บทที่ 7
ความเชื่อมโยง

7.1 <u>นำเรื่อง</u>

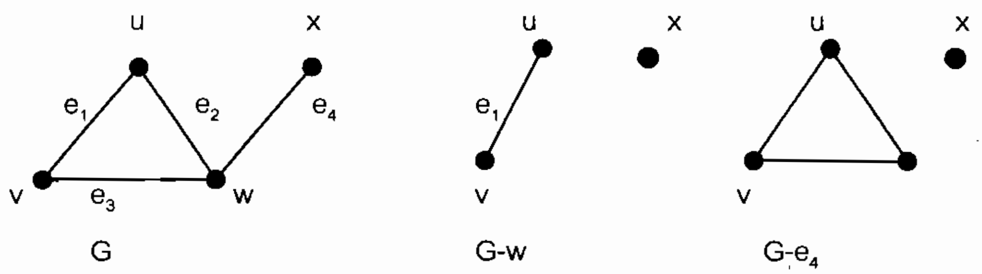
ในบทนี้จะเป็นเรื่องเกี่ยวกับความเชื่อมโยงและบทนิยามต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องซึ่งในขั้นแรกมีแนวความคิดสำคัญที่เกี่ยวข้องต่อไปนี้ คือ

ถ้ากำหนดให้ e เป็นเส้นเชื่อมเส้นหนึ่งในกราฟ G ใด ๆ กราฟ G – e คือกราฟย่อยของ G ซึ่งมีจำนวนจุดยอดเท่ากับจุดยอดในกราฟ G และมีจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ G ทั้งหมดยกเว้นเส้นเชื่อม e

ในทำนองเดียวกัน ถ้ากราฟ G มีจำนวนจุดยอดอย่างน้อยสองจุดขึ้นไป และมีจุด v เป็นจุดยอดจุดหนึ่งในกราฟ กราฟ G – v คือกราฟย่อยของ G ซึ่งรวมจุดยอดทุกจุดใน G ยกเว้นจุดยอด v และเส้นเชื่อมที่โยงกับจุด v

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

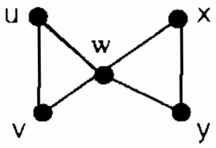
เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นแนวความคิดการลบจุดยอด หรือเส้นเชื่อมออกจากกราฟ



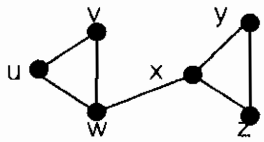
7.2 <u>จุดตัดและสะพาน</u>

> **<u>บทนิยาม 7.2.1</u>** (จุดตัด)
>
> จุดยอด v ในกราฟเชื่อมโยง G ใด ๆ เรียกว่าจุดตัด ถ้ากราฟ G – v ขาดความเชื่อมโยง

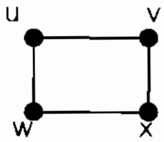
ตัวอย่างที่ 2



G_1



G_2



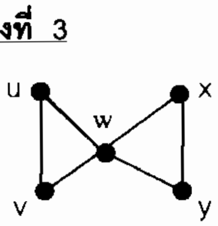
G_3

ตามบทนิยามจะเห็นได้ว่า กราฟ G_1 มีจุดยอด w เป็นจุดตัดเพียงจุดเดียวส่วนกราฟ G_2 มีจุดยอด 2 จุด ที่เป็นจุดตัด คือ จุด w กับจุด x แต่ทั้ง G_1 และ G_2 มี $r(G) = 1$ สำหรับกราฟ G_3 มี $r(G) = 2$

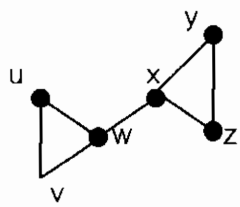
บทนิยาม 7.2.2 (สะพาน)

เส้นเชื่อม e ในกราฟเชื่อมโยง G ใด ๆ เรียกว่า สะพาน ถ้ากราฟ G – e ขาดความเชื่อมโยง

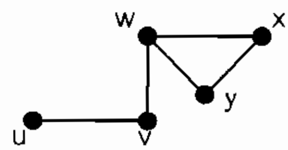
ตัวอย่างที่ 3



G_1



G_2



G_3

ตามบทนิยามจะเห็นได้ว่ากราฟ G_1 ไม่มีสะพาน กราฟ G_2 มีเส้นเชื่อม wx เป็นสะพาน 1 สะพาน และ กราฟ G_3 มีเส้นเชื่อม uv กับ vw เป็นสะพาน 2 สะพาน

