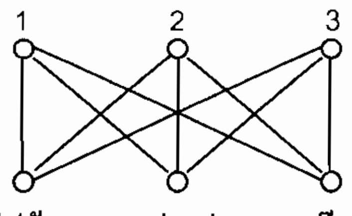
บทที่ 9

กราฟระนาบ (PLANAR GRAPHS)

9.1 นำเรื่อง

ในบทนี้จะเกี่ยวกับปัญหาว่าเมื่อกำหนดกราฟใดกราฟหนึ่งมาให้จะสามารถสร้างกราฟนั้นบนระนาบ โดยไม่ให้เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดตัดกัน

กรณีนี้ขอยกตัวอย่างปัญหาของบ้าน 3 หลังกับสาธารณูปโภค 3 สิ่ง เช่น น้ำประปา ไฟฟ้า และแก๊ส



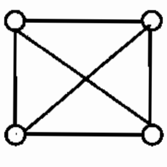
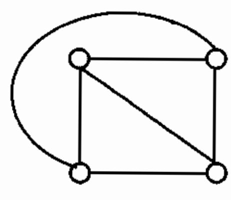
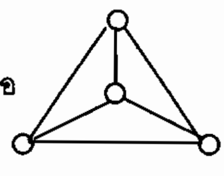
จะเห็นได้ว่าสำหรับปัญหานี้คือ จะสามารถเขียนกราฟสองส่วนแบบสมบูรณ์ (Complete bipartite graph) $K_{3,3}$ ในแบบที่เส้นเชื่อมไม่ตัดผ่านกันได้หรือไม่ ซึ่งในภาษาของทฤษฎีกราฟ คือ การตอบปัญหาว่า กราฟ $K_{3,3}$ เป็นกราฟบนระนาบหรือไม่

9.2 กราฟระนาบ

บทนิยาม 9.1.1
กราฟ G เรียกว่า กราฟระนาบ ถ้าเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดใน G ไม่มีเส้นเชื่อมใดตัดผ่านกัน

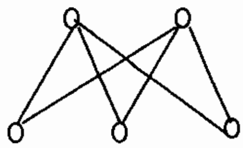
ตัวอย่างที่ 1

กราฟ k_4

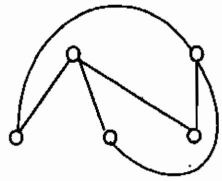
 **หรือ**  **หรือ** 

เป็นกราฟระนาบ เพราะสามารถสร้างให้เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดไม่ตัดผ่านกันได้

ในทำนองเดียวกัน กราฟสองส่วน $K_{2,3}$

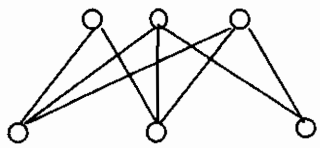


หรือ

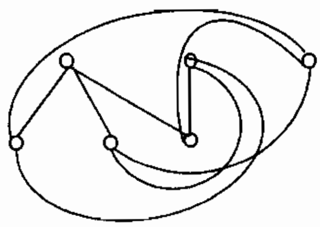


เป็นกราฟระนาบ

แต่กราฟสองส่วน $K_{3,3}$



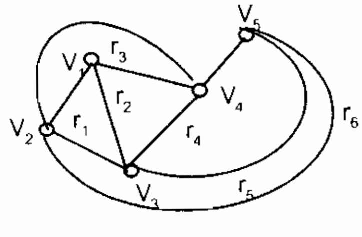
ไม่เป็นกราฟระนาบ เพราะไม่สามารถสร้างเป็นกราฟซึ่งเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดไม่ตัดผ่านกัน (ดังรูป)



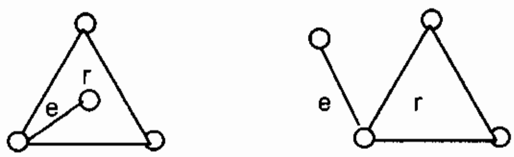
กราฟระนาบแบ่งระนาบออกเป็นเขตเชื่อมโยงต่าง ๆ เรียกว่า เขตภายใน และเขตภายนอกซึ่งจะมีอยู่ 1 เขตทุกเขตจะถูกกำหนดด้วยเส้นขอบเขต

