บทที่ 8
กราฟต้นไม้ (Trees)

8.1 นำเรื่อง

กราฟต้นไม้ได้รับการนำมาใช้เป็นครั้งแรกในปี พ.ศ. 2390 เกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า จากงานของกุสตาฟ เคอร์ชอฟ และต่อมาอาร์เธอร์ เคย์เลย์ ได้นำมาใช้ทางด้านเคมีในปี พ.ศ. 2400 ปัจจุบันกราฟต้นไม้ได้ถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวางทางด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ วิทยาศาสตร์ และสังคมศาสตร์

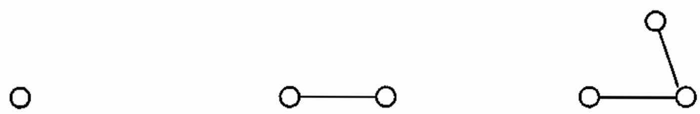
สถานการณ์ในชีวิตจำนวนมากมีความเกี่ยวข้องกับการดำเนินงานที่สามารถใช้กราฟต้นไม้ช่วยพิจารณาเพื่อหาวิธีประหยัดค่าใช้จ่าย หรือช่วยในการจัดงบประมาณเพื่อให้ได้ประโยชน์สูงสุดในการบริหารงานต่าง ๆ เช่น การสร้างเส้นทางคมนาคม การวางสายโทรศัพท์ และการขนส่ง เป็นต้น

8.2 กราฟต้นไม้

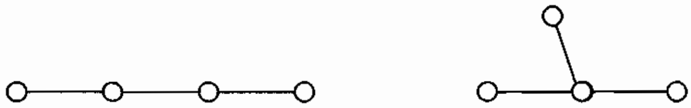
บทนิยาม 8.2.1
กราฟต้นไม้คือกราฟเชื่อมโยงซึ่งไม่มีวงเวียน

ตัวอย่างที่ 1

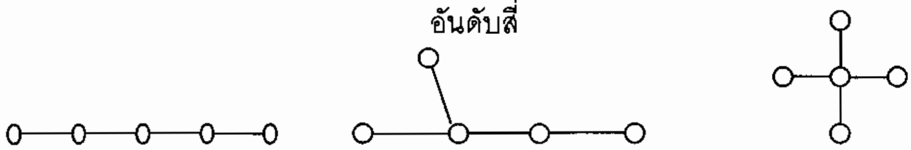
กราฟต้นไม้อันดับหนึ่ง อันดับสอง และอันดับสาม จะมีเพียง 1 แบบ ในขณะที่กราฟอันดับสี่มี 2 แบบ กราฟอันดับห้ามี 3 แบบ และกราฟอันดับหกมี 6 แบบ ดังต่อไปนี้



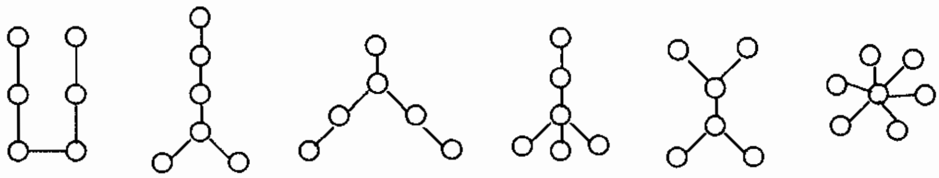
อันดับหนึ่ง อันดับสอง อันดับสาม



อันดับสี่



อันดับห้า



อันดับหก

จะเห็นได้ว่า กราฟต้นไม้เมื่อเพิ่มจุดยอด 1 จุด และเส้นเชื่อมใหม่ 1 เส้น จะได้กราฟต้นไม้ใหม่ ซึ่งในแต่ละชั้นจำนวนจุดยอดจะมากกว่าจำนวนเส้นเชื่อมอยู่ 1 หน่วย ดังนั้น กราฟต้นไม้อันดับ n จะมีเส้นเชื่อม n - 1 เส้น นอกจากนั้นเส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟต้นไม้เป็นสะพาน ดังนั้น จึงมีข้อความเชิงสมมูลของกราฟต้นไม้ต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท</u> 8.1

ถ้า T เป็นกราฟอันดับ n ข้อความต่อไปนี้มีความสมมูล

(ก) T เป็นกราฟเชื่อมโยง และไม่มีวงเวียน

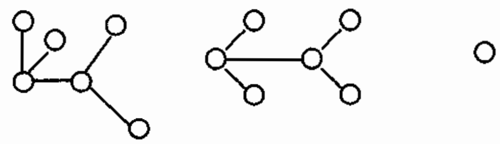
(ข) T เป็นกราฟเชื่อมโยง และมีเส้นเชื่อม n - 1 เส้น

(ค) T เป็นกราฟเชื่อมโยง และเส้นเชื่อมทุกเส้นเป็นสะพาน

(ง) T ไม่มีวงเวียน แต่ถ้าเพิ่มเส้นเชื่อมใด ๆ 1 เส้น จะทำให้เกิดวงเวียน 1 วงเวียน

<u>บทนิยาม</u> <u>8.2.2</u>
กราฟป่าไม้ คือกราฟที่ไม่มีวงเวียน

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

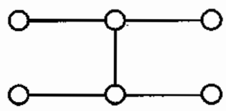


กราฟป่าไม้

จะเห็นได้ว่าแต่ละส่วนประกอบของกราฟป่าไม้เป็นกราฟต้นไม้

<u>บทนิยาม</u> <u>8.2.3</u> เส้นผ่าศูนย์กลาง
จำนวนเส้นเชื่อมในวิถีซึ่งยาวที่สุดของกราฟต้นไม้ เรียกว่า เส้นผ่าศูนย์กลาง

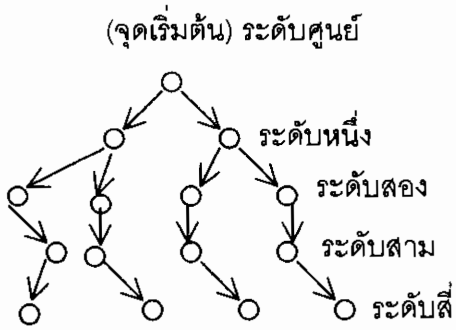
<u>ตัวอย่างที่ 3</u>



กราฟต้นไม้อันดับหก ในตัวอย่างนี้มีเส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ 3

8.3 <u>กราฟรากไม้</u>

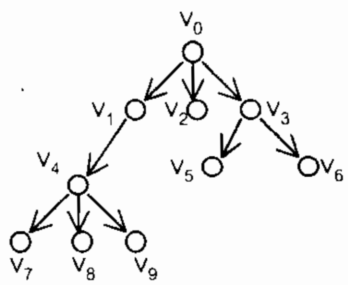
กราฟต้นไม้ทำให้เป็นกราฟรากไม้ได้ด้วยการกำหนดจุดยอดจุดหนึ่งเป็นจุดเริ่มต้น จากนั้นระบุทิศทางตามเส้นเชื่อมที่โยงออกไปยังจุดยอดต่าง ๆ ที่ต่อจากจุดเริ่มต้น กำหนดให้จุดเริ่มต้นมีระดับเป็นศูนย์ จุดถัดไปมีระดับหนึ่ง และจุดถัดไปมีระดับสอง ระดับสาม ตามลำดับ



จะเห็นได้ว่าระดับของจุดยอดใด ๆ คือ จำนวนเส้นจากจุดยอดนั้นไปยังจุดเริ่มต้น

ตัวอย่างที่ 4

จากกราฟรากไม้ที่กำหนดให้จงหาระดับของ V_5 และ V_8



วิธีทำ

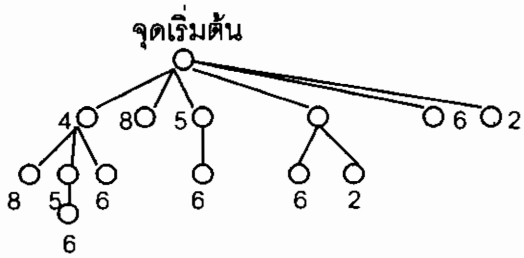
ระดับของจุดยอดใด ๆ คือ จำนวนเส้นจากจุดยอดนั้นไปยังจุดเริ่มต้น ดังนั้น V_5 มีระดับสอง และ V_8 มีระดับ 3

ตัวอย่างที่ 5

จากลำดับก่อนหลังของจำนวน 4,8,5,0,6,2 ที่กำหนดให้ จะมีวิธีทั้งหมดเป็นจำนวนเท่าใด ในการเขียนจำนวนเรียงลำดับซึ่งค่าเพิ่มขึ้น

วิธีทำ

จะเห็นได้ว่าวิธีหนึ่ง คือ 4,5,6 หรืออีกวิธีหนึ่ง คือ 0,2 แต่เรียงลำดับจำนวน 2,4 ไม่ได้ เพราะแตกต่างจากลำดับที่กำหนดให้ตามวิธีการนี้สามารถแสดงให้เห็นชัดเจนได้ด้วยกราฟว่ามีวิธีทั้งหมด 13 วิธี คือ 4; 4,8 ; 4,5 ; 4,5,6 ; 4,6 ; 8 ; 5 ; 5,6 ; 0 ; 0,6 ; 0,2 ; 6 ; 2

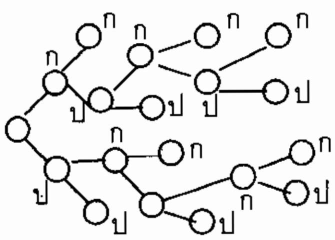


ตัวอย่างที่ 6

แก่นเพชร กับ เป็นกลาง ตกลงกันว่าในการเล่นหมากรุก ผู้ที่ชนะ 2 เกมติดต่อกัน หรือเล่นชนะรวม 3 เกม จะสิ้นสุดการเล่นเกมและผู้ชนะจะได้รับรางวัล 500 บาท ให้ใช้กราฟต้นไม้แสดงว่าผลลัพธ์ของการเล่นจะเป็นอย่างไรบ้าง และจำนวนการเล่นเกมสูงสุดที่แก่นเพชร กับ เป็นกลาง จะเล่นได้เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