ทฤษฎีบท 7.1

จุดยอด v ในกราฟเชื่อมโยง G เรียกว่า <u>จุดตัด</u> ใน G ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ จุดยอด v อยู่บนวิถี จากจุดยอด u ถึงจุดยอด w สำหรับ u และ w ใด ๆ ใน G

พิสูจน์

⇨ ถ้า v เป็นจุดตัดในกราฟ G (นั่นคือ G – v ขาดความเชื่อมโยง) ให้ u และ w เป็นจุดยอดในส่วนประกอบต่างกันของกราฟ G – v แสดงว่ากราฟ G – v จะไม่มีวิถีจาก u ถึง w แต่เนื่องจากกราฟ G มีความเชื่อมโยง ดังนั้นจะต้องมีวิถีจาก u ถึง w ใน G นั่นคือทุกวิถีจาก u ถึง w ใน G ต้องรวม v ด้วย

⇦ ในทางกลับกัน ถ้าทุกวิถีจาก u ถึง w ใน G รวมจุด v แสดงว่าจะต้องไม่มีวิถีจาก u ถึง w ในกราฟ G – v นั่นคือกราฟ G – v ขาดความเชื่อมโยง ดังนั้น v เป็นจุดตัดใน G

> **ทฤษฎี 7.2**
>
> ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยง เส้นเชื่อม e ในกราฟ G เรียกว่า สะพาน ของ G ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อเส้นเชื่อม e ไม่อยู่ในวงเวียนของกราฟ G

พิสูจน์

⇨ ให้เส้นเชื่อม e = uv เป็นสะพาน และ e ไม่อยู่ในวงเวียน C ของกราฟ G ให้วงเวียน C คือ u, v, w, …… ,x, u (w ตามหลัง v และ x อยู่หน้า u) กราฟ G – e มีวิถีจาก u ถึง v คือ u, x, ………, w, v แสดงว่าออกจากจุดยอด u ไปยัง v ได้ (เพื่อแสดงว่ากราฟ G – e มีความเชื่อมโยง)

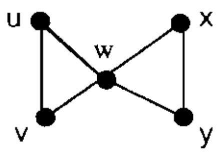
ถ้าจุดยอด u_1 กับ v_1 อยู่ในกราฟ G – e จะต้องมีวิถีจาก u_1 ถึง v_1 เนื่องจากกราฟ G มีความเชื่อมโยง ดังนั้น จะต้องมีวิถี P ของ u_1 ถึง v_1 ใน G ถ้าเส้นเชื่อม e ไม่อยู่ใน P แสดงว่าวิถี P ต้องอยู่ในกราฟ G – e ด้วย และกราฟ G – e มีวิถีจาก u_1 ถึง v_1 ถ้าเส้นเชื่อม e อยู่ใน P แสดงว่าวิถี P คือ u_1,…., u,v,….., v_1 หรือวิถี P คือ u_1,…., v, u,….., v_1 เพราะว่า u เชื่อมโยงถึง v ในกราฟ G – e ดังนั้นจากความเหมือนกันของความสัมพันธ์ในการเชื่อมโยงจุดใน G – e แสดงว่า u_1 เชื่อมโยงถึง v_1 ดังนั้นถ้าเส้นเชื่อม e อยู่ในวงเวียนกราฟ G – e มีความเชื่อมโยงแสดงว่า e ไม่เป็นสะพาน (ได้ข้อขัดแย้ง)

⇦ ถ้าเส้นเชื่อม e = uv ไม่เป็นสะพานและไม่อยู่ในวงเวียนของกราฟ G ดังนั้นกราฟ G – e มีความเชื่อมโยง แสดงว่ามีวิถีจากจุดยอด u ถึงจุดยอด v ในกราฟ G – e แต่วิถีจากจุดยอด u ถึงจุดยอด v รวมกับเส้นเชื่อม e จะทำให้ได้วงเวียนใน G ซึ่งรวมเส้นเชื่อม e (ได้ข้อขัดแย้ง) ดังนั้นสรุปได้ว่าเส้นเชื่อม e เป็นสะพาน

<u>บทนิยาม</u> <u>7.2.3</u> (จำนวนจุดตัด)

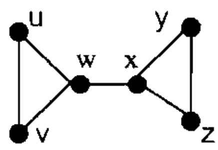
จุดยอดจำนวน<u>น้อยที่สุด</u>ซึ่งทำให้กราฟเชื่อมโยง G ขาดความเชื่อมโยง เรียกว่า จำนวนจุดตัด และใช้สัญลักษณ์ $\propto$ (G) ถ้า $\propto$ (G) $\geq$ k เรียกว่ากราฟ Gมีจำนวนจุดตัด k จุด (ซึ่งจะทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง)

