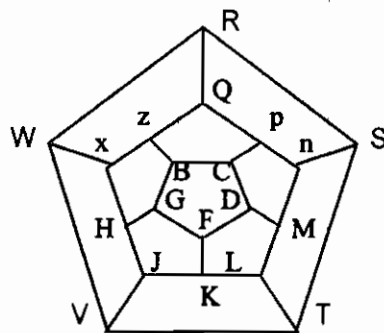


6.1 นำเรื่อง

เซอร์ วิลเลียม โรแวน แฮมิลตัน (1805 – 1865) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวไอริช ผู้มีชื่อเสียง ซึ่งมีพรสวรรค์ตั้งแต่ยังเล็ก มีผลงานที่เด่น 4 ทาง ด้านพีชคณิต พลศาสตร์ และทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต นอกจากนี้งานชิ้นสำคัญที่ศาสตราจารย์แฮมิลตันค้นพบ คือ ระบบพีชคณิต เกี่ยวกับกฎการสลับที่ของการคูณ พีชคณิตแบบควอเทอร์เนียน หรืออิกเวียนแคลคูลัส ซึ่งศาสตราจารย์ แฮมิลตันได้เปลี่ยนปัญหาเป็นรูปของการเล่นเกม เรียกว่า อิกเวียนเกม ซึ่งผู้เล่นจะต้องหาวงเวียนแบบแฮมิลตัน ที่กำหนดอักษรเริ่มแรกจำนวน 5 ตัวมาให้ เช่น ถ้าให้อักษร BCPNM ผู้เล่นจะหาวงเวียนแบบแฮมิลตันได้ 2 แบบคือ BCPNMDFKLTSRQZXWVJHGB กับ BCPNMDFGHXWVJKLTSRQZB (ดังรูป)



อิกเวียนเกมวางตลาดในปี ค.ศ. 1859 ในรูปของการเดินทางรอบโลก ตามรูปทรง 12 หน้า 20 มุม แบบปกติ แต่ละมุมจะติดชื่อเมืองที่สำคัญจุดประสงค์ของเกมคือจะต้องหาวงเวียนแบบแฮมิลตันที่ผ่านเมืองสำคัญแต่ละแห่งทุกเมืองเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมายังที่เดิมได้ ชื่อของแฮมิลตันได้มาจากเกมนี้นั่นเอง

6.2 กราฟและวิถีแบบแฮมิลตัน

บทนิยาม 6.2.1

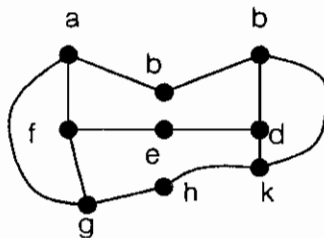
กราฟหรือพหุกราฟ G ซึ่งมีวงเวียนที่รวมทุกจุดใน G เรียกว่าเป็น กราฟแบบแฮมิลตัน ส่วนวิถีซึ่งรวมทุกจุดใน G เรียกว่า วิถีแบบแฮมิลตัน

ข้อสังเกต

การลบเส้นใด ๆ ออกจากวงเวียนแบบแฮมิลตันจะทำให้ได้วิถีแบบแฮมิลตัน ดังนั้น กราฟอาจมีวิถีแบบแฮมิลตัน แต่ไม่มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน

ตัวอย่างที่ 1

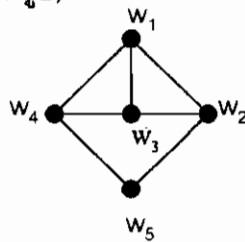
กำหนดกราฟ G (ดังรูป)



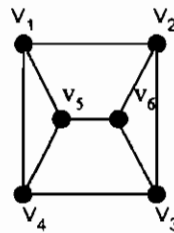
มีวิถีแบบแฮมิลตัน $a b c d e f g h k$ แต่ไม่มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน

ตัวอย่างที่ 2

กราฟที่กำหนดให้ (ดังรูป)