ผลลัพธ์การเล่นมีทางเป็นไปได้ทั้งหมด 10 วิธี ตามจำนวนจุดยอดของดีกรี ในกราฟต้นไม้และจำนวนการเล่นเกมสูงสุดคือ 5 เกม จะได้ผู้ชนะ



ทฤษฎีบท 8.2

ถ้า u และ v เป็นจุดยอด 2 จุดใด ๆ ในกราฟต้นไม้ T จะมีวิถีจาก u ถึง v ใน T เพียง 1 วิถี

พิสูจน์

เพราะว่ากราฟต้นไม้มีความเชื่อมโยง ดังนั้น จะต้องมีวิถีจาก u ถึง v อย่างน้อยที่สุด 1 วิถี ถ้ากราฟ T มีวิถีจาก u ถึง v มากกว่า 1 วิถี ให้วิถีทั้งสอง คือ P_1 กับ P_2 เนื่องจากวิถี P_1 ต่างจากวิถี P_2 ดังนั้นเมื่อเริ่มวิถีที่จุดยอด w (w = u) จุดที่ต่อจาก w ในวิถี P_1 ต้องแตกต่างจากจุดที่ต่อจาก w ในวิถี P_2 และเพราะว่าวิถี P_1 และวิถี P_2 ต่างสิ้นสุดที่จุด v ดังนั้นต้องมีจุดยอด x (x = v) ซึ่งอยู่ในวิถี P_1 และ P_2

จะเห็นได้ว่าในลักษณะเช่นนี้ส่วนของวิถี P_1 จาก w ไปยัง x กับส่วนของวิถี P_2 จาก w ไปยัง x ทำให้เกิดวงเวียนใน T ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติของกราฟ T ที่ไม่มีวงเวียนสรุปได้ว่ากราฟ T ต้องมีวิถีจาก u ถึง v เพียง 1 วิถี

ทฤษฎีบท 8.3 กราฟต้นไม้ T ซึ่งมีอันดับ P และขนาด q จะมีความสัมพันธ์ในรูป q = p - 1

พิสูจน์ (ใช้คณิตศาสตร์อุปนัย)

ให้ S_n แทนกราฟต้นไม้อันดับ n ซึ่งมีเส้นเชื่อม n - 1 เส้น S_1 เป็นจริง เพราะกราฟต้นไม้อันดับหนึ่งมีเพียงกราฟเดียวที่เส้นเชื่อมเป็นศูนย์ ให้ $k > 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ S_i เป็นจริงสำหรับ $1 \leq i < k$ ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้อันดับ k ให้ e = vw เป็นเส้นเชื่อมใน T ดังนั้นกราฟ T - e ขาดความเชื่อมโยง และเป็นกราฟที่มีส่วนประกอบอย่างน้อย 2 ส่วน ให้เป็น T_1 ซึ่งมีจุดยอด v และ T_2 มี จุดยอด w ถ้าส่วนประกอบ T_1 มีอันดับ k_1 และส่วนประกอบ T_2 มีอันดับ k_2 จะเห็นได้ว่า $1 \leq k_1 < k$ และ $1 \leq k_2 < k$ ซึ่ง $k_1 + k_2 = k$ (กราฟ T มีอันดับ k) เนื่องจาก S_{k_1} และ S_{k_2} ต่างเป็นจริง ดังนั้น T_1 มีขนาด $(k_1 - 1)$ และ T_2 มีขนาด $(k_2 - 1)$

$\therefore$ กราฟ T มีขนาด $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + 1 = k_1 + k_2 - 1 = k - 1$

แสดงว่า S_k เป็นจริง ซึ่งหมายถึงว่า S_n เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n นั่นคือ กราฟต้นไม้อันดับ p ขนาด q จะมีความสัมพันธ์

$$q = p - 1$$

ตัวอย่างที่ 7

ถ้ากราฟ G มีจุดยอด 10 จุด และเส้นเชื่อม 12 เส้น กราฟ G เป็นกราฟต้นไม้ได้หรือไม่

วิธีทำ

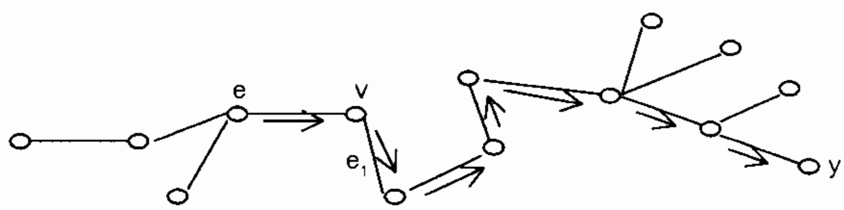
กราฟ G ไม่ใช่กราฟต้นไม้เพราะตามทฤษฎีบท 8.3 กราฟต้นไม้ซึ่งมีจุดยอด 10 จุด จะต้องมีเส้นเชื่อม 9 เส้น

ทฤษฎีบท 8.4

กราฟต้นไม้ซึ่งมีจุดยอดมากกว่า 1 จุด จะมีจุดยอดอย่างน้อยที่สุดจำนวน 1 จุด ซึ่งมีดีกรี 1

พิสูจน์

ให้ T เป็นกราฟต้นไม้ซึ่งมีจุดยอดมากกว่า 1 จุด เลือกจุดยอด v ใน T และเส้นเชื่อม e ที่ v (ต้องมีเส้นเชื่อมจาก v เพราะ T เป็นกราฟต้นไม้และมีจุดยอดมากกว่า 1 จุด) เลือกเส้น e_1 จาก v เมื่อวิถี v ถึงจุดยอดใหม่ w ถ้า w มีดีกรี 1 เป็นอันสิ้นสุด ถ้าจุดยอดใหม่มีดีกรีมากกว่า 1 เลือกเส้นเชื่อมออกจากจุดยอดใหม่ โดยไม่ซ้ำกับเส้นเชื่อมที่เข้ามา เนื่องจาก T ไม่มีวงเวียน ดังนั้นจะไม่มีการซ้ำจุดยอด และเพราะว่าจุดยอดใน T มีจำนวนนับได้ ดังนั้นวิถีจาก v จะต้องสิ้นสุดที่จุดยอดใหม่ y ซึ่งมีดีกรี 1 (ดังรูป)



ทฤษฎีบท 8.5

กราฟต้นไม้ซึ่งมีจุดยอดมากกว่า 1 จุด ต้องมี 2 จุดที่มีดีกรี 1

พิสูจน์ (ใช้ความขัดแย้ง)

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้อันดับ n มีจุดยอด $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ และขนาด n - 1

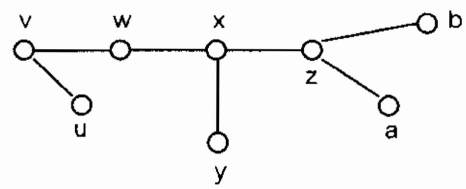
แสดงว่า $\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2(n-1) = 2n-2$ เนื่องจากกราฟ T มีบางจุดซึ่งมีดีกรี 1 สมมุติให้ V_1 มีดีกรี 1 ดังนั้นจุดยอด n - 1 จุด ที่เหลือมีดีกรี 2 หรือมากกว่า และผลรวมของดีกรีของจุดอย่างน้อยที่สุดต้องเท่ากับ 1 + 2(n-1) หรือ 2n-1 ซึ่งเป็นจำนวนคี่ (ความขัดแย้ง) แสดงว่านอกจากจุด V_1 จะต้องมีจุดยอดอีก 1 จุด ซึ่งมีดีกรี 1 ด้วย

บทนิยาม 8.2.4 จุดปลาย - จุดภายใน

จุดยอดในกราฟต้นไม้ซึ่งมีดีกรี 1 เรียกว่าจุดปลาย ส่วนจุดยอดที่มีดีกรีมากกว่า 1 เรียกว่าจุดภายใน

ตัวอย่างที่ 8

ให้หาจุดปลายและจุดภายในทั้งหมดของกราฟต่อไปนี้



วิธีทำ

จุดยอด u , y , a และ b เรียกว่าจุดปลาย

จุดยอด v , w, x และ z เรียกว่าจุดภายใน

ทฤษฎีบท 8.6

ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง และ C เป็นวงจรใน G ถ้าลบเส้นเชื่อม 1 เส้นออกจาก C กราฟที่เหลืออยู่เป็นกราฟเชื่อมโยง

พิสูจน์

ให้ e เป็นเส้นเชื่อมในวงจร C และ H = G - e

V(H) = V(G) แต่ E(G) - e = E(H) (เพื่อแสดงว่า H มีความเชื่อมโยง ต้องแสดงให้เห็นว่าถ้า u กับ w เป็นจุดยอด 2 จุดใด ๆ ในกราฟ H จะต้องมีแนวเดินใน H จาก u ถึง w) เนื่องจากเซตของจุดยอดใน G และ H เหมือนกัน ถ้า u และ w เป็นจุดยอดใน G จุดยอดทั้งสองต้องอยู่ใน H ด้วย และเพราะว่า G เชื่อมโยง ดังนั้นต้องมีแนวเดิน P ใน G จาก u ถึง w

<u>กรณี 1</u> (e ไม่อยู่ใน P)

เส้นเชื่อมใน G ที่ไม่มีใน H คือ e ดังนั้นในกรณีนี้ P เป็นแนวเดินใน H ดังนั้นในกรณีนี้ P เป็นแนวเดินใน H ด้วย นั่นคือ มีแนวเดินจาก u ถึง w ใน H