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u>

กราฟต่อไปนี้



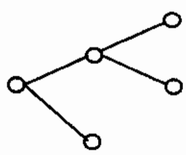
แบ่งระนาบออกเป็น 6 เขต เขต r_6 เป็นเขตภายนอกเขต r_2 ประกอบด้วยเส้นขอบเขต $v_1 v_4$, $v_1 v_3$ และ $v_3 v_4$ เขต r_6 มีเส้นขอบเขต คือ $v_2 v_4$, $v_4 v_5$ และ $v_5 v_2$ เนื่องจากการกำหนดว่าเส้นต้องเป็นขอบเขตของเขตบางเขต ดังนั้น



(1) (2)

เส้น e ในรูป (1) เป็นส่วนหนึ่งของเส้นขอบเขตของ r แต่เส้น e ในรูป (2) เป็นส่วนหนึ่งของเขตภายนอก r

สำหรับกราฟต้นไม้

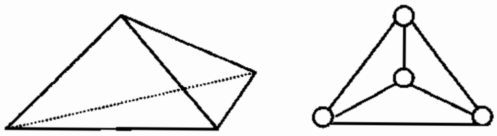


จะมีเพียง 1 เขตในระนาบ คือ เขตภายนอก และเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟต้นไม้ เป็นเส้นขอบเขตของเขตภายนอกนี้

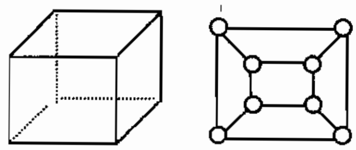
9.3 <u>กราฟระนาบของออยเลอร์</u>

ลีออนฮาร์ด ออยเลอร์ เป็นบุคคลแรกที่ศึกษาเรื่องกราฟระนาบ เพราะกราฟระนาบเกี่ยวข้องกับรูปทรงหลายหน้า รูปทรงหลายหน้าปกติแบบนูน เป็นรูปทรงเรขาคณิตซึ่งหน้าทุกหน้ามีความสมภาค (Congruence) รูปทรงหลายหน้ามี 5 แบบ คือ ลูกบาศก์ รูปทรงสี่หน้า รูปทรงแปดหน้า รูปทรงสิบสองหน้าและรูปทรงยี่สิบหน้า รูปทรงเหล่านี้มักนิยมเรียกกันว่า รูปทรงต้นแบบเพลโต เพราะว่าเพลโตจัดให้รูปทรงเหล่านี้เป็นสัญลักษณ์แทนโลก ไฟ อากาศ น้ำ และจักรวาล การหากราฟระนาบจากรูปทรงหลายหน้ารูปใดรูปหนึ่งด้วยการจินตนาการให้หน้า

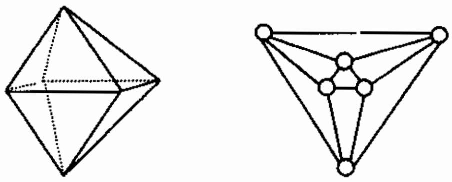
ล่างสุดของรูปยืดออกจนรูปทรงหลายหน้าแบนราบ ดังกราฟระนาบที่ได้จากการยืดหน้าด้านล่างสุดของรูปทรงสี่หน้า ลูกบาศก์ และรูปทรงแปดหน้าตามลำดับ ดังนี้



รูปทรงสี่หน้า



ลูกบาศก์



รูปทรงแปดหน้า

ลีออนฮาร์ด ออยเลอร์ ค้นพบความสัมพันธ์อันน่าสนใจระหว่างจุดยอด เส้นเชื่อม และเขต ของรูปทรงหลายหน้าแบบนูน (รูปหลายเหลี่ยมเป็นแบบนูน ถ้าระหว่าง 2 จุดใด ๆ ที่ไม่เป็นจุดประชิดกันของรูปหลายเหลี่ยม มีเส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดนั้นที่โยงถึงกันโดยไม่มีส่วนใดของเส้นเชื่อมอยู่นอกรูปหลายเหลี่ยม) ความสัมพันธ์ดังกล่าว คือ