<u>ตัวอย่างที่ 4</u>



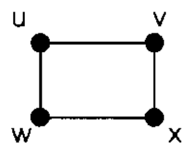
$\alpha(G)_{=1}$

จุดตัด w



$\alpha(G)_{=1}$

จุดตัด w กับ x



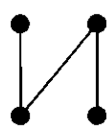
$\alpha(G)_{=2}$

จุดตัด u กับ w **หรือ** v กับ x

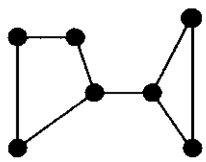
<u>บทนิยาม</u> <u>7.2.4</u> (จำนวนเส้นตัด)

เส้นเชื่อมจำนวน<u>น้อยที่สุด</u>ซึ่งทำให้กราฟเชื่อมโยง G ขาดความเชื่อมโยง เรียกว่า จำนวนเส้นตัด และใช้สัญลักษณ์ β (G) ถ้า β(G) = k เรียกว่า กราฟ G มีจำนวนเส้นตัด k เส้น (ซึ่งจะทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง)

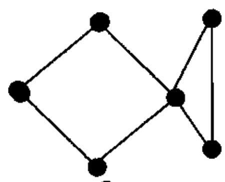
<u>ตัวอย่างที่ 5</u>



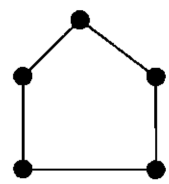
$\beta(G) = 1$



$\beta(G) = 1$



$\beta(G) = 2$

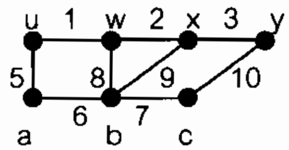


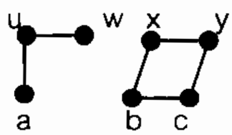
$\beta(G) = 2$

<u>ข้อสังเกต</u>

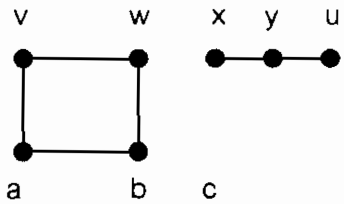
ในการเลือกเส้นเชื่อมที่ลบออกเพื่อให้กราฟขาดความเชื่อมโยง โดยทั่วไปจะเลือกเส้นเชื่อมจำนวนน้อยที่สุด

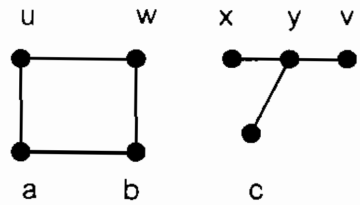
ตัวอย่างที่ 6





กราฟนี้ขาดความเชื่อมโยงเมื่อลบเส้นเชื่อมจำนวน 3 เส้น คือ wx, wb และ ab และกราฟจะไม่ขาดความเชื่อมโยงถ้าลบเพียง 2 เส้น นั่นคือจะต้องลบทั้ง 3 เส้น กราฟจึงจะขาดความเชื่อมโยง ในทำนองเดียวกันถ้าลบเส้นเชื่อม wx , bc, bx และ ye





กราฟจะขาดความเชื่อมโยงเช่นกัน แต่การลบในที่นี้เส้นเชื่อม yc เป็นเส้นที่เกินความจำเป็นในการลบออก เพราะถ้าไม่ลบเส้น yc กราฟก็ขาดความเชื่อมโยงแล้ว (นั่นคือลบเฉพาะเส้นเชื่อม wx, bc และ bx)

> **บทนิยาม 7.2.5** (เซตของเส้นตัด)
>
> เซตของเส้นตัดในกราฟเชื่อมโยง G คือเซตของเส้นเชื่อม S ที่มีสมบัติว่าเมื่อลบเส้นเชื่อมทั้งหมดใน S กราฟ G ขาดความเชื่อมโยง <u>และ</u> ถ้าลบเส้นเชื่อมเพียงบางเส้น กราฟ G ไม่ขาดความเชื่อมโยง

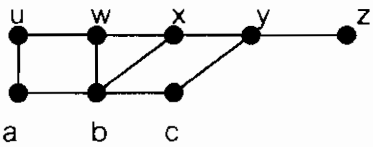
ตัวอย่างที่ 7

กราฟเชื่อมโยงในตัวอย่างที่ 6 มีเซตของเส้นตัดคือ {ab, wb, wx} หรือ {bc, xy} แสดงให้เห็นว่าเซตของเส้นตัดไม่จำเป็นต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากัน

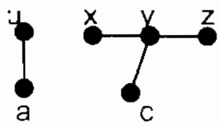
<u>บทนิยาม 7.2.6</u> (เซตของจุดตัด)