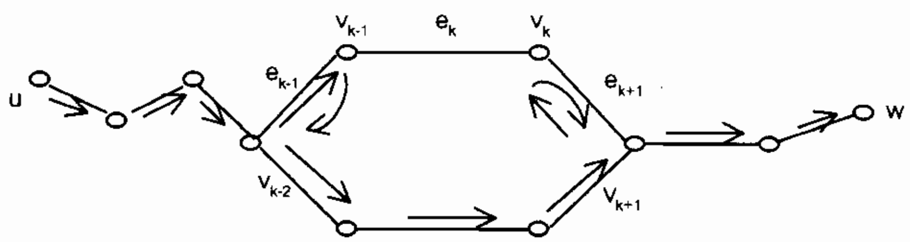
<u>กรณี 2</u> (e อยู่ใน P)

กรณีนี้แนวเดิน P จาก u ถึง w รวมส่วนของวงจร C ที่มีเส้นเชื่อม e ให้ C เป็นวงจร ดังนี้

$$C = v_0 , e_1, v_1 , e_2 , v_2 , ...e_n , v_n (=v_0)$$

ให้ e = e_k ซึ่งเป็นเส้นเชื่อมเส้นหนึ่งใน C ดังนั้นแนวเดิน P จะมีลำดับแนวเดิน v_{k-1} , e_k , v_k หรือ v_k , e_k , v_{k-1} ถ้าแนวเดิน P มีลำดับเป็น v_{k-1}, e_k , v_k กำหนดให้แนวเดินทวนเข็มนาฬิกาเป็น P_1 เพื่อไปจาก v_{k-1} ถึง v_k ดังนี้

$$P_1 : \ v_{k-1} , e_{k-1} , v_{k-2} ,...., v_0 , e_n , v_{n-1} ,....., e_{k+1} , v_k$$



แนวเดินทวนเข็มนาฬิกาจาก v_{k-1} ไป v_k โดยเลี่ยง e_k ถ้าแนวเดิน P มีลำดับเป็น v_k , e_k , v_{k-1} กำหนดแนวเดินตามเข็มนาฬิกาเป็น P_2 เพื่อไปจาก v_{k-1} ถึง v_k ดังนี้

$$P_2 : \ v_k , e_{k+1} , v_{k+1} ,...., v_n , e_1 , v_1 , e_k,....., e_{k-1} , v_{k-1}$$

จากนี้ต่อ P_1 หรือ P_2 กับ P ได้แนวเดินใหม่จาก u ถึง w เช่นถ้าต่อ P_1 กับ P ให้เริ่มด้วยส่วนของ P จาก u ถึง v_{k-1} แล้วต่อด้วย v_{k-1} ถึง v_k จาก P_1 และต่อส่วนของ P จาก v_k ถึง w ถ้าแนวเดินใหม่นี้ยังรวมเส้น e ให้ใช้วิธีการข้างต้นซ้ำใหม่จนไม่มีเส้นเชื่อม e ในแนวเดิน ผลลัพธ์ คือ ได้แนวเดินจาก u ถึง w ใน H ที่ไม่รวมเส้นเชื่อม e และเนื่องจากจุดยอด u และ w เป็นจุดใด ๆ ดังนั้นทั้งในกรณี 1 และ กรณี 2 H มีความเชื่อมโยง

ทฤษฎีบท 8.7

ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงอันดับ p และขนาด p-1 แล้ว G เป็นกราฟต้นไม้

พิสูจน์ (โดยใช้ความขัดแย้ง)

ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยงใด ๆ ที่มีอันดับ p และขนาด p - 1 (เนื่องจากกราฟต้นไม้มีความเชื่อมโยงและไม่มีวงจร ดังนั้น จึงเพียงแต่แสดงว่า กราฟ G ไม่มีวงจร)

ถ้ากราฟ G มีวงจร C ดังนั้นตามทฤษฎีบท 8.5 เมื่อลบเส้นเชื่อมออกจากวงจร C 1 เส้น กราฟ G ที่เหลือจะยังมีความเชื่อมโยง ถ้าให้ G_1 เป็นกราฟที่ลงเส้นเชื่อมออกจากวงจร และถ้าปรากฏว่ายังมีวงจรในกราฟ G_1 ให้ลบเส้นเชื่อมออกจากวงจรอีก 1 เส้น ให้ทำตามกระบวนการเช่นนี้ซ้ำจนกว่าจะได้กราฟ G_k ซึ่งยังมีความเชื่อมโยงแต่ไม่มีวงจร ซึ่งตามบทนิยาม G_k เป็นกราฟต้นไม้

เนื่องจากไม่มีจุดยอดใด ๆ ถูกลบออกจากกราฟ G ดังนั้น G_k มีจำนวนจุดยอดเท่ากับ p ดังนั้นตามทฤษฎีบท 8.3 กราฟ G_k มีเส้นเชื่อมจำนวน p - 1 เส้น แต่ตามสมมุติฐานที่กำหนดว่า G มีวงจร C จึงให้ลบเส้นเชื่อมออก 1 เส้น แสดงว่าจะต้องมีการลบเส้นเชื่อม 1 เส้นออกจาก G เพื่อให้ได้กราฟ G_k แสดงว่า G_k จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมไม่เกินกว่า (p-1) - 1 = p - 2 เส้น ทำให้ได้ข้อขัดแย้งแสดงว่าสมมุติฐานทีกราฟ G มีวงจร C นั้นไม่จริง นั่นคือ กราฟ G ไม่มีวงจร และ G เป็นกราฟต้นไม้

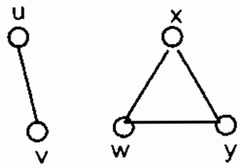
ทฤษฎีบท 8.6 กำหนดไว้ว่า <u>กราฟเชื่อมโยง</u>อันดับ p และขนาด p - 1 (p จำนวนเต็มบวก) เป็นกราฟต้นไม้ แต่กราฟซึ่งมีอันดับ p และขนาด p -1 ไม่จำต้องเป็นกราฟต้นไม้

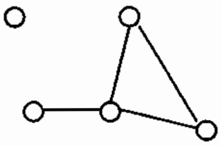
ตัวอย่างที่ 9

ให้ยกตัวอย่างกราฟอันดับ 5 และขนาด 4 ซึ่งไม่เป็นกราฟต้นไม้

วิธีทำ

ตามทฤษฎีบท 8.6 กราฟที่กำหนดเช่นนี้ต้องไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังเช่น กราฟข้างล่างนี้





8.4 **กราฟต้นไม้ทวิภาค** (binary trees)

ในเรื่องของกราฟรากไม้ ความสูงของกราฟรากไม้คือระดับสูงสุดวัดจากจุดยอดในกราฟนั้น และถ้าให้ v เป็นจุดยอดใด ๆ ของกราฟรากไม้จุดยอดซึ่งประชิดกับจุด v และอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นมากกว่าจุด v หนึ่งระดับ เรียกว่า จุดสืบต่อ และเรียก v ว่าจุดก่อกำเนิด ถ้าจุดสืบต่อของ v มีสองจุดจะเรียกว่า จุดเครือญาติ ดังนั้นในกราฟรากไม้เมื่อกำหนดจุดยอด v และ w ถ้า v อยู่บนวิถีเดียวระหว่าง w กับจุดกำเนิด จะเรียกจุด v ว่า จุดเผ่าพันธ์ของ w และเรียก w ว่า จุดสืบเชื้อสาย ของ v

กราฟรากไม้ซึ่งจุดยอดทุกจุดมีจุดสืบต่ออย่างมากที่สุด 2 จุด และแต่ละจุดถูกกำหนดให้เป็นจุดสืบต่อทางซ้าย (หนึ่งเดียว) หรือจุดสืบต่อทางขวา (หนึ่งเดียว) จะมีชื่อเรียกกราฟรากไม้แบบนี้ว่ากราฟต้นไม้ทวิภาค

<u>บทนิยาม 8.4.1</u>

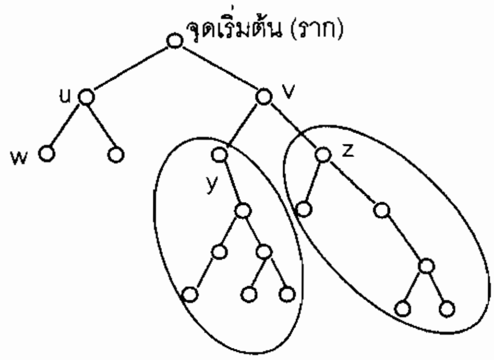
กราฟต้นไม้ทวิภาค คือกราฟรากไม้ซึ่งจุดยอดภายในทุกจุดมีจุดสืบต่อได้อย่างมากที่สุด 2 จุด จุดสืบต่อถูกกำหนดไว้ว่าเป็นจุดทางซ้ายหรือทางขวา จุดภายในมีจุดสืบต่อทางซ้ายและทางขวาได้อย่างละ 1 จุด กราฟต้นไม้ทวิภาคเป็นแบบสมบูรณ์ถ้าจุดภายในแต่ละจุดมีจุดสืบต่อเพียง 2 จุดเท่านั้น

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค ซึ่งมีจุดยอด v เป็นจุดภายใน <u>กราฟต้นไม้ย่อยทางซ้าย</u>ของ v มีจุดยอดในกราฟประกอบด้วยจุดสืบต่อและจุดสืบเชื้อสายทั้งหลายของจุดยอด v รวมกับเส้นเชื่อมทั้งหลายใน T ที่โยงจุดทางซ้ายไว้ด้วยกันในกราฟต้นไม้ย่อยทางซ้าย

<u>กราฟต้นไม้ย่อยทางขวา</u>ของ v มีบทนิยามในทำนองเดียวกันกับกราฟต้นไม้ย่อยทางซ้ายของ v