<u>ทฤษฎีบท 9.1</u>

ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงอันดับ p ขนาด q และ r เขต แล้ว $p - g + r = 2$

<u>พิสูจน์</u>

ใช้การพิสูจน์แบบคณิตศาสตร์อุปนัยกับขนาดของกราฟ ถ้า $q = 0$ จะเห็นได้ว่า $p = r = 1$ (เฉพาะ G เชื่อมโยง) ดังนั้น $p - q + r = 1 - 0 + 1 = 2$ เป็นจริงตามทฤษฎีตามวิธีการกำหนดให้ความสัมพันธ์เป็นจริงสำหรับกราฟเชื่อมโยงซึ่งมีขนาด $q - 1$ โดยที่ $q \geq 1$ จะต้องแสดงให้เห็นว่า $p - q + r = 2$ ถ้า G ไม่มีวงเวียน แสดงว่า G เป็นกราฟต้นไม้ และ $q = p - 1$ มี $r = 1$

ดังนั้น $p - q + r = p - (p - 1) + 1 = 2$

ถ้า G มีวงเวียน C ให้ e เป็นเส้นในวงเวียน C จะเห็นได้ว่ากราฟ G - e ซึ่งเป็นกราฟระนาบและเชื่อมโยงจะมีเส้นเชื่อมน้อยกว่า G อยู่ 1 เส้น และมีเขตน้อยกว่าเขตของ G อยู่ 1 เขต แต่จำนวนจุดยอดเท่ากัน ดังนั้น ตามข้อสมมุติฐานของการพิสูจน์แบบอุปนัย

$$p - (q - 1) + (r - 1) = 2$$

หรือ

$$p - q + r = 2$$

<u>ข้อสังเกต</u>

ทฤษฎีบทนี้ไม่เป็นจริง ถ้า G เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

<u>บทตั้ง 9.1</u>

กราฟสองส่วน $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟระนาบ

<u>พิสูจน์</u>

(ใช้การพิสูจน์แบบให้ข้อขัดแย้ง)

กราฟ $K_{3,3}$ มีจุดยอด 6 จุด และเส้นเชื่อม 9 เส้น ถ้า $K_{3,3}$ เป็นกราฟระนาบจะต้องเขียนเป็นกราฟที่มีเขต r เขต และมีจำนวนเขตตามความสัมพันธ์

$$p - q + r = 2$$

$$6 - 9 + r = 2 \text{ นั่นคือ } r = 5$$

ถ้านับจำนวนเส้นขอบเขตทั้งหมดของกราฟ $K_{3,3}$ ได้ N เส้น เนื่องจากเขตแต่ละเขตของ $K_{3,3}$ ใช้เส้นเชื่อมอย่างน้อยที่สุด 4 เส้น ดังนั้น

$$N \geq R = 20$$

แต่ในการนับจำนวนรวมของ N เส้นเชื่อมแต่ละเส้นถูกนับอย่างมากที่สุดเส้นละ 2 ครั้ง ดังนั้น

$$N \leq 2q = 18$$

ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นกราฟ $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟระนาบ

<u>ข้อสังเกต</u>

กราฟที่มีเส้นเชื่อมเป็นจำนวนมาก จะไม่เป็นกราฟบนระนาบ เพราะจะหลีกเลี่ยงการตัดกันของเส้นเชื่อมไม่ได้ ทฤษฎีต่อไปนี้จะช่วยให้เห็นชัดเจนมากขึ้น

ทฤษฎีบท 9.2

ถ้า G เป็นกราฟระนาบอันดับ p ซึ่ง $p \geq 3$ และขนาด q แล้ว $3p - 6 \geq q$

พิสูจน์

ถ้า $p = 3$ แล้ว $q \leq 3$

ดังนั้นทฤษฎีเป็นจริง ถ้า $p > 3$ และ $q \geq 3$ (ถ้า $q < 3$ ทฤษฎีบทเป็นจริง)