เซตของจุดตัดในกราฟเชื่อมโยง G คือ เซต ของจุดยอด S ที่มีสมบัติว่าเมื่อลบจุดยอดทั้งหลายใน S กราฟ G ขาดความเชื่อมโยง <u>และ</u> ถ้าลบจุดยอดเพียงบางจุดกราฟ G ไม่ขาดความเชื่อมโยง

<u>ตัวอย่างที่ 8</u>

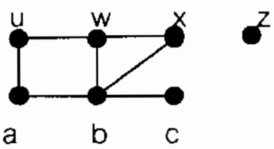


G



G-{b,w}

จะเห็นได้ว่าเมื่อลบจุดยอด b และ w ในกราฟ จะทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง ดังนั้น {b, w} เป็นเซตของจุดตัด และเซตของจุดตัดอาจมีหลายเซต ซึ่งแต่ละเซตอาจมีจำนวนจุดยอดในเซตแตกต่างกัน เช่น กราฟตามตัวอย่างนี้มี {y} เป็นเซตของจุดตัดด้วย



G-{y}

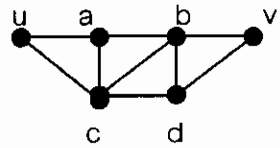
7.3 <u>วิถีและการตัดวิถี</u>

<u>บทนิยาม 7.3.1</u> (วิถี)

ให้ u และ v เป็นจุดยอดในกราฟเชื่อมโยง G วิถีจาก u ถึง v ตั้งแต่ 2 วิถีขึ้นไป เรียกว่าวิถี uv ถ้าไม่มีเส้นเชื่อมหรือจุดยอดใด ๆ ร่วมกันในวิถี uv (ยกเว้น u กับ v)

<u>ตัวอย่างที่ 9</u>

จากกราฟ



วิถี uabv กับ ucdv เป็นวิถีจาก u – v ที่ไม่มีเส้นเชื่อมหรือจุดยอดใด ๆ ซ้ำกัน

วิถี uabv กับ ucbv เป็นวิถีจาก u – v ที่มีเส้นเชื่อม bv และจุดยอด b ซ้ำกัน

วิถี uabv กับ ucbdt เป็นวิถีจาก u – v ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน แต่มีจุดยอดร่วมกัน คือ b

บทนิยาม 7.3.2 (การตัดวิถี)

วิถีจากจุดยอด u ถึง v ในกราฟเชื่อมโยง G เรียกว่า ถูกตัดออกจากกัน ถ้าลบจุดยอดบางจุดหรือเส้นเชื่อมบางเส้นแล้วทำให้จุดยอด u กับ v ถูกแบ่งแยกจากกัน

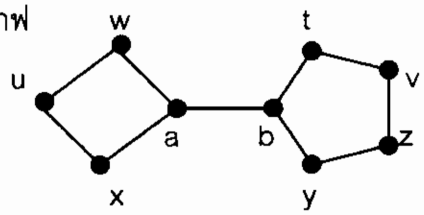
ตัวอย่างที่ 10

จากกราฟ

จะเห็นได้ว่าถ้าลบเส้นเชื่อม ab, bc, และ cd ตัดวิถีจาก u ถึง v ให้ขาดจากกัน ในทำนองเดียวกันถ้าลบเส้นเชื่อม ua, ab, bc, cd และ dv จะทำให้ไม่มีวิถีจาก u ถึง v และถ้าลบจุดยอด b กับ c หรือลบจุดยอด a, c และ d จะทำให้ไม่มีวิถีจาก u ถึง v

ตัวอย่างที่ 11

จากกราฟ



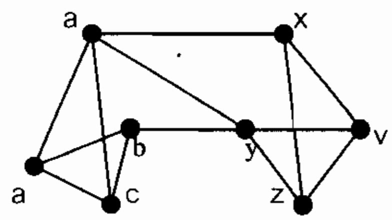
จะเห็นได้ว่าเมื่อลบเส้นเชื่อม a b เพียงเส้นเดียวจะไม่มีวิถีจาก u ถึง v และถ้ามีวิถีจาก u ถึง v สองวิถีขึ้นไปทุกวิถีต้องรวมเส้นเชื่อม a b

ตัวอย่างที่ 12

จากกราฟ

จะเห็นได้ว่าเมื่อลบเส้นเชื่อม 2 เส้น คือ bx กับ cy จะทำให้ไม่มีวิถีจาก u ถึง v หรือแยก u จาก v และจะมีวิถีจาก u ถึง v ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันได้เพียง 2 วิถี เพราะทุกวิถี uv ต้องรวมเส้นเชื่อม bx หรือ cy