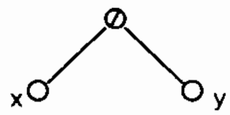
<u>ตัวอย่างที่</u> <u>10</u>

กราฟตัวอย่างของกราฟต้นไม้ทวิภาค และกราฟต้นไม้ย่อย



ตามบทนิยาม w เป็นจุดสืบต่อทางซ้ายของ u ส่วน z เป็นจุดสืบต่อทางขวาของ v กราฟต้นไม้ย่อยทางซ้ายของ v เริ่มจาก y และกราฟต้นไม้ย่อยทางขวาของ v เริ่มจาก z

กราฟต้นไม้ทวิภาคได้รับการนำไปใช้ในวิทยาการคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้แทนนิพจน์ทางพีชคณิตที่เกี่ยวกับการซ้อนในวงเล็บที่สมดุลย์ เช่น



ใช้แทน $\frac{x}{y}$

จะเห็นได้ว่าตัวดำเนินการอยู่ที่จุดกำเนิดทำกับจุดสืบต่อทางซ้ายและจุดสืบต่อทางขวาของจุดกำเนิดตามแนวจากซ้ายไปขวา

<u>ตัวอย่างที่ 11</u>

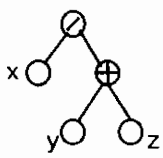
ให้ใช้กราฟต้นไม้ทวิภาค แทนนิพจน์ทางพีชคณิต

(ก) x/(y+z) (ข) [(u-v).w] + (x/y)

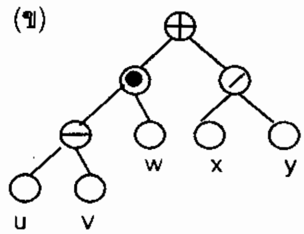
<u>วิธีทำ</u>

ให้จุดภายในเป็นตัวดำเนินการเลขคณิต จุดปลายเป็นตัวแปร และมีจุดยอดเป็นตัวดำเนินการต่อกราฟต้นไม้ย่อยทางซ้ายและทางขวาโดยเริ่มจากซ้ายไปขวา

(ก)



(ข)



มีทฤษฎีบทเกี่ยวกับกราฟต้นไม้ทวิภาคที่น่าสนใจทฤษฎีหนึ่งซึ่งกล่าวว่าถ้ารู้จำนวนจุดยอดภายในของกราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ จะสามารถหาจำนวนจุดยอดทั้งหมดตลอดจนจำนวนจุดปลายด้วย และในทางกลับกันถ้ารู้จำนวนจุดยอดและจุดปลายจะสามารถหาจุดยอดภายในของกราฟต้นไม้ทวิภาค กล่าวโดยเฉพาะคือ กราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ ซึ่งมีจุดภายใน k จุด จะมีจุดยอดทั้งหมด 2k + 1 จุด ซึ่งในจำนวนนี้มีจุดปลายจำนวน k + 1 จุด

<u>ทฤษฎีบท 8.8</u>

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ซึ่งมีจุดภายใน k จุด (k จำนวนเต็มบวก) T จะมีจุดยอดทั้งหมดจำนวน 2k + 1 จุด และจุดปลาย k + 1 จุด

พิสูจน์

ให้ T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ซึ่งมีจุดภายใน k จุดเพราะว่าเซตของจุดยอดทั้งหมดใน T สามารถแบ่งออกเป็นเซตย่อย 2 เซต ที่ไม่มีส่วนร่วมกันคือ เซตของจุดยอดทั้งหมดที่มีจุดให้กำเนิดกับไม่มีจุดให้กำเนิด ใน T มีจุดยอดจุดเดียวที่ไม่มีจุดให้กำเนิด คือ จุดเริ่มต้น (ราก) และเนื่องจากจุดยอดภายในทุกจุดของ T มีจุดสืบต่ออย่างแน่นอนจำนวน 2 จุด ดังนั้น จำนวนจุดยอดที่มีจุดให้กำเนิดจึงเป็น 2 เท่า ของจุดให้กำเนิด หรือ 2k เพราะจุดให้กำเนิดแต่ละจุดคือจุดภายใน นั่นคือ

จำนวนจุดยอดทั้งหมดใน T = จำนวนจุดที่มีจุดให้กำเนิด + จำนวนจุดที่ไม่มีจุดให้กำเนิด

= 2k + 1 (1)

แต่เป็นจริงที่จำนวนจุดยอดทั้งหมดใน T เท่ากับจำนวนจุดยอดภายในรวมกับจำนวนจุดปลาย นั่นคือ

จำนวนจุดยอดทั้งหมดใน T = จำนวนจุดภายใน + จำนวนจุดปลาย

= k + จำนวนจุดปลาย (2)

ดังนั้น

2k + 1 = k + จำนวนจุดปลาย

แสดงว่า

จำนวนจุดปลาย = (2k + 1) - k = k + 1

นั่นคือ จำนวนจุดยอดทั้งหมด 2k + 1 จุดและจำนวนจุดปลาย k + 1 จุด

ตัวอย่างที่ 12

จงแสดงให้เห็นว่ากราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ซึ่งมีจุดยอดภายใน 10 จุดจะมีปลาย 13 จุดได้หรือไม่

วิธีทำ

เพราะว่าตามทฤษฎีบท 8.7 กราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ซึ่งมีจุดภายใน k จุด จะมีจุดปลาย k + 1 จุด ดังนั้น กราฟในตัวอย่างนี้มีจุดปลาย 10 + 1 = 11 จุด ไม่ใช่ 13 จุด

ทฤษฎีบท 8.9

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค ซึ่งมีจุดปลายจำนวน n จุด และความสูงเป็น r จะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$n \leq 2^r$$

หรือ

$$\log_2 n \leq r$$

พิสูจน์

ใช้คณิตศาสตร์อุปนัยบน r พิสูจน์ว่า

สำหรับจำนวนเต็ม $r \geq 0$ ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาคใด ๆ ซึ่งมีความสูง r จำนวนสูงสุดของจุดปลาย T เท่ากับ 2^r

ให้ S(r) มีสมนัยว่า

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค ซึ่งมีความสูง r จำนวนจุดปลายของ T มีได้สูงสุด เท่ากับ 2^r

ขั้นแรก จะแสดงว่า S(r) เป็นจริงสำหรับ r = 0

ขั้นที่สอง จะแสดงว่าเมื่อ S(r) เป็นจริงสำหรับ r > k ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ S(r) เป็นจริงสำหรับ r

<u>ขั้นแรก</u> (จะต้องแสดงให้เห็นว่าถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค ซึ่งมีความสูงเป็น 0 จำนวน จำนวนจุดปลายของ T มีได้สูงสุดคือ 2^0)

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ความสูงเป็น 0 แสดงว่า T เป็นกราฟต้นไม้ ซึ่งมีจุดยอดเพียง 1 จุด (จุดเริ่มแรก) ให้ n เป็นจำนวนจุดปลายของ T ดังนั้นเมื่อ T มีความสูงเป็น 0 แสดงว่า n = 0 และ r = 0

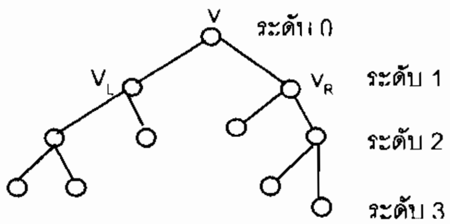
เนื่องจาก $0 \leq 2^r$ เพราะฉะนั้น $n \leq 2^r$ ถ้า T มีจุดยอด 1 จุด แสดงว่า n = 1 และ r = 0 เนื่องจาก $1 = 2^0$ เพราะฉะนั้น $n \leq 2^r$ ดังนั้นไม่ว่ากรณีใด $n \leq 2^r$ ตามที่ต้องการพิสูจน์

<u>ขั้นที่สอง</u> (ถ้า $r \geq 1$ และสมบัติเป็นจริงที่ $r > k$ ต้องแสดงว่าสมบัติเป็นจริงสำหรับ r ใด ๆ)

ให้ $r \geq 1$ เป็นจำนวนเต็มและสำหรับ $r > k$ แล้ว P(k) เป็นจริง นั่นคือ ถ้า $r > k$ แล้วกราฟต้นไม้ทวิภาคซึ่งมีความสูง k มีจุดปลายสูงสุดเป็นจำนวน 2^k

เพื่อแสดงให้เห็นว่า P(r) เป็นจริง นั่นคือ ต้องแสดงว่ากราฟต้นไม้ทวิภาคใด ๆ ซึ่งมีความสูง r จะมีจุดปลายสูงสุดเป็นจำนวน 2^r

ให้ T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาคมีความสูง r และมีจุดเริ่มแรก v เนื่องจาก $r \geq 1$ ดังนั้นจุด v ต้องมีจุดสืบต่ออย่างน้อยที่สุด 1 จุด คือ จุดสืบต่อทางซ้าย v_L และ(หรือ) จุดสืบต่อทางขวา v_R (ดังรูป)



กราฟต้นไม้ย่อยทางซ้าย กราฟต้นไม้ย่อยทางขวา

จะเห็นได้ว่า v_L และ v_R เป็นจุดเริ่มแรกของกราฟต้นไม้ย่อยของ v เรียกว่า T_L และ T_R (กราฟต้นไม้ย่อยอาจมีเพียงด้านเดียว) ในที่นี้ T_L และ T_R เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค เพราะว่า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค

ให้ r_L และ r_R เป็นความสูงของ T_L และ T_R เพราะว่ากราฟต้นไม้ T ได้จากการรวม T_L กับ T_R บวกกับ 1 ระดับ ดังนั้น $r_L \leq r - 1$ และ $r_R \leq r - 1$

ให้ n_L กับ n_R เป็นจำนวนของจุดปลายของ T_L กับ T_R และเพราะว่า T_L กับ T_R มีความสูงน้อยกว่า r ดังนั้นจากสมมุติฐานเชิงอุปนัย

$$n_L \leq 2^{r_L} \quad \text{และ } n_R \leq 2^{r_R}$$

แต่จุดปลายของ T ประกอบด้วยจำนวนจุดปลายของ T_L กับ T_R ดังนั้น $n = n_L + n_R \leq 2^{r_L} + 2^{r_R}$ (สมมุติฐานเชิงอุปนัย)