ให้ G มีเขต r เขต และจำนวนเส้นขอบเขตทั้งหมดเท่ากับ N เพราะว่า $N \leq 2q$ และเนื่องจากแต่ละเขตของ G ต้องใช้เส้นเชื่อมอย่างน้อยที่สุด 3 เส้น

ดังนั้น $N \geq 3r$ แสดงว่า $3r \leq 2q$

แต่ $p - q + r = 2$ เพราะฉะนั้น $3p - 3q + 3r = 6$ และ $3p - 3q + 2q \geq 6$ $(2q \geq 3r)$

$3p - q \geq 6$ นั่นคือ $3p - 6 \geq q$

บทตั้ง 9.2

กราฟระนาบใด ๆ จะมีจุดยอดอย่างน้อยที่สุด 1 จุด ที่มีดีกรี ≤ 5

พิสูจน์

สมมุติว่า $\deg v_i \geq 6$ สำหรับจุด v_i ใด ๆ เพราะว่า $\sum \deg v_i = 2g$ ดังนั้น $2g \geq 6p$ หรือ $q \geq 3p \geq 3p - 6$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎี เพราะฉะนั้น $\deg v_i \leq 5$

บทตั้ง 9.3

กราฟ K_5 ไม่เป็นกราฟระนาบ

พิสูจน์

เพราะว่ากราฟ K_5 มี $p = 5$ และ $q = 10$ ดังนั้น $q = 10 \geq 3p - 6 = 15 - 6 = 9$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีกราฟระนาบ $3p - 6 \geq q$ แสดงว่า K_5 ไม่เป็นกราฟระนาบ

9.4 **กราฟแผนที่และเขตของกราฟ** (MAPS AND REGIONS)

บทนิยาม 9.4.1

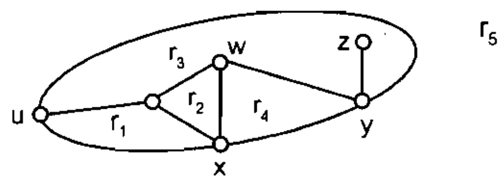
กราฟแผนที่ คือ กราฟระนาบแบบเฉพาะที่เป็นตัวแทนของพหุกราฟระนาบจำนวนนับได้ และกราฟแบบที่มีความเชื่อมโยงถ้าพหุกราฟนั้นเชื่อมโยง

บทนิยาม 9.2.1

ดีกรีของเขต r deg(r) คือจำนวนของเส้นเชื่อมที่ปิดล้อมเขต r กับเส้นเชื่อมที่ไม่เป็นวงเวียนและวิถีของเขตจะนับเส้นเชื่อมนั้น 2 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 3

จากกราฟที่กำหนดให้



จะเห็นได้ว่าเขตทั้งหมดเป็นวงเวียน ยกเว้นเขต r_3 ซึ่งเมื่อคำนึงถึงวิถีของเขต r_3 เริ่มจาก w ทวนเข็มนาฬิกาจะได้วิถีปิด w, y, z, y, u, v, w และเป็นวิถีที่นับเส้นเชื่อม yz จำนวน 2 ครั้ง

สำหรับดีกรีของเขตในที่นี้

$\deg r_1 = \deg r_2 = \deg r_4 = 3$

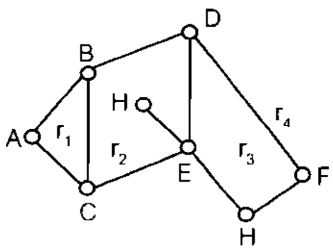
$\deg r_3 = 6$

$\deg r_5 = 3$

ทฤษฎีบท 9.3
ผลรวมของดีกรีของเขตของกราฟแผนที่ G เท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมใน G

พิสูจน์
เพราะว่าเส้นเชื่อม e แต่ละเส้นในกราฟแผนที่ G เป็นเส้นขอบเขตของเขต 2 เขต หรืออยู่ในเขต ดังนั้น เส้นเชื่อม e เมื่อคำนึงถึงวิถีของเขตจะถูกนับเป็นจำนวน 2 ครั้ง ด้วยเหตุนี้เส้นเชื่อมทุกเส้นในแต่ละเขตจะถูกนับ 2 ครั้ง เป็นผลให้ผลรวมของดีกรีของเขตของกราฟ G เท่ากับ 2 เท่าของจำนวนเส้นเชื่อมใน G