ตัวอย่างที่ 13



จากกราฟจะเห็นได้ว่าเมื่อลบเส้นเชื่อม 3 เส้น คือ ax, ay และ by จะตัดวิถีจาก u ถึง v และกราฟนี้มีวิถีจาก u ถึง v ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันได้อย่างมากที่สุดเพียง 3 วิถี เพราะทุกวิถีต้องรวมเส้นเชื่อม ax, ay หรือ by เส้นใดเส้นหนึ่ง

จากตัวอย่างต่าง ๆ แสดงให้เห็นว่าเมื่อลบเส้นเชื่อมทำให้วิถี จาก u ถึง v ขาดความเชื่อมโยง ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าในกรณีทั่ว ๆ ไป ทุกวิถีจาก u ถึง v จะต้องมีเส้นเชื่อมอย่างน้อยที่สุด จำนวน 1 เส้น ซึ่งถ้าลบออกแล้วจะทำให้หาวิถีจาก u ถึง v ไม่ได้ หรือวิถีจาก u ถึง v ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันจะมีจำนวนไม่เกินจำนวนของเส้นเชื่อมนั่นคือ สำหรับเซตของเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถีจาก u ถึง v ขาดความเชื่อมโยง

จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ จำนวนของเส้นเชื่อมในเซตเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถีจาก u ถึง v ขาดความเชื่อมโยง

สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้ คือ

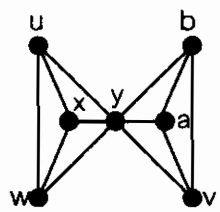
ทฤษฎีบท 7.3

ถ้า u และ v เป็นจุดยอดในกราฟเชื่อมโยง G จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันที่ทำให้วิถี uv ขาดจากกัน จะเท่ากับ จำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง

ตามทฤษฎีนี้กล่าวได้ว่า ถ้าหาวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันได้ n วิถี และหาเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยงได้ n เส้น ก็แสดงว่า n คือ จำนวนสูงสุดของวิถี uv ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน และ n คือ จำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยงเส้นเชื่อมเหล่านี้ทำให้ได้เซตของเส้นตัด ดังนั้น เมื่อต้องการหาเส้นเชื่อมเหล่านี้ก็ให้หาที่เซตเส้นตัดซึ่งแบ่งกราฟ G เป็นสองส่วน ส่วนหนึ่ง มีจุดยอด u และอีกส่วนหนึ่งมีจุดยอด v

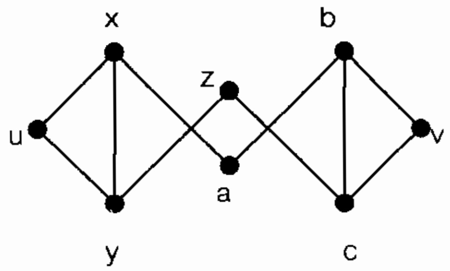
นอกจากความเชื่อมโยงด้วยเส้นเชื่อมยังมีความเชื่อมโยงด้วยจุดยอดซึ่งมีลักษณะคล้ายกัน ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างและทฤษฎีบทต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 14



กราฟในตัวอย่างนี้มีความเชื่อมโยงด้วยจุดยอด 1 จุด คือ จุดยอด y ที่แยก u จาก v และมีเพียงจุดยอด y เพียงจุดเดียวที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง เพราะทุกวิถี uv ต้องรวมจุดยอด y

ตัวอย่างที่ 15



กราฟตามตัวอย่างนี้มีความเชื่อมโยงด้วยจุดยอด 2 จุด คือ a กับ z ที่แยก u จาก v และมีเพียงจุดยอด a กับ z เท่านั้นที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง เพราะทุกวิถี uv ต้องรวมจุดยอด a หรือ z

จากตัวอย่างชี้ให้เห็นว่าเมื่อลบจุดตัดทำให้วิถีจาก u ถึง v ขาดความเชื่อมโยง ดังนั้นในกรณีทั่ว ๆ ไป ทุกวิถีจาก u ถึง v ต้องมีจุดตัดอย่างน้อยที่สุด 1 จุด นั่นคือ จำนวนสูงสุดของจุดตัดที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยงมีไม่เกินจำนวนจุดยอดในเซต สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 7.4

ให้ u และ v เป็นจุดยอดซึ่งไม่เป็นจุดประชิดกันในกราฟเชื่อมโยง G จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกันและทำให้วิถีขาดความเชื่อมโยงเท่ากับจำนวนต่ำสุดของจุดยอดที่ทำให้วิถีขาดความเชื่อมโยง