$n \leq 2^{r-1} + 2^{r-1}$ (เพราะว่า $r_L \leq r - 1$ และ $r_R \leq r - 1$)

$n \leq 2(2^{r-1})$ (ใช้พื้นฐานทางพีชคณิต)

$n \leq 2^r$

นั่นคือ จุดปลายมีจำนวนสูงสุดเท่ากับ 2^r (ตามต้องการ) สำหรับอสมการสมมูล $\log_2 n \leq r$ ได้โดยตรงจากความจริงที่ว่าฟังก์ชันลอกกริทึมฐานสองเป็นฟังก์ชันเพิ่ม และจากบทนิยามของลอกริทึม นั่นคือถ้า

$n \leq 2^r$

ใส่ $\log_2$ ทั้งสองข้างได้

$\log_2 n \leq \log_2 (2^r) = r$

$\log_2 n \leq r$

ตามที่ต้องการพิสูจน์

<u>ตัวอย่างที่ 13</u>

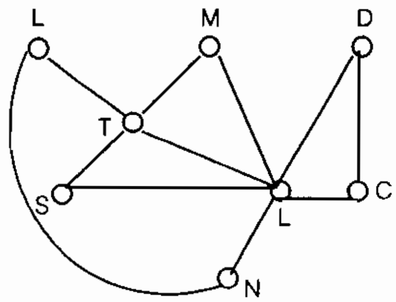
จงแสดงให้เห็นว่ามีกราฟต้นไม้ทวิภาค ซึ่งมีจุดปลายจำนวน 38 จุด และความสูง 5 หรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

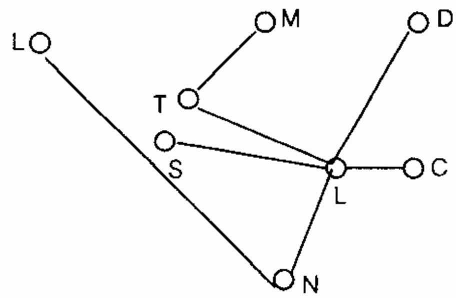
จากทฤษฎีบท 8.8 กราฟต้นไม้ทวิภาคใด ๆ ซึ่งมีความสูง 5 จะมีจุดปลายจำนวนสูงสุดเท่ากับ $2^5 = 32$ จุด ดังนั้นไม่มีกราฟต้นทวิภาคซึ่งมีความสูง 5 และจุดปลาย 38 จุด

8.5 <u>กราฟต้นไม้แบบทอดข้าม</u> (spanning tree)

บริษัทสายการบินแห่งหนึ่งต้องการขยายเส้นทางบิน และได้รับอนุญาตจากเจ้าหน้าที่รัฐบาลให้ใช้เส้นทางบินระหว่างสถานที่ต่าง ๆ ได้ ดังนี้



ถ้าบริษัทสายการบินต้องการใช้เส้นทางบินไปยังสถานที่ทุกแห่งแต่ต้องการประหยัดค่าใช้จ่ายของบริษัทด้วยการใช้เส้นทางบินน้อยที่สุดและเชื่อมโยงสถานที่ทุกแห่งซึ่งเส้นทางบินเลือกชุดหนึ่งเป็นดังนี้



จะเห็นได้ว่าเส้นทางบินครอบคลุมสถานที่ทุกแห่ง แต่เส้นทางบินชุดอื่นที่ครอบคลุมสถานที่ทุกแห่งเช่นเดียวกันมีหรือไม่ คำตอบคือชุดเส้นทางบิน ที่ทำให้บริษัทสายการบินพึงพอใจ คือ ชุดเส้นทางบินที่เป็นกราฟต้นไม้ ถ้ากราฟมีวงจร จะสามารถตัดเส้นทางบินหนึ่งเส้นในวงจรออกได้ โดยไม่ทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง จะเห็นได้ว่ากราฟต้นไม้ ซึ่งมีจุดยอด 8 จุด จะมีเส้นเชื่อม 7 เส้น ดังนั้นเส้นทางบินใด ๆ ที่เชื่อมสถานที่ทั้ง 8 แห่ง และประหยัดค่าใช้จ่ายจะมีเส้นทางบิน 7 เส้นทาง

บทนิยาม 8.5.1

กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ G คือกราฟย่อยของ G ที่รวมจุดยอดทุกจุดใน G และเป็นกราฟต้นไม้

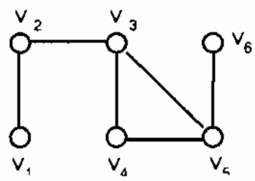
บทนิยามนี้เกี่ยวข้องกับข้อความสำคัญ 2 ประการ คือ

1. กราฟเชื่อมโยงทุกกราฟมีกราฟต้นไม้แบบทอดข้าม
2. กราฟต้นไม้แบบทอดข้าม 2 กราฟของกราฟเชื่อมโยงมีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 14

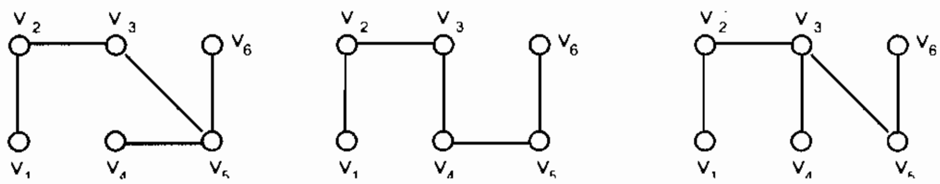
ให้หากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามทั้งหมดจากกราฟ G ที่กำหนดให้

G



วิธีทำ

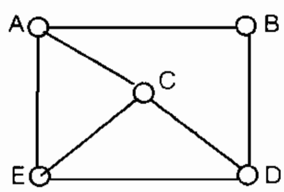
กราฟ G มีวงเวียน $v_3\ v_4\ v_5\ v_3$ ดังนั้นถ้าลบเส้นเชื่อมเส้นใดเส้นหนึ่งในวงเวียนจะได้กราฟต้นไม้ ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของ G 3 รูป ดังนี้



ตัวอย่างที่ 15

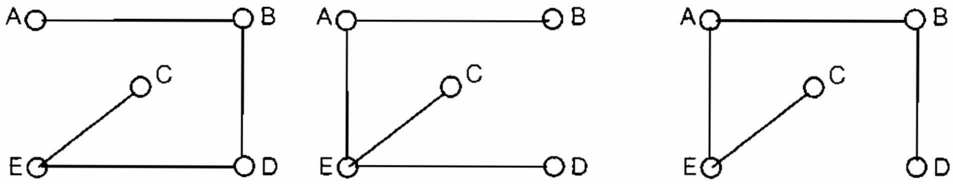
ให้หากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามจากกราฟ G ที่กำหนดให้

G :



วิธีทำ

ใช้วิธีการลบเส้นเชื่อมออกจากวงเวียนของกราฟ G จะได้กราฟแบบทอดข้าม 3 รูป



บทนิยาม 8.5.2

<u>กราฟแสดงน้ำหนัก</u> คือ กราฟซึ่งเส้นเชื่อมแต่ละเส้นมีจำนวนจริงกำกับบอกน้ำหนักหรือระยะทาง ผลบวกของจำนวนจริงในเส้นเชื่อม คือน้ำหนักรวมหรือระยะทางทั้งหมด

<u>กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด</u> ของกราฟแสดงน้ำหนัก คือกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามที่มีน้ำหนักหรือระยะทางรวมทั้งหมดต่ำสุด เมื่อเปรียบเทียบกับกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามอื่น ๆ ของกราฟ

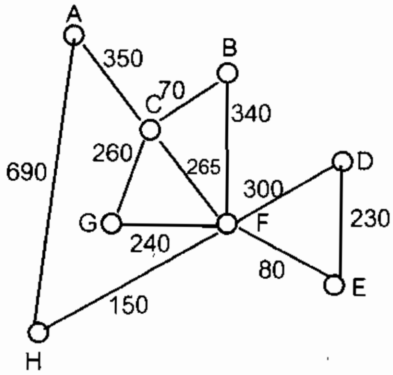
วิธีการหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดวิธีหนึ่งคือหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามทั้งหมดของกราฟ แล้วหาน้ำหนักรวมของแต่ละกราฟ และเลือกกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามซึ่งมีค่าต่ำสุด แต่วิธีการเช่นนี้จะสิ้นเปลืองเวลา เพราะกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามมีเป็นจำนวนมาก เช่น กราฟสมบูรณ์ซึ่งมีจุดยอด n จุด จะมีกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามเป็นจำนวนถึง n^{n-2} กราฟ ดังนั้น จึงมีผู้คิดขั้นตอนวิธีซึ่งมีประสิทธิภาพมากกว่าในการหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด เรียกว่า วิธีของพริม และวิธีของครัสแคล

8.6 <u>วิธีการหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด</u>

ตามวิธีของครัสแคลเส้นเชื่อมของกราฟแสดงน้ำหนักได้รับการตรวจสอบแต่ละครั้งตามลำดับของน้ำหนักที่เพิ่มขึ้น โดยในแต่ละขั้นที่เพิ่มเส้นเชื่อมเข้าไปในกราฟมีเงื่อนไขว่าต้องไม่ให้เกิดวงเวียน ภายหลังจากเพิ่มเส้นเชื่อมจำนวน n - 1 เส้น (n = จำนวนจุดยอด) จะได้กราฟแบบทอดข้ามค่าต่ำสุดของกราฟที่กำหนดให้