ตัวอย่างที่ 4
จากกราฟแผนที่ G ซึ่งกำหนดให้



จะเห็นได้ว่า	เขต r_1 เป็นวงเวียน	A,B,C,A	มีดีกรี 3
	เขต r_2 เป็นวิถีปิด	B,D,E,H,E,C,B	มีดีกรี 6
	เขต r_3 เป็นวงเวียน	D,F,H,E,D	มีดีกรี 4
	เขต r_4 เป็นวงเวียน	A,B,D,F,H,E,C,A	มีดีกรี 7

และผลรวมดีกรี คือ 3 + 6 + 4 +7 = 20

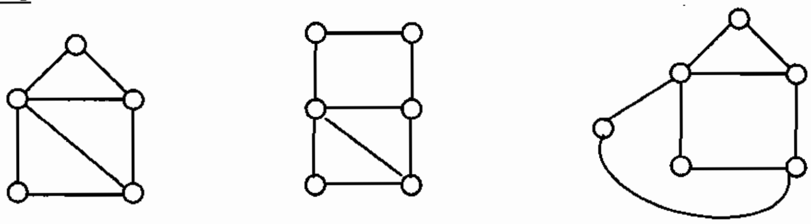
กราฟแผนที่ G มีจำนวนเส้น q = 10

แสดงให้เห็นผลลัพธ์ตามทฤษฎีว่าผลรวมดีกรีของเขต เท่ากับ 2 เท่าของจำนวนเส้น

กราฟ $K_{3,3}$ และ K_5 มีบทบาทสำคัญต่อทฤษฎีกราฟในเรื่อง กราฟบนระนาบและจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

<u>บทนิยาม 9.4.2</u>
กราฟ 2 กราฟมีความสมานสัณฐาน (homeomarphism) ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ แต่ละกราฟเกิดจากการเพิ่มจุดยอดดีกรีสองเข้าที่เส้นเชื่อมของกราฟเดียวกัน

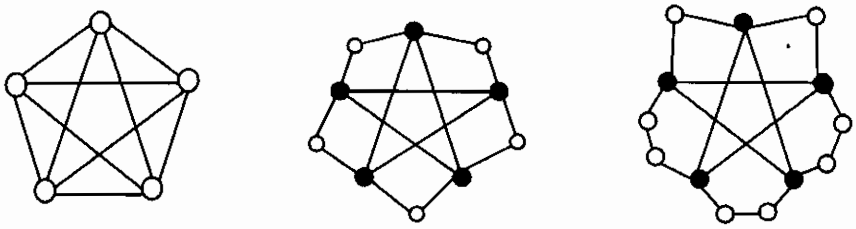
<u>ตัวอย่างที่ 5</u>



G G₁ G₂

กราฟ G_1 และ G_2 มีความสมานสัณฐาน เพราะต่างเป็นกราฟที่เกิดจากกราฟ G ด้วยการเพิ่ม จุดยอด 1 จุด เข้ากับเส้นเชื่อมของ G

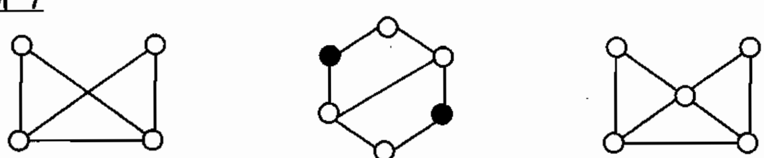
<u>ตัวอย่างที่ 6</u>



K_5 G_3 G_4

กราฟ G_3 และ G_4 มีความสมานสัณฐาน เพราะต่างเป็นกราฟที่เกิดจากกราฟ K_5 ด้วยการเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 เข้ากับเส้นเชื่อมของ K_5 (จุดทึบเป็นจุดยอดของ K_5)