G_1



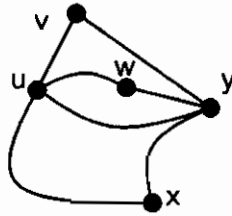
G_2

กราฟ G มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน คือ $C : w_1, w_2, w_5, w_4, w_3, w_1$

กราฟ G_2 มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน คือ $C_2 : v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_4, v_1$

ตัวอย่างที่ 3

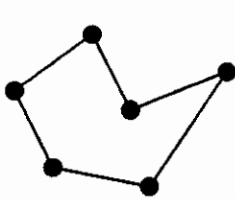
จงพิสูจน์ให้เห็นว่ากราฟ G ที่กำหนดให้ (ดังรูป) ไม่มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน



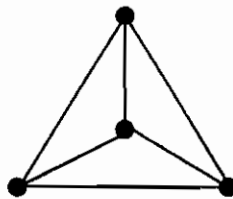
วิธีทำ

ถ้ากราฟเป็นแบบแฮมิลตัน กราฟจะต้องมีวงเวียนซึ่งผ่านจุดยอดทุกจุดในกราฟ ดังนั้น ถ้า C เป็นวงเวียน C จะต้องรวมจุดยอดทุกจุดใน G นั่นคือ จุดยอด v, w และ x ต้องอยู่ใน C แต่เนื่องจากทั้ง 3 จุดมีดีกรีเป็นคู่ แสดงว่าแต่ละจุดต้องมีเส้นเชื่อมถึงกันอย่างน้อยสองเส้น นั่นคือ C มีเส้นเชื่อม $uv, uw,$ และ ux ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติของวงเวียนที่ว่าจุดยอดใด ๆ ในวงเวียนมีเส้นเชื่อมได้เพียงสองเส้น แสดงว่ากราฟ G นี้ไม่มีวงเวียน C จึงไม่เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน

ในเรื่องของกราฟแบบฮอยเลอร์ที่ผ่านมามีทฤษฎีบทซึ่งพร้อมทั้งเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะหาว่ากราฟใดเป็นกราฟแบบฮอยเลอร์หรือไม่ แต่ในเรื่องกราฟแบบแฮมิลตันยังไม่มีทฤษฎีบทพร้อมเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการหาว่ากราฟใดเป็นกราฟแบบแฮมิลตัน การหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับกราฟแบบแฮมิลตัน เป็นเรื่องที่กำลังศึกษาค้นคว้ากันอย่างกว้างขวาง ปัจจุบันเท่าที่ทำได้ คือหากราฟแบบต่าง ๆ ที่เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน เช่น กราฟแบบวงเวียน C_n เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน กราฟแบบสมบูรณ์ K_n เป็นแบบแฮมิลตัน สำหรับ $n \geq 3$



C_6



K_4

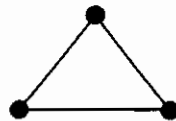
ในกราฟแบบแฮมิลตัน เมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม กราฟจะยังเป็นแบบแฮมิลตัน เพราะยังคงใช้วงเวียนเดิมในตอนแรกได้ ในลักษณะนี้ กราฟที่มีเส้นเชื่อมมากมีแนวโน้มที่จะเป็นกราฟแบบแฮมิลตัน มีทฤษฎีบทอยู่ 2 ทฤษฎี สำหรับเงื่อนไขเพียงพอในการหากราฟแฮมิลตัน ซึ่งถือว่ามีความสำคัญ คือ

ทฤษฎีบท 6.1

กราฟ G เรียกว่าเป็นกราฟแบบแฮมิลตัน ถ้ากราฟ G อันดับ p ซึ่ง $p \geq 3$ มี $\deg v \geq \frac{p}{2}$ และ v เป็นจุดยอดใน G

พิสูจน์

ถ้ากราฟ G มีอันดับ 3 ($p = 3$) และ $\deg v \geq 3/2$ สำหรับแต่ละจุด v ใน G แสดงว่า $\deg = 2$ และ G คือกราฟ K_3