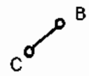
<u>ตัวอย่างที่</u> 13

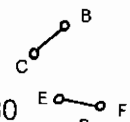
จากกราฟเชื่อมโยงแสดงน้ำหนักที่กำหนดให้ จงหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดโดยใช้วิธีของครัสแคล



<u>วิธีทำ</u>

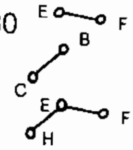
ขั้นแรก เลือกเส้นเชื่อมค่าต่ำสุด นั่นคือ BC น้ำหนัก 70





ขั้นที่สอง เลือกเส้นเชื่อมถัดไปที่น้ำหนักต่ำสุด ในที่นี้คือ EF น้ำหนัก 80

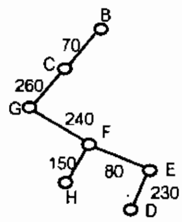
ขั้นที่สาม เลือกเส้นเชื่อมถัดไปที่น้ำหนักต่ำสุด คือ FH น้ำหนัก 150



ขั้นที่สี่ เลือก DE น้ำหนัก 230

ขั้นที่ 5 เลือก GF น้ำหนัก 240

ขั้นที่ 6 เลือก CG น้ำหนัก 260



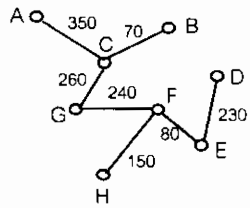
ขั้นที่ 7 ไม่เลือก CF น้ำหนัก 265 เพราะจะเกิดวงเวียน CFGC

ขั้นที่ 8 ไม่เลือก DF น้ำหนัก 300 เพราะจะเกิดวงเวียน DEFD

ขั้นที่ 9 ไม่เลือก BF น้ำหนัก 340 เพราะจะเกิดวงเวียน BCGFB

ขั้นที่ 10 เลือก AC น้ำหนัก 350

ขั้นสุดท้าย ไม่เลือก AH น้ำหนัก 690 เพราะจะเกิดวงเวียน AHFGCA
ตามวิธีของครัสแคล จะได้กราฟต้นไม้ ดังรูป



วิธีการของครัสแคลใช้ได้ในกรณีของกราฟขนาดเล็ก แต่เมื่อกราฟขนาดใหญ่การใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ไม่สะดวกที่ต้องเลือกเส้นเชื่อมตามลำดับน้ำหนักที่เพิ่มขึ้น และต้องไม่ให้เกิดวงเวียน ดังนั้น ต่อมาเพื่อแก้ไขปัญหานี้มีการใช้<u>วิธีการของพริม</u> (Prim's method) ซึ่งแตกต่างจากวิธีของครัสแคลในการหากราฟต้นไม้แบบทอดข้าม T ค่าต่ำสุดด้วยการต่อเส้นเชื่อมออกจากจุดยอดใน T ด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมที่ยังไม่รวมอยู่ใน T คราวละ 1 จุด และ 1 เส้น เพื่อให้เห็นชัดเจนจะใช้วิธีการของพริมกับกราฟในตัวอย่างที่ 13 ดังต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 14</u>

ให้ใช้วิธีการของพริมหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดของกราฟเชื่อมโยงในตัวอย่างที่ 13

<u>วิธีทำ</u>

ขั้นแรก	เลือกจุดยอดให้ T เช่น จุด A
ขั้นสอง	เลือกจุดยอด C ได้เส้นเชื่อม AC น้ำหนัก 350
ขั้นสาม	เลือกจุดยอด B ได้เส้นเชื่อม BC น้ำหนัก 70
ขั้นสี่	เลือกจุดยอด G ได้เส้นเชื่อม CG น้ำหนัก 260
ขั้นห้า	เลือกจุดยอด F ได้เส้นเชื่อม GF น้ำหนัก 240
ขั้นหก	เลือกจุดยอด E ได้เส้นเชื่อม FE น้ำหนัก 80
ขั้นเจ็ด	เลือกจุดยอด H ได้เส้นเชื่อม FH น้ำหนัก 150
ขั้นสุดท้าย	เลือกจุดยอด D ได้เส้นเชื่อม ED น้ำหนัก 230

จะเห็นได้ว่ากราฟต้นไม้ที่ได้เป็นแบบเดียวกันกับกราฟต้นไม้ที่ได้โดยวิธีของครัสแคล แต่มีความแตกต่างในการเพิ่มเส้นเชื่อมใน T กราฟต้นไม้ที่ได้ตามวิธีของพริม เป็นแบบทอดข้ามแต่เห็นไม่ชัดว่าเป็นแบบที่ให้ค่าต่ำสุด อย่างไรก็ตามมีทฤษฎีบทที่ชี้ให้เห็นว่าวิธีของพริมจะได้กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด ดังนี้

ทฤษฎีบท 8.10

ขั้นตอนวิธีของพริม เมื่อใช้กับกราฟเชื่อมโยง G จะทำให้ได้กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของ G ซึ่งมีค่าต่ำสุด

พิสูจน์

ให้ G เป็นกราฟแสดงน้ำหนักและมีความเชื่อมโยง ใช้ขั้นตอนวิธีของพริมกับกราฟ G ซึ่งในแต่ละขั้นตอนต้องหาเส้นที่เชื่อมโยงจุดยอดในกราฟย่อยกับจุดยอดนอกกราฟย่อย (เพราะ G มีความเชื่อมโยง จึงหาเส้นเชื่อมที่ต้องการนี้ได้) กราฟที่ได้ตามขั้นตอนวิธีของพริมเป็นกราฟต้นไม้ T เพราะจุดยอดและเส้นเชื่อมซึ่งเพิ่มในแต่ละขั้นตอนเชื่อมโยง ที่จุดยอดกับเส้นเชื่อมของ T และไม่มีขั้นตอนใดทำให้เกิดวงเวียน เพราะจุดยอดที่เพิ่มอยู่ต่างเซตกัน นอกจากนั้น T รวมทุกจุดของ G เพราะว่า T เป็นกราฟต้นไม้ซึ่งมีเส้นเชื่อม n -1 เส้น

ขั้นต่อไปเพิ่มพิสูจน์ว่า T มีน้ำหนักต่ำสุด กำหนดให้ กราฟ T_1 เป็นกราฟแบบทอดข้ามใด ๆ ที่มีค่าต่ำสุด ถ้า $T = T_1$ T มีน้ำหนักต่ำสุด แต่ถ้า $T \neq T_1$ แสดงว่ามีเส้นเชื่อมใน T ซึ่งไม่มีใน T_1 ในบรรดาเส้นเชื่อมทั้งหมดที่อยู่ใน T และไม่อยู่ใน T_1 ให้ e เป็นเส้นเชื่อมเส้นแรกซึ่งเลือกเพิ่มเข้ากับ T ตามวิธีการของพริม และ V เป็นเซตของจุดยอดใน T ที่มีอยู่ก่อนเลือกเส้น e ดังนั้น จุดยอดซึ่งอยู่ที่ปลายด้านหนึ่งของเส้น e สมมุติให้เป็น v จะอยู่ใน T และให้จุดยอดอีกจุดหนึ่งสมมุติให้เป็น w ไม่อยู่ใน T เนื่องจาก T_1 เป็นกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของ G ดังนั้น ต้องมีวิถีใน T_1 ซึ่งเชื่อมจุด v กับจุด w และตามวิถีนี้จะต้องพบเส้นเชื่อม e' ที่โยงจุดยอดจุดหนึ่งใน V กับจุดยอดอีกจุดหนึ่งนอก V

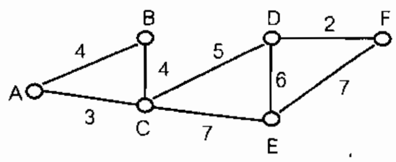
ขณะนี้ในขั้นตอนที่เพิ่ม e เข้ากับ T สามารถจะเพิ่ม e' ได้ถ้าน้ำหนัก e' น้อยกว่า e แต่เนื่องจากเป็นการเพิ่ม e และไม่ได้เพิ่ม e' จึงสรุปได้ว่าน้ำหนักของ e' มากกว่า e หรือ

$w(e') \geq w(e)$

ให้กราฟ T_2 เกิดจากกราฟ T_1 ด้วยการลบ e' ออกและเพิ่ม e [ดังนั้น เช่นเดียวกับ T กราฟ T_2 มีเส้นเชื่อมมากกว่า T_1 อยู่ 1 เส้น] เพราะว่า T_2 เป็นกราฟต้นไม้ การที่ e' เป็นส่วนของวิถีใน T_1 ที่เชื่อม v ถึง w และ e เชื่อม v และ w ดังนั้นการเพิ่ม e' กับ T_1 ทำให้เกิดวงเวียน เมื่อลบ e' ออกจากวงเวียนกราฟย่อยที่เหลืออยู่ยังมีความเชื่อมโยง [ความจริงแล้ว T_2 เป็นกราฟแบบทอดข้ามของ G เพราะว่าไม่มีการลบจุดยอดใดออกในการสร้าง T_2 จาก T_1 ซึ่งการอ้างเช่นนี้แสดงว่า $w(T_2) \leq w(T_1)$] ผลที่ตามมาคือ T_2 เป็นกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของ G ที่มีค่าต่ำสุดเหมือน T และมีเส้นเชื่อมมากกว่า T_1 อยู่ 1 เส้น ถ้า $T = T_2$ แสดงว่า T มีค่าต่ำสุด ถ้า $T \neq T_2$ ก็ทำตามขั้นตอนเดิมและหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด T_3 ที่มีเส้นเชื่อมร่วมกับ T มากกว่า T_1 อยู่ 1 เส้น ทำดังนี้ต่อไปตามลำดับ จะทำให้ได้กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด $T_1, T_2, T_3, \ldots$ ซึ่งต่างมีเส้นเชื่อมร่วมกับ T มากกว่ากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามที่สร้างไว้ก่อนคราวละ 1 เส้น และเนื่องจาก T มีจำนวนเส้นเชื่อมเป็นจำนวนจำกัด ลำดับกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามจึงมีเป็นจำนวนจำกัด ดังนั้น จะมีกราฟต้นไม้ T_k ซึ่งเหมือนกับ T แสดงให้เห็นว่า T คือกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด

