , BC และ CA ไม่สามารถประกอบเป็นด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เพราะว่า $AB + BC + CA > 360^\circ$

$$\text{หรือ} \quad 100^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 370^\circ > 360^\circ$$

ข้อสังเกต ในข้อ (3) นี้ ผลรวมของด้านสองด้านใด ๆ ต่างก็ยาวกว่าด้านที่สาม แต่ผลรวมของด้านสามด้านยาวกว่า 360° จึงไม่ใช่ด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงแก้ปัญหของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เมื่อกำหนดให้
 - 1.1) $A = B = C = 90^\circ$
 - 1.2) $a = b = 90^\circ, c = 60^\circ$
 2. จงพิจารณาว่า เป็นไปได้หรือไม่ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของด้านทั้งสามดังนี้
 - 2.1) $160^\circ, 110^\circ, 85^\circ$
 - 2.2) $170^\circ, 150^\circ, 10^\circ$
 - 2.3) $170^\circ, 150^\circ, 50^\circ$
 - 2.4) $30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$
 3. จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสามดังนี้
 - 3.1) $30^\circ, 37^\circ, 128^\circ$
 - 3.2) $30^\circ, 37^\circ, 111^\circ$
 - 3.3) $37^\circ, 51^\circ, 131^\circ$
 - 3.4) $40^\circ, 85^\circ, 140^\circ$
 - 3.5) $60^\circ, 70^\circ, 90^\circ$
 - 3.6) $60^\circ, 115^\circ, 145^\circ$
 - 3.7) $60^\circ, 20^\circ, 90^\circ$
-

2.5 พื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

ถ้าทรงกลมมีรัศมียาวเท่ากับ R แล้ว พื้นที่ผิวของทรงกลม คือ $4\pi R^2$ และพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมบนผิวของทรงกลมนี้ คือ $\frac{\pi R^2 E}{180}$ เมื่อ E เป็นมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมที่อยู่ในรูปองศาของสามเหลี่ยม

หรือ อาจกล่าวได้ว่า ถ้าให้ K เป็นพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่อยู่บนผิวทรงกลมที่มีรัศมี คือ R แล้ว

$$K = \frac{\pi R^2 E}{180} \quad \text{ถ้า } E \text{ เป็นมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมที่มีหน่วยเป็นองศา}$$

หรือ $K = R^2 E$ ถ้า E เป็นมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน

ข้อสังเกต

สามเหลี่ยม 2 รูปที่มีผลบวกของมุมภายในเท่ากัน ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน

ตัวอย่าง 2.5.1 ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ที่มีมุม $A = 150^\circ$, $B = 138^\circ$, $C = 132^\circ$ ซึ่งอยู่บนผิวทรงกลมที่มีรัศมียาว 10 หน่วย แล้ว

- (1) จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC
- (2) จงหาพื้นที่ผิวของทรงกลม
- (3) จงหาอัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม กับพื้นที่ผิวของทรงกลม

วิธีทำ

(1) จาก ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม โดยที่มุม $A = 150^\circ$, $B = 138^\circ$ และ $C = 132^\circ$

$$\text{จาก } E = A + B + C - 180^\circ$$

$$\begin{aligned}\therefore E &= 150^\circ + 138^\circ + 132^\circ - 180^\circ \\ &= 420^\circ - 180^\circ \\ &= 240^\circ\end{aligned}$$

ถ้า K เป็นพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม แล้ว

$$K = \frac{\pi R^2 E}{180}$$

ในที่นี้ $R = 10$, $E = 240^\circ$

$$\begin{aligned}\therefore K &= \frac{\pi(10)^2(240^\circ)}{180} \\ &= \frac{400\pi}{3}\end{aligned}$$

ดังนั้น สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มีพื้นที่เท่ากับ $\frac{400\pi}{3}$ ตารางหน่วย

(2) จากทรงกลมมีรัศมียาว 10 หน่วย

ดังนั้น พื้นที่ผิวทรงกลม คือ $4\pi(10)^2 = 400\pi$ ตารางหน่วย

(3) อัตราส่วนระหว่างพื้นที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับพื้นที่ผิวทรงกลม

$$\text{คือ } \frac{400\pi/3}{400\pi} = \frac{1}{3}$$

แบบฝึกหัด 2.5

กำหนดให้ทรงกลม O มีรัศมียาว 10 หน่วย จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC บนผิวของทรงกลมนี้ และอัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับพื้นที่ผิวของทรงกลม เมื่อกำหนดส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ให้ดังต่อไปนี้

1. $A = B = C = 110^\circ$
 2. $A = 60^\circ, B = 70^\circ, C = 90^\circ$
 3. $A = 30^\circ, B = 37^\circ, C = 128^\circ$
 4. $A = 37^\circ, B = 51^\circ, C = 131^\circ$
 5. $a = b = 90^\circ, c = 60^\circ$
-