ตามทฤษฎีนี้จะเห็นได้ว่าถ้าหาวิถี uv จำนวน k วิถี ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกัน และหาจุดยอด k จุดที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง จะได้ว่า k คือจำนวนสูงสุดของวิถี uv และเป็นจำนวนต่ำสุดของจุดยอดในเซตตัด ซึ่งตัดวิถี uv และจุดยอดจำนวน k จุดนี้คือเซตตัดของจุดยอด ในการหาจุดยอดเหล่านี้จะพิจารณาว่าจุดยอดใด เมื่อลบออกจากกราฟเชื่อมโยง G แล้วจะทำให้กราฟ G ถูกแบ่งเป็น 2 ส่วน ซึ่งส่วนหนึ่งรวมจุด u และอีกส่วนหนึ่งรวมจุด v

ต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเชื่อมโยงในกราฟระบุทิศทาง ซึ่งนำมาเสนอไว้เพื่อให้เกิดความสมบูรณ์

ทฤษฎีบท 7.5

ถ้า u และ v เป็นจุดยอดซึ่งไม่ประชิดกันในกราฟเชื่อมโยงระบุทิศทาง D จำนวนสูงสุดของวิถี uv ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน เท่ากับจำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง

พิสูจน์

เพราะว่าจำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันจะไม่เกินกว่าจำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมซึ่งทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง (เพื่อแสดงให้เห็นว่าจำนวนทั้งสองนี้มีค่าเท่ากัน เช่นเท่ากับ k) ให้ A เป็นเซตของวิถี uv จำนวน k วิถี ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน

ให้ Bเป็นเซตของจุดยอดในกราฟระบุทิศทาง D ซึ่งมีวิถีมาจากจุดยอด u โดยไม่เป็นวิถีที่ซ้ำกับวิถีใน A และให้ C เป็นเซตของจุดยอดที่เหลืออื่น ๆ ในกราฟ D

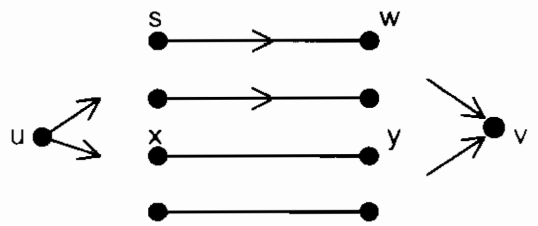
จะเห็นได้ว่า v ต้องเป็นจุดยอดที่อยู่ใน C เพราะว่าถ้า v อยู่ใน B จะต้องมีวิถี uv ที่แตกต่างออกไปอีกวิถีหนึ่ง ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะเซต A รวมวิถี uv ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันไว้เป็นจำนวนสูงสุดแล้ว

ให้ S เป็นเซตของเส้นเชื่อมระบุทิศทางใน D จากจุดยอด w ในเซต B ไปยังจุดยอด x ใน C เส้นเชื่อมใน S นี้จะต้องรวมวิถีหนึ่งในเซต A เพราะมิฉะนั้นจุดยอด x (รวมทั้ง w) สามารถจะมีเส้นเชื่อมมาจากจุดยอด u โดยใช้วิถีที่แตกต่างจากวิถีทั้งหลายใน A และ จุดยอด x จะอยู่ในเซต B แทนที่จะอยู่ใน C

จากเหตุผลในแนวเดียวกันนี้ เส้นเชื่อมระบุทิศทางใด ๆ จากจุดยอดในเซต C ไปยังจุดยอด B จะต้องไม่รวมอยู่ในวิถีของเซต A

ดังนั้น จำนวนเส้นเชื่อมใน S จะเท่ากับจำนวนของวิถีในเซต A นั่นคือ เซต S มีเส้นเชื่อมจำนวน k เส้น ซึ่งเมื่อลบออกจะทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง

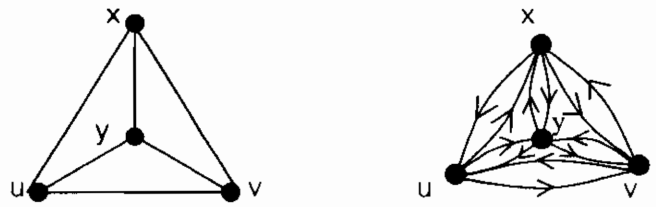
แสดงว่าจำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นร่วมกันเท่ากับจำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง (เท่ากับ k)



ข้อสังเกต

ในเรื่องของเส้นเชื่อมกับความเชื่อมโยง <u>เมื่อนำมาใช้ในกราฟ</u> สามารถใช้ทฤษฎีบท 7.5 ได้โดยพิจารณากราฟในรูปของกราฟระบุทิศทางด้วยการแทนเส้นเชื่อม 1 เส้น ใน H ด้วยเส้นเชื่อมระบุทิศทาง 2 เส้นใน D (H)