ตัวอย่างที่ 15 (การหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด)

ให้ใช้วิธีการของครัสแคลและพริมหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด กำหนดให้เริ่มที่จุดยอด A สำหรับวิธีการของพริม



วิธีทำ

ตามขั้นตอนวิธีของครัสแคล จะเพิ่มเส้นเชื่อมตามลำดับ ของวิธีที่ 1 หรือ วิธีที่ 2 ดังนี้

วิธีที่ 1 (A,F) , (A,C), (A,B), (C,D), (D,E)

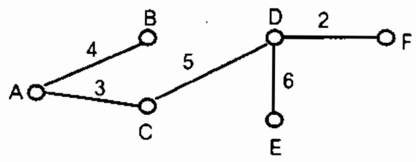
วิธีที่ 2 (D,F) , (A,C), (B,C), (C,D), (D,E)

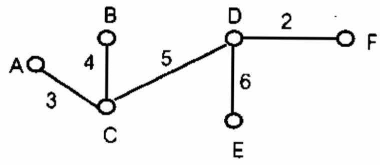
ตามขั้นตอนวิธีของพริม ซึ่งกำหนดให้เริ่มที่จุดยอด A จะเพิ่มเส้นเชื่อมตามลำดับได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 (A,C), (A,B), (C,D), (D,F) , (D,E)

วิธีที่ 2 (A,C), (B,C), (C,D), (D,F) , (D,E)

จะเห็นได้ว่าตามวิธีการทั้งของครัสแคลและพริม จะได้กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด 2 กราฟ ไม่ซ้ำกัน





8.7 การนับจำนวนกราฟต้นไม้

การนับจำนวนกราฟต้นไม้มีส่วนช่วยในการตอบปัญหาด้านต่าง ๆ เช่น ปัญหาที่ว่าระบบการชลประทานคลองส่งน้ำเชื่อมระหว่างสถานที่ 5 แห่ง กับคลอง 4 คลอง มีเป็นจำนวนเท่าใด หรือปัญหาการหาจำนวนโมเลกุลทางเคมีสูตร $C_8 H_{18}$ ว่ามีเท่ากับเท่าใด

โดยทั่วไป ปัญหาการนับจำนวนกราฟต้นไม้ซึ่งมีอักษรกำกับจุดยอดจะง่ายกว่าปัญหาการนับจำนวนกราฟต้นไม้ซึ่งไม่มีอักษรกำกับจุดยอด

ตารางต่อไปนี้แสดงจำนวนนับของกราฟต้นไม้ทั้ง 2 แบบ ที่มีอันดับ $n \leq 10$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
กราฟต้นไม้มีอักษรกำกับ	1	1	3	16	125	1296	16807	262144	4782969	10^8
กราฟต้นไม้ไม่มีอักษรกำกับ	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106

จากตารางนี้สามารถสรุปได้ว่าสำหรับกราฟต้นไม้มีอักษรกำกับอันดับ n จะมีจำนวนกราฟทั้งหมด n^{n-2} และผลลัพธ์นี้เป็นไปตามทฤษฎีของอาร์เธอร์ เคย์เลย์ ที่พิสูจน์ไว้ ดังนี้

<u>ทฤษฎีบท</u> 8.11

จำนวนของกราฟต้นไม้มีหมายเลขกำกับจุดยอดอันดับ n เท่ากับ n^{n-2}

การพิสูจน์ทฤษฎีใช้หลักการของพรูเฟอร์ (Prufer's contraction) ที่อาศัยความสัมพันธ์แบบ 1 - 1 ระหว่างกราฟต้นไม้มีแบบเลขกำกับจุดยอดอันดับ n กับลำดับของจำนวน n - 2 จำนวน (เรียกว่าลำดับของพรูเฟอร์) ซึ่งสำหรับหลักการของพรูเฟอร์มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

กำหนดเซตของกราฟต้นไม้มีหมายเลขกำกับจุดยอด n จุด กับเซตของลำดับในรูป $(b_1,b_2,b_3,\ldots,b_{n-2})$ ซึ่งในที่นี้แต่ละ b_i คือจำนวนเต็ม ในเซตของ 1,2,3,....., n (มีซ้ำกันได้) เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์แบบ 1 - 1 จะทำตามลำดับ 3 ขั้นตอนกับกราฟต้นไม้มีหมายเลขกำกับ จุดยอด n จุด ดังนี้

ก. จากกลุ่มของจุดยอดซึ่งมีดีกรี 1 เลือกจุดยอดที่มีหมายเลขน้อยที่สุด

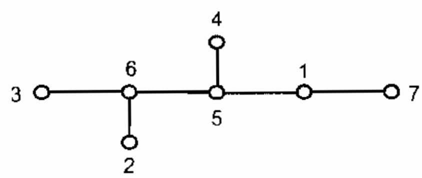
ข. เลือกจุดประชิดกับจุดยอดที่เลือกไว้ในข้อ ก. และใส่ตัวเลขในตำแหน่งแรกของลำดับ

ค. ลบจุดยอดที่เลือกในข้อ ก. และเส้นที่ประชิดกับจุดนี้ออกได้กราฟต้นไม้ที่เล็กกว่าเดิม

ง. ทำขั้นตอน ก, ข, ค ซ้ำใหม่ จนกว่าจะเหลือจุดยอด 2 จุด จะได้ลำดับของพรูเฟอร์

<u>ตัวอย่างที่</u> 16

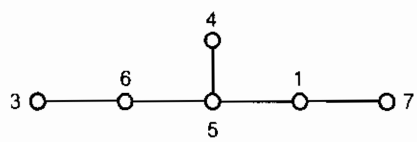
จากกราฟต้นไม้มีตัวเลขกำกับที่กำหนดให้



ก. กลุ่มจุดยอดดีกรี 1 คือ จุด 3, 2, 4 และ 7 มีจุดยอดตัวเลข 2 เล็กสุด

ข. จุดประชิดกับ 2 คือ 6 ดังนั้นตัวเลขตำแหน่งแรกในลำดับของพรูเฟอร์คือ 6

ค. ลบจุดยอดหมายเลข 2 และเส้นเชื่อม 26 ออกได้กราฟต้นไม้ที่เล็กกว่าเดิมคือ

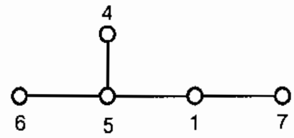


ง. ทำซ้ำขั้นตอน ก, ข, ค

ก. จุดยอดดีกรี 1 คือจุด 3, 4 และ 7 ซึ่ง 3 เป็นหมายเลขน้อยที่สุด

ข. จุดประชิดกับจุดหมายเลข 3 คือ 6 ดังนั้นตัวเลขในลำดับตัวที่สอง คือ 6

ค. ลบเส้น 36 ได้กราฟต้นไม้ คือ



ง. ทำซ้ำต่อไปจะได้ลำดับของพรูเฟอร์ คือ (6, 6, 5, 5, 1) เส้นเชื่อมที่ลบออกตามลำดับ คือ 4 5, 6 5 และ 5 1

ในทางกลับกันสามารถใช้ลำดับของพรูเฟอร์หาความสัมพันธ์แบบ 1 - 1 ได้เช่นเดียวกัน โดยทำตามขั้นตอน ดังนี้

ก. เขียนจุดยอด n จุด ใส่หมายเลขกำกับตั้งแต่ 1 ถึง n และมีรายการตัวเลข จาก 1 ถึง n

ข. ดูตัวเลขที่น้อยที่สุดในรายการและเป็นตัวเลขที่ไม่อยู่ในลำดับของพรูเฟอร์ หาตัวเลขแรกสุดในลำดับของพรูเฟอร์ แล้วเพิ่มเส้นเชื่อมโยงจุดกับหมายเลข

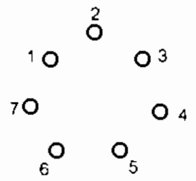
ค. ลบตัวเลขลำดับแรกในข้อ ข. ออกจากรายการและลบตัวเลขอีกตัวหนึ่งออกจากลำดับของพรูเฟอร์ จะได้รายการและลำดับซึ่งเล็กกว่าเดิม

ง. ทำขั้นตอนในข้อ ข. และ ค ซ้ำ ๆ ต่อไปจนเหลือเพียง 2 หมายเลขในรายการ และโยงจุดกับตัวเลขเหล่านี้

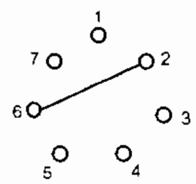
<u>ตัวอย่างที่ 17</u>

จากลำดับของพรูเฟอร์ (6, 6, 5, 5, 1)

ก. เพราะว่าลำดับมี 7 - 2 = 5 จำนวน จึงเริ่มรายการด้วย (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) และสร้างจุดยอด 1 ถึง 7 ดังรูป

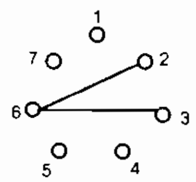


ข. จำนวนน้อยที่สุดในรายการแต่ไม่อยู่ในลำดับของพรูเฟอร์ คือ 2 และจำนวนแรกสุดในลำดับของพรูเฟอร์ คือ 6 ดังนั้น จึงโยงเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 กับ 6

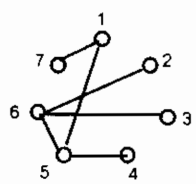


ค. ลบเลข 2 ออกจากรายการและลบเลข 6 ออกจากลำดับของพรูเฟอร์ จะได้รายการ (1, 3, 4, 6, 7) และลำดับ (6, 5, 5, 1) (กลับไปที่ขั้นตอน ข. ใหม่)