2.6 รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม (spherical polygons)

รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม คือ ส่วนบนพื้นผิวของทรงกลมที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สามวง หรือมากกว่า รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลมทุกรูปมีมุมระหว่างหลายระนาบ (polyhedral angle) ซึ่งจุดยอดของมุมอยู่ที่ศูนย์กลางของทรงกลม ขนาดด้านของรูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลมวัดได้ด้วยมุมหน้าของมุมระหว่างหลายระนาบที่สมนัยกัน

สำหรับ รูป n เหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ สามารถแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมได้ $n-2$ รูป โดยการลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่ง และผลรวมมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเหล่านี้ ย่อมเท่ากับผลรวมของผลต่างระหว่างผลบวกของมุมของรูปหลายเหลี่ยมกับ $(n-2)180^\circ$ หรืออาจกล่าวได้ว่า ผลรวมมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเหล่านี้ เท่ากับผลรวมมุมของรูปหลายเหลี่ยม ลบด้วย $(n-2)180^\circ$ โดยจะเรียกผลต่างนี้ว่า มุมส่วนเกินเชิงทรงกลม (spherical excess) ของรูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม

ข้อสังเกต

เนื่องจากผลบวกของมุมของรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมมากกว่า 2 มุมฉาก จึงได้ว่าผลบวกของมุมของรูปสี่เหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ ย่อมมากกว่า 4 มุมฉาก ดังนั้น ในเรขาคณิตเชิงทรงกลม จึงไม่มีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงทรงกลม

บทสรุป เรขาคณิตเชิงทรงกลม

2.1 รูปทรงกลม (Sphere)

นิยาม 2.1.1 รูปทรงกลม คือ รูปที่ล้อมรอบด้วยผิวโค้ง โดยที่ทุก ๆ จุดบนผิวโค้งมีระยะห่างจากจุด ๆ หนึ่งเท่ากัน จุดคงที่จุดนั้นเรียกว่า จุดศูนย์กลางของทรงกลม ส่วนของเส้นตรงใด ๆ ที่เชื่อมระหว่างจุดบนผิวโค้งของทรงกลมกับจุดศูนย์กลางของทรงกลม เรียกว่า เส้นรัศมีของทรงกลม ความยาวของเส้นรัศมีเรียกว่า รัศมีของทรงกลม

2.2 จุดและเส้นบนทรงกลม

วงกลมใหญ่ (great circle) คือ วงกลมที่เกิดจากระนาบตัดทรงกลม โดยระนาบนั้นตัดผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม ซึ่งเส้นตัดจะเป็นวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากับรัศมีของทรงกลม ถ้าระนาบตัดทรงกลมโดยที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม เส้นตัดจะเป็นวงกลมที่มีรัศมีสั้นกว่ารัศมีของทรงกลม เรียกวงกลมนี้ว่า วงกลมเล็ก (small circle) เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมซึ่งตั้งฉากกับระนาบของวงกลม เรียกว่า แกน (axis) ของวงกลม แกนนี้จะตัดทรงกลม 2 จุด เรียกจุดทั้งสองนี้ว่า ขั้ว (pole) ของวงกลม

ระยะขั้ว (polar distance) ของวงกลม คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลม ซึ่งวัดจากจุดใดจุดหนึ่งบนวงกลมไปยังขั้วของวงกลมนั้น

ข้อสังเกต

(1) จุด 2 จุดใด ๆ บนผิวของทรงกลมที่ไม่ใช่จุดขั้ว ย่อมทำให้เกิดวงกลมใหญ่เพียงวงเดียวเท่านั้น

(2) วงกลมใหญ่ 2 วงใด ๆ บนผิวทรงกลมย่อมตัดกันสองแห่ง

2.3 มุมเชิงทรงกลม (Spherical angle)

มุมเชิงทรงกลม คือ มุมที่เกิดจากส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สองวงตัดกัน เรียกส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ว่า แขน (side) และเรียกจุดตัดของวงกลมใหญ่ทั้งสองว่า จุดยอด (vertex) ของมุมเชิงทรงกลม มุมเชิงทรงกลมมีขนาดของมุมเท่ากับมุมระหว่างสองระนาบที่เกิดจากระนาบของวงกลมใหญ่ ซึ่งมีส่วนโค้งเป็นแขนของมุมเชิงทรงกลม มุมเชิงทรงกลมวัดเป็นองศาได้เท่ากับส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมนั้น

2.4 สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (Spherical triangle)

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม คือ ส่วนของผิวทรงกลมที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สามวง ส่วนโค้งของวงกลมใหญ่แต่ละวงที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมนี้ เราเรียกว่า ด้าน (side) และจุดยอดของมุมเชิงทรงกลมทั้งสามมุมเราเรียกว่า จุดยอด (vertices) ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