<u>ตัวอย่างที่ 7</u>



G_1 G_2 G_3

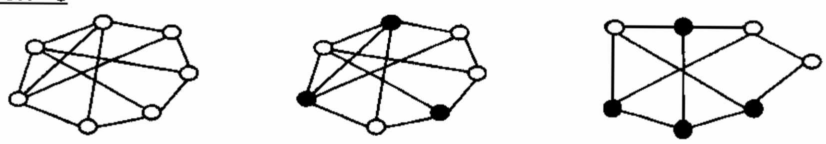
กราฟ G_1 และ G_2 มีความสมานสัณฐานเพราะ G_2 เกิดจาก G_1 ด้วยการเพิ่มจุดยอด 2 จุด (จุดทึบ) เข้ากับเส้นของ G_1 แต่ G_1 ไม่มีความสมานสัณฐานกับ G_3 เพราะตามบทนิยามการเพิ่มจุดยอดดีกรีสองกับเส้นเชื่อมไม่รวมการเพิ่มจุดยอดตรงที่เส้นตัดกัน

ทฤษฎีต่อไปนี้แสดงการบอกลักษณะของกราฟระนาบด้วยวิธีการซึ่งค่อนข้างง่ายและการพิสูจน์ทางหนึ่งเป็นแบบตรงไปตรงมา แต่การพิสูจน์ในทางกลับกันค่อนข้างซับซ้อนเกินไป จึงไม่แสดงการพิสูจน์ในระดับนี้

<u>ทฤษฎีบท 9.4</u>

กราฟ G เป็นกราฟระนาบก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ G ไม่มีกราฟย่อยซึ่งมีความสมานสัณฐานกับกราฟ K_5 หรือ $K_{3,3}$

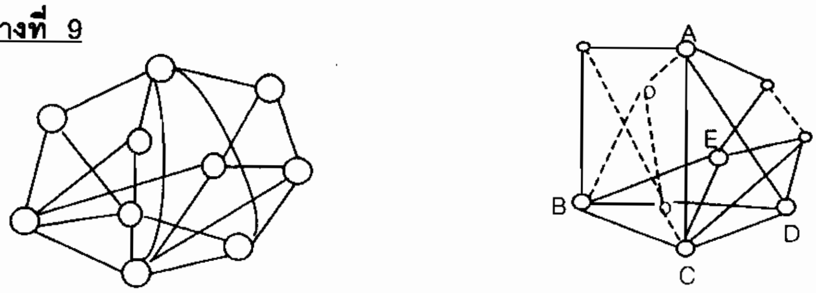
<u>ตัวอย่างที่ 8</u>



G S

กราฟ G ไม่เป็นกราฟระนาบ เพราะเมื่อลบเส้นเชื่อมออก 2 เส้น จะได้กราฟ S ซึ่งเป็นกราฟย่อยของ $K_{3,3}$ (จุดโปร่งและจุดทึบแสดงเซตของจุดในกราฟ 2 ส่วน)

<u>ตัวอย่างที่ 9</u>



G S

กราฟ G ไม่เป็นกราฟระนาบ เพราะกราฟย่อย S ของ G มีความสมานสัณฐานกับกราฟสมบูรณ์ K_5 เช่น จุดยอด A ประชิดกับจุดยอด C กับ D และจุดยอด B กับ E โดยไม่รวมจุดยอดดีกรี 2