ง. จำนวนน้อยที่สุดในรายการ และไม่อยู่ในลำดับของพรูเฟอร์ คือ 3 ส่วนจำนวนแรกสุดในลำดับของพรูเฟอร์ คือ 6 ดังนั้น โยงเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 3 กับ 6



จ. ลบเลข 3 ออกจากรายการ และลบเลข 6 ออกจากลำดับของพรูเฟอร์ได้รายการใหม่เป็น (1, 4, 6, 7) และลำดับของพรูเฟอร์ใหม่เป็น (5, 5, 1) ทำขั้นตอนในข้อ ข. และ ค. ซ้ำ ๆ ต่อไปจะได้เส้นเชื่อมโยงจุดยอด 4 กับ 5 เส้นเชื่อมโยงจุดยอด 6 กับ 5 และ เส้นเชื่อมโยงจุดยอด 5 กับ 1 และรายการท้ายสุดคือ (1, 7) สร้างเส้นเชื่อมโยงจุด (1, 7)



จะเห็นได้ว่ากราฟต้นไม้มีตัวเลขกำกับจุดยอดที่ได้จากลำดับของพรูเฟอร์ (6, 6, 5, 5, 1) คือ กราฟต้นไม้มีตัวเลขกำกับจุดยอดที่ทำให้ได้ลำดับของพรูเฟอร์ ซึ่งกรณีเช่นนี้จะเกิดขึ้นเป็นปกติ ถ้าเริ่มต้นด้วยกราฟต้นไม้จะได้ลำดับของพรูเฟอร์ และเมื่อเริ่มจากลำดับ ลำดับของพรูเฟอร์ จะได้กราฟต้นไม้เดิม นั่นคือ ความสัมพันธ์ แบบ 1 - 1 ที่ต้องการ

จากขั้นตอนดังกล่าวนี้จึงสามารถนำมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทของเคย์เลย์ โดยสรุปได้ว่า เนื่องจากมีความสัมพันธ์แบบ 1 - 1 ระหว่างกราฟต้นไม้มีอักษรกำกับจุดยอด n จุด กับ เซตของลำดับพรูเฟอร์ $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ ซึ่ง a_i คือ จำนวนเต็ม 1, 2, 3, ……,n (จำนวนนี้ซ้ำได้) และมีค่าที่เป็นไปได้อย่างแน่นอน n ค่าสำหรับแต่ละ a_i ดังนั้น จำนวนของลำดับที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ a^{n-2} ตามทฤษฎีบทของเคย์เลย์ ที่กล่าวถึงในตอนแรก

นอกจากทฤษฎีบทของเคย์เลย์ ยังมีทฤษฎีบทของเคอร์ชอฟ เกี่ยวกับการหาจำนวนกราฟต้นไม้แบบทอดข้าม ดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 8.12</u>

ถ้า M เป็นเมทริกซ์ซึ่งได้จากเมทริกซ์ประชิดของกราฟเชื่อมโยง G ด้วยการเปลี่ยนบรรดาสมาชิกเลข 1 ทั้งหลายให้เป็น -1 และเปลี่ยนสมาชิกเลข 0 ในแนวทะแยงให้เท่ากับจำนวนดีกรีของจุดยอดที่สมนัย แล้วจะได้ว่าจำนวนกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ G จะเท่ากับค่าของ cofactor ใด ๆ ของ M

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีนี้จะดูได้จากหนังสือ ทฤษฎีกราฟและประยุกต์ของ J. A. Bondy และ U.S.R Monty ในที่นี้จะแสดงเฉพาะตัวอย่างของการหาจำนวนกราฟต้นไม้แบบทอดข้าม

<u>ตัวอย่างที่ 18</u>

กำหนดให้เมทริกซ์ประชิดของกราฟเชื่อมโยง G คือ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ตามทฤษฎีบทของเคอร์ชอฟ จะได้เมทริกซ์ M เป็น

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า cofactor ของ M_{11} คือ (กระจายโดย cofactor ของแถวที่ 1)

$$+\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 2 - 2 = 8$$

หรือ cofactor ของ M_{23} คือ (กระจายโดย cofactor ของหลักที่ 3)

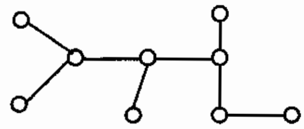
$$-\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = -\left[(-1)(0) + 2(-3-1)\right] = -(-8) = 8$$

ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทของเคอร์ชอฟว่าจำนวนกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามจะเท่ากับ cofactor ได ๆ ของ M ซึ่งในที่นี้เท่ากับ 8

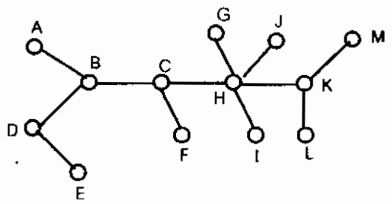
❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋

แบบฝึกหัด

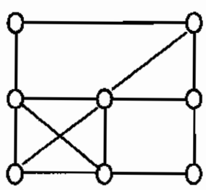
1. ให้หาและสร้างกราฟต้นไม้อันดับ 7 ทั้งหมดด้วยการเพิ่มจุดและเส้นเข้ากับกราฟต้นไม้อันดับ 6
2. กราฟต้นไม้เป็นกราฟปกติได้หรือไม่ อธิบาย
3. กราฟต้นไม้ G จะมีวิถีเพียง 1 วิถีระหว่างจุด u และ v ที่ไม่ซ้ำกัน จงยกตัวอย่างกราฟเชื่อมโยงซึ่งมีวิถี 2 วิถี ระหว่างจุด u - v ที่ไม่ซ้ำกัน
4. จงพิสูจน์ว่ากราฟต้นไม้จะมีวงจรเกิดขึ้นเมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม 1 เส้น
5. ให้อธิบายว่าเมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม 1 เส้นในกราฟต้นไม้จะเป็นไปได้หรือไม่ที่กราฟใหม่มีวงจร 2 วงจร
6. จงแสดงให้เห็นตามทฤษฎีของกราฟต้นไม้ว่ากราฟข้างล่างนี้มีคุณสมบัติเป็นกราฟต้นไม้

T : 

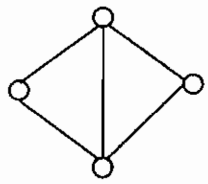
7. กราฟต้นไม้ข้างล่างนี้มีจุดตัดและสะพานที่ใดบ้าง



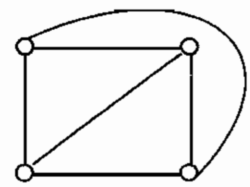
8. ให้หากราฟต้นไม้แบบทอดข้าม 2 แบบจากกราฟเชื่อมโยงที่กำหนดให้



9. ให้หากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามทั้งหมดของกราฟต่อไปนี้



9.1

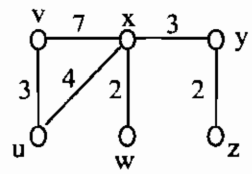


9.2

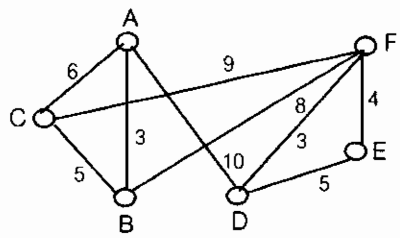
10. จากกราฟเชื่อมโยงที่กำหนดให้ จงหา

10.1 กราฟต้นไม้แบบทอดข้าม

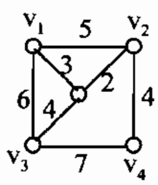
10.2 กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดตามวิธีของครัสแคล และพริม



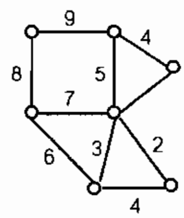
G_1



G_2

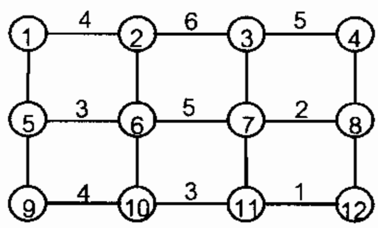


G_3



G_4

11. เพื่อส่งเสริมการท่องเที่ยวในประเทศไทย องค์การท่องเที่ยวจำเป็นต้องจัดให้มีการติดต่อสื่อสารกันได้ระหว่างสถานที่ท่องเที่ยว 12 แห่ง เพื่ออำนวยความสะดวกให้นักท่องเที่ยวชาวต่างประเทศ ค่าใช้จ่ายในการติดตั้งอุปกรณ์การสื่อสาร (คิดเป็นหมื่นบาท) มีดังนี้



ให้หาว่าองค์การท่องเที่ยวควรจะให้มีการติดตั้งอุปกรณ์การสื่อสาร ณ ที่ใดบ้าง ซึ่งทำให้สถานที่ทุกแห่งติดต่อถึงกันได้ และเสียค่าใช้จ่ายในการติดตั้งต่ำสุด

12. ระยะทางระหว่างเมือง A B C D และ E (คิดเป็นกิโลเมตร) มีดังนี้

	A	B	C	D	E
A	-	132	217	164	58
B	132	-	290	201	79
C	216	290	-	113	303
D	164	201	113	-	196
E	58	79	303	196	-

ถ้ารัฐบาลจำเป็นต้องสร้างทางหลวงเชื่อมโยงเมืองทั้ง 5 แห่ง แต่สภาพภูมิประเทศทำให้การสร้างทางหลวงระหว่างเมือง A กับ B เป็นไปไม่ได้ และสร้างไม่ได้ระหว่าง C กับ E จงหาว่ารัฐบาลจะสร้างทางหลวงเชื่อมโยงเมืองทั้ง 5 แห่ง ได้อย่างไร โดยให้มีระยะทางในการก่อสร้างต่ำสุด (เพื่อประหยัดงบประมาณ)