โดยปกติกัมภ์ใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่ A, B, C แทนจุดยอดของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC และใช้อักษรตัวพิมพ์เล็ก a, b, c แทนด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุม A, B, C ตามลำดับ

ข้อสังเกต

(1) ความยาวของด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมวัดได้ด้วยมุมหน้า (face angle) ของมุมระหว่างสามระนาบ ดังนั้น ด้าน a, b, c ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จึงวัดเป็นองศาหรือเรเดียน

(2) ขนาดของมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม วัดได้ด้วยมุมระหว่างสองระนาบที่เกิดจากระนาบของด้านคู่หนึ่ง

โดยทั่ว ๆ ไป เราจะพิจารณาเฉพาะสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีด้านแต่ละด้านและมุมแต่ละมุมน้อยกว่า 180 องศา ซึ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมดังกล่าวจะมีคุณสมบัติดังนี้

- 1) ด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งรวมกันเข้า ย่อมมากกว่าด้านที่สาม นั่นคือ $a + b > c$, $a + c > b$ และ $b + c > a$
- 2) ด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งรวมกันเข้า ย่อมน้อยกว่า 360 องศา นั่นคือ $0^\circ < a + b + c < 360^\circ$
- 3) ถ้าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองย่อมมีขนาดเท่ากัน
- 4) ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีขนาดเท่ากันแล้ว ด้านที่อยู่ตรง

ข้ามกับมุมทั้งสองย่อมยาวเท่ากัน

5) ถ้าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีความยาวไม่เท่ากันแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสองย่อมมีขนาดไม่เท่ากัน และมุมที่ใหญ่กว่า ย่อมอยู่ตรงข้ามกับด้านที่ยาวกว่า

6) ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีขนาดไม่เท่ากันแล้ว ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสองย่อมยาวไม่เท่ากัน และด้านที่ยาวกว่าย่อมอยู่ตรงข้ามกับมุมที่ใหญ่กว่า

7) มุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่ง รวมกันเข้าย่อมมากกว่า 180 องศา และน้อยกว่า 540 องศา

นั่นคือ $180^\circ < A+B+C < 540^\circ$

8) มุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งรวมกันเข้าย่อมน้อยกว่าผลบวกระหว่างมุมที่สามกับ 180 องศา

นั่นคือ $A+B < C+180^\circ$

$A+C < B+180^\circ$

และ $B+C < A+180^\circ$

ข้อสังเกต สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมอาจมีมุมฉากมากกว่าหนึ่งมุมหรืออาจมีมุมบ้านมากกว่าหนึ่งมุมก็ได้ สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมฉากเพียงหนึ่งมุมเรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก (right spherical triangle) ที่มีมุมฉากสองมุมเรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมสองมุมฉาก (birectangular spherical triangle) และที่มีมุมฉากสามมุมที่เรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมสามมุมฉาก (trirectangular spherical triangle)

มุมส่วนเกินเชิงทรงกลม (spherical excess) คือ ผลต่างระหว่างผลบวกของมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับผลบวกของมุมของสามเหลี่ยมบนระนาบ หรือกล่าวได้ว่า มุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ก็คือ จำนวนองศาที่ผลรวมของมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม เกินกว่า 180°

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม 2 รูปเท่ากันทุกประการ ถ้าสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นอยู่บนทรงกลมเดียวกัน หรืออยู่บนทรงกลมที่เท่ากัน และมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากับมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งตามลำดับ

2.5 พื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

ถ้าทรงกลมมีรัศมียาวเท่ากับ R แล้ว จะได้ว่า

พื้นที่ผิวของทรงกลม คือ $4\pi R^2$

และพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมบนผิวของทรงกลมนี้ คือ $\frac{\pi R^2 E}{180}$ เมื่อ E เป็นมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมที่อยู่ในรูปองศา

ข้อสังเกต สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม 2 รูป ที่มีผลบวกของมุมภายในเท่ากัน ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน

2.6 รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม (Spherical polygons)

รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม คือ ส่วนบนพื้นผิวของทรงกลมที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สามวงหรือมากกว่า รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลมทุกรูปมีมุมระหว่างหลายระนาบซึ่งจุดยอดของมุมอยู่ที่ศูนย์กลางของทรงกลม ขนาดด้านของรูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลมวัดได้ด้วยมุมหน้าของมุมระหว่างหลายระนาบที่สมนัยกัน

ข้อสังเกต รูป n เหลี่ยมเชิงทรงกลมใดๆ สามารถแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมได้ $n-2$ รูป โดยการลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่ง และผลรวมของมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเหล่านี้ ย่อมเท่ากับผลรวมของผลต่างระหว่างผลบวกของมุมของรูปหลายเหลี่ยมกับ $(n-2)180^\circ$