9.5 <u>การตรวจสอบกราฟระนาบ</u>

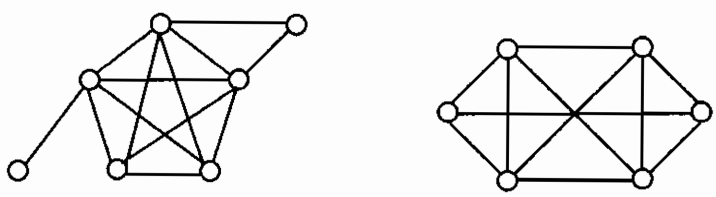
ในการตรวจเพื่อหาว่ากราฟเชื่อมโยงไม่เป็นกราฟระนาบ จะใช้ความสัมพันธ์ $q \le 3p - 6$ หรือ $q \le 2p - 4$ เช่นที่ใช้ในการพิสูจน์ว่ากราฟ K_5 และ $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟระนาบเพราะความสัมพันธ์ไม่สอดคล้องกับอสมการ อย่างไรก็ตาม มีกราฟจำนวนมากซึ่งมีความสัมพันธ์สอดคล้องกับอสมการแต่ไม่เป็นกราฟระนาบ จึงต้องหาวิธีการอื่นเพื่อตรวจสอบความเป็นกราฟระนาบ

<u>ข้อสังเกตในการตรวจสอบ</u>

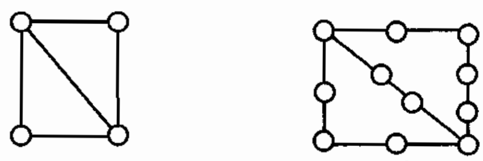
ก. กราฟทั้งหมดไม่จำต้องเป็นกราฟระนาบ เช่น กราฟ $K_{3,3}$ และกราฟ K_5 ไม่เป็นกราฟระนาบ

ข. ถ้ากราฟ G เป็นกราฟระนาบ กราฟย่อยของ G ทุกกราฟเป็นกราฟระนาบ หรือ

ค. ถ้ากราฟ G มีกราฟย่อยที่ไม่เป็นกราฟระนาบ กราฟ G ไม่เป็นกราฟระนาบ เช่น กราฟต่อไปนี้ไม่เป็นกราฟระนาบเพราะมีกราฟย่อยแบบ $K_{3,3}$ และ K_5 ซึ่งไม่เป็นกราฟระนาบ



เนื่องจากการเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 เข้ากับเส้นเชื่อมในกราฟ Gไม่มีผลกระทบต่อการเป็นกราฟระนาบหรือไม่เป็นกราฟระนาบของ G
ดังเช่น



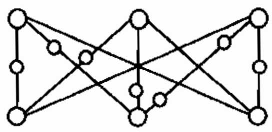
G　　　　กราฟที่ได้จากการเติมจุดยอดดีกรี 2 ใน G

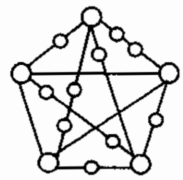
จึงมีข้อสังเกตอีก 2 ประการ คือ

ง. ถ้า G เป็นกราฟระนาบ กราฟที่ได้จาก G ด้วยการเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 จะเป็นกราฟระนาบด้วยหรือ

จ. ถ้ากราฟที่ได้จากการเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 ในกราฟ G ไม่เป็นกราฟระนาบ กราฟ G ไม่เป็นกราฟระนาบด้วย

ดังเช่น กราฟต่อไปนี้



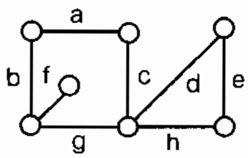


ซึ่งกราฟแรกเป็นกราฟเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 ของ $K_{3,3}$ และกราฟต่อมาเป็นกราฟเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 ของ K_5

ดังนั้น จากข้อสังเกตข้อ ค. และ จ. จึงกล่าวได้ว่า ถ้ากราฟ G มีกราฟย่อยซึ่งเป็นแบบเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 ของ $K_{3,3}$ และ K_5 แล้ว กราฟ G จะไม่เป็นกราฟระนาบ เหตุผลสำคัญที่เกี่ยวข้องกับข้อสังเกตในเรื่องกราฟทั้ง 2 ชนิดนี้ คือ กราฟที่ไม่เป็นกราฟระนาบทั้งหมดจะสามารถหาได้ตามวิธีการที่ได้อธิบายมาแล้ว กล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ กราฟที่ไม่เป็นกราฟระนาบทุกกราฟจะมีกราฟย่อยในแผนที่เป็นลักษณะของกราฟ $K_{3,3}$ หรือ K_5 ผลลัพธ์ทั้งหมดข้างต้นนี้เกิดจากทฤษฎีของนักคณิตศาสตร์ชาวโปแลนด์ เค. คูราโทวสกี ในปี พ.ศ. 2473