เช่น



กราฟ H　　　　กราฟระบุทิศทาง D(H)

จะเห็นได้ว่า

ก. จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันใน H เท่ากับจำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันใน D(H)

ข. จำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมใน H ซึ่งแยกจุดยอด u จาก v เท่ากับ จำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมระบุทิศทางซึ่งแยกจุดยอด u จาก v ใน D(H)

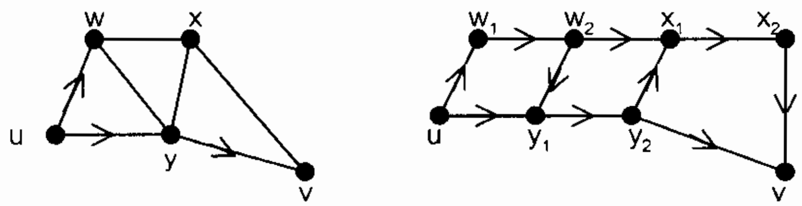
ดังนั้น ตามทฤษฎีบท 7.5 จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันใน D(H) เท่ากับจำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมใน D(G) ซึ่งแยกจุดยอด u จาก v

<u>ทฤษฎีบท 7.6</u>

ถ้า u และ v เป็นจุดยอดซึ่งไม่ประชิดกันในกราฟเชื่อมโยงระบุทิศทาง D จำนวนสูงสุดของวิถี uv ที่ไม่มีจุดยอดร่วมกัน เท่ากับจำนวนต่ำสุดของจุดยอดที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง

<u>พิสูจน์</u>

เขียนกราฟระบุทิศทาง D ใหม่ เป็นกราฟระบุทิศทาง D_1 ในลักษณะที่จุดยอด 1 จุดใน D เช่น จุด w (ยกเว้นจุด u และ v) เขียนใหม่เป็น 2 จุด คือ w_1 กับ w_2 ใน D_1 และเส้นเชื่อมใน D ซึ่งมีทิศทางไปยัง w เขียนให้มีทิศทางไปยัง w_1 ใน D_1 ส่วนเส้นเชื่อมระบุทิศทางออกจาก w ใน D เขียนให้มีทิศทางออกจาก w_2 ใน D_1 (ดังรูป)



D $\qquad$ D_1

เห็นได้โดยชัดเจนว่าวิถี uv ตั้งแต่สองวิถีขึ้นไปใน D จะไม่มีจุดยอดร่วมกันก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อวิถี uv ที่สมนัยใน D_1 ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน ดังนั้นใช้ทฤษฎีบท 7.5 กับกราฟ D_1 จะได้ว่าจำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกันเท่ากับจำนวนต่ำสุดของจุดยอดซึ่งทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง ใน D

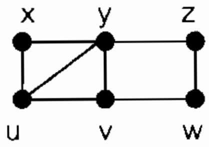
<u>ข้อสังเกต</u>

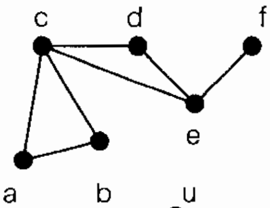
ในกราฟเชื่อมโยง G ซึ่งจุดยอด u และ v ไม่เป็นจุดประชิด จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกัน เท่ากับ จำนวนต่ำสุดของจุดยอดที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง

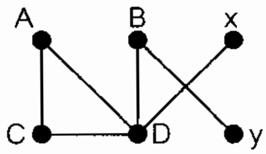
⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘

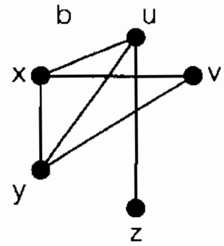
แบบฝึกหัด

1. กราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีจุดตัดที่ใดบ้าง

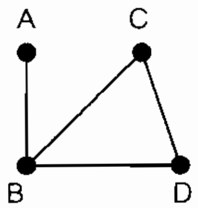
1.1


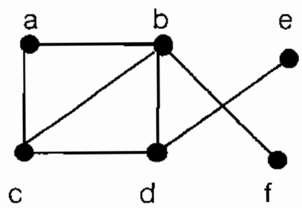
1.2


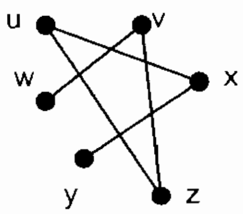
1.3


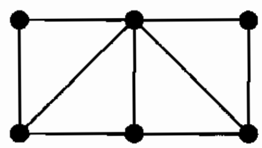
1.4


2. กราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีสะพานที่ใดบ้าง

2.1


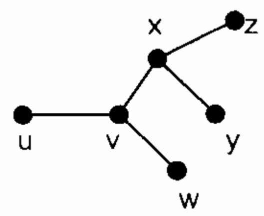
2.2


2.3


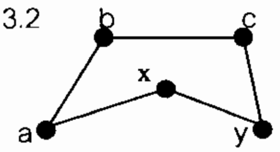
2.4


3. ให้หาจำนวนจุดตัด $\propto$ (G) และ จำนวนเส้นตัด β(G) ที่ทำให้กราฟต่อไปนี้ขาดความเชื่อมโยง