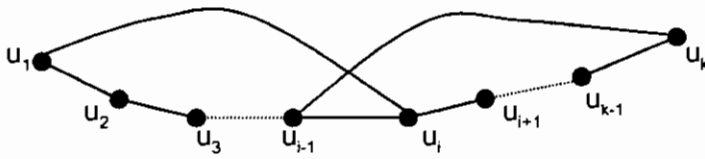
G เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน (ตามทฤษฎี) ถ้า $p \geq 4$ ให้ G มีวิถี Q ซึ่งมีจำนวนจุดยอดมากที่สุด โดยที่ Q คือวิถี u_1, u_2, \dots, u_k เนื่องจากไม่มีวิถีอื่นใดที่มีจุดยอดมากกว่าวิถี Q ดังนั้นจุดยอดทุกจุดที่ประชิดจุดยอด u_1 และ u_k จะต้องอยู่ในวิถี Q และเพราะว่าจุดยอด u_1 ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยที่สุด $\frac{p}{2}$ จุด แสดงว่าวิถี Q มีจุดยอดอย่างน้อยที่สุด $\frac{p}{2} + 1$ จุด ดังนั้นจะต้องมีจุดยอด u_i ที่ $2 \leq i \leq k$ ซึ่งจุดยอด u_i ประชิดกับจุดยอด u_1 และจุดยอด u_{i-1} ประชิดกับจุดยอด u_k เพราะว่ามีจุดยอด u_i อย่างน้อยจำนวน $\frac{p}{2}$ จุดที่ประชิดกับจุดยอด u_1 ดังนั้นต้องมีจุดยอด u_{i-1} อย่างน้อย จำนวน $\frac{p}{2}$ จุดที่ไม่ประชิดกับจุดยอด u_k

เพราะฉะนั้น

$$\deg u_k \leq (p - 1) - \frac{p}{2} < \frac{p}{2}$$

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎี ($\deg u_k \geq \frac{p}{2}$)

แสดงว่าจำเป็นต้องมีจุดยอด u_i ในวิถี Q และเส้นเชื่อม $u_1 u_i$ กับ $u_k u_{i-1}$ ต้องอยู่ในกราฟ G ทั้ง 2 เส้น



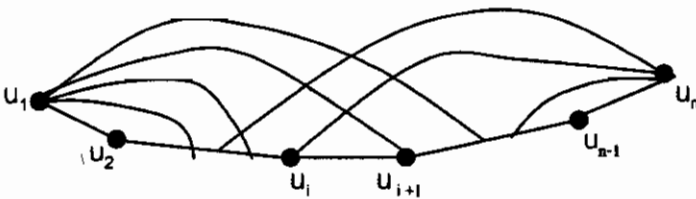
ดังนั้น จะต้องมียังวงเวียน C ในรูปของ $u_1, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_1$ ที่รวมจุดยอดทุกจุดในวิถี Q ซึ่งถ้า C รวมทุกจุดใน G แสดงว่า C เป็นวงเวียนแบบแฮมิลตันและ G เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน สมมติว่า ถ้ามีจุดยอดบางจุดของ G ที่ไม่อยู่ใน C เช่น จุดยอด w เพราะว่วงเวียน C รวมจุดยอดอย่างน้อยที่สุด $1 + \frac{P}{2}$ จุด ดังนั้นต้องมีจุดยอดใน G จำนวนที่น้อยกว่า $\frac{P}{2}$ จุด ซึ่งไม่อยู่ในวงเวียน C แต่เพราะว่า $\deg w \geq \frac{P}{2}$ ดังนั้นจุดยอด w ต้องประชิดกับจุดยอด u_i บางจุดใน C ซึ่งเส้นเชื่อม wu_i เมื่อรวมกับวงเวียน C จะเกิดวิถีอื่นที่มีจุดยอดรวมแล้วมากกว่าจุดยอดในวิถี Q ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะกำหนดไว้แล้วว่าวิถี Q มีจำนวนจุดยอดมากที่สุด ดังนั้น วงเวียน C ต้องรวมจุดยอดทุกจุดใน G และกราฟ G เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน

ทฤษฎีบท 6.2

กราฟ G เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน ถ้