แบบฝึกหัด

1. จากกราฟ G ที่กำหนดให้



1.1 กราฟ G มีจำนวนเขตเท่าใด

1.2 ให้หาเส้นเชื่อมที่เป็นขอบเขตของแต่ละเขต

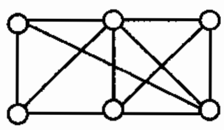
1.3 ให้หาเขตภายนอก

2. จากทฤษฎีของออยเลอร์ซึ่งกำหนดว่ากราฟระนาบเชื่อมโยงอันดับ p ขนาด q และ r เขต จะมี $p - q + r = 2$ จงแสดงให้เห็นว่าทฤษฎีนี้ไม่จริงถ้าตัดคำว่าเชื่อมโยง ออก

3. จากกราฟที่กำหนดให้ในข้อ 1 ให้หาจำนวนรวมทั้งหมด N ของเส้นขอบเขต และจงแสดงให้เห็นว่า $N \leq 2q$ และให้ยกตัวอย่างเส้นขอบเขตซึ่งถูกนับเพียง 1 ครั้ง

4. ให้อธิบายว่าเพราะเหตุใด วงเวียนใด ๆ 2 วง จึงมีความสมานสัณฐาน

5. จากกราฟต่อไปนี้



5.1 จงแสดงให้เห็นว่ากราฟนี้เป็นกราฟระนาบ

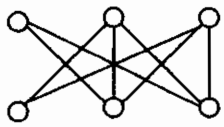
5.2 ให้หาเขตของกราฟ กำหนดชื่อ และหาเส้นขอบเขตของแต่ละเขต

5.3 จงแสดงให้เห็นว่ากราฟนี้มีคุณสมบัติ

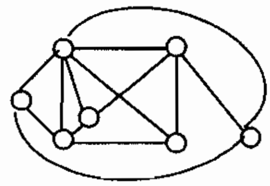
ก. $p - q + r = 2$, $N \leq 2q$ (N คือจำนวนรวมทั้งหมดของเส้นเชื่อม)

ข. $q \leq 3p + 6$

6. ให้อธิบายว่ากราฟต่อไปนี้ กราฟใดเป็นกราฟระนาบ ให้เขียนในรูปของกราฟระนาบและกราฟระนาบเส้นตรง หรือเป็นกราฟที่สมานสัณฐานกับกราฟ $K_{3,3}$ หรือ K_5



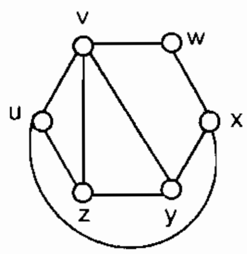
(ก)



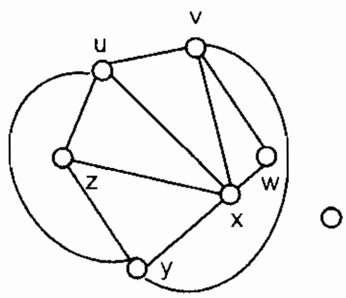
(ข)

7. ให้ยกตัวอย่างกราฟระนาบซึ่งเชื่อมโยงที่มีความสัมพันธ์ $q = 3p - 6$
8. กราฟ K_n เป็นกราฟระนาบเมื่อ n มีค่าเท่าใด
9. จากกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ในกราฟระนาบ $p - q + r = 2$ เป็นจริง

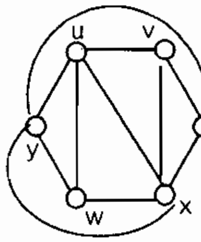
9.1



9.2



9.3



10. ถ้า G เป็นกราฟระนาบเชื่อมโยงซึ่งมีจุดยอด $p \geq 3$ และเส้นเชื่อม q และความยาวของวงเวียนในกราฟซึ่งสั้นที่สุดเท่ากับ 5 จงพิสูจน์ว่า $m \leq \frac{5}{3}(n-2)$