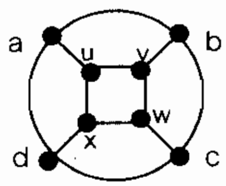
3.1



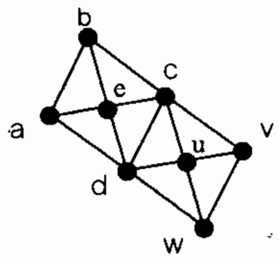
3.2



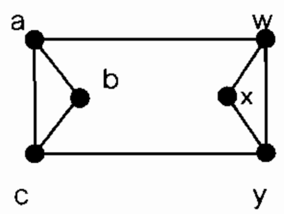
3.3



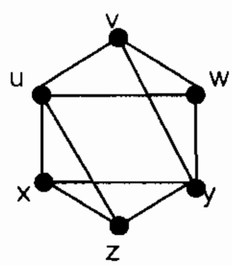
3.4



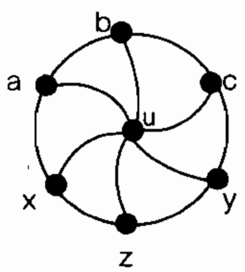
3.5



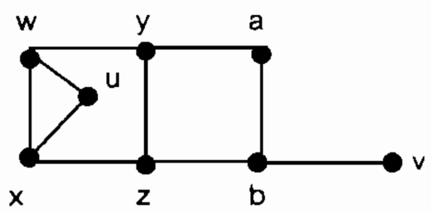
3.6



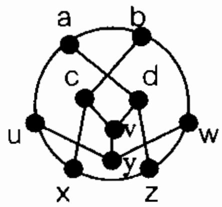
3.7



4. ให้หาเซตของเส้นตัดและเซตของจุดตัดสำหรับกราฟต่อไปนี้



5. ให้หาเซตของเส้นตัดของกราฟ G ที่มี



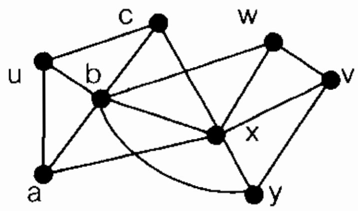
5.1 3 เส้น

5.2 4 เส้น

5.3 5 เส้น

5.4 6 เส้น

6. จากกราฟ



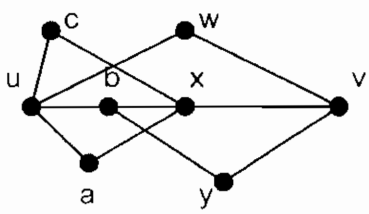
ให้หา

6.1 วิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน จำนวน 3 วิถี

6.2 วิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน แต่มีจุดยอดร่วมกัน จำนวน 2 วิถี

6.3 วิถี uv ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกัน จำนวน 2 วิถี

7. จากกราฟ



ให้หา

7.1 วิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน จำนวน 3 วิถี

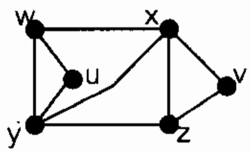
7.2 เซตของเส้นเชื่อม 3 เส้น ซึ่งทำให้ไม่มีวิถี uv

7.3 จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน

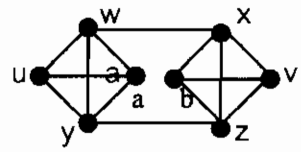
8. จงพิสูจน์ว่าถ้ามีวิถี uv ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกันจำนวน 2 วิถี วิถี ทั้งสองต้องไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันด้วย

ให้หา จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน ของกราฟต่อไปนี้ (หาวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน จำนวน n วิถี และหาเส้นเชื่อม n เส้น ซึ่งถ้าลบออกจะทำให้ไม่มีวิถี uv)

8.1

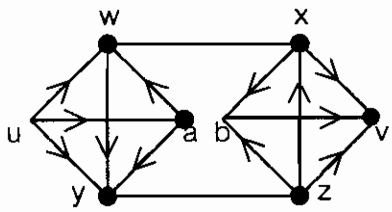


8.2



9. ให้หาจำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นระบุทิศทางร่วมกันของกราฟระบุทิศทางต่อไปนี้

9.1



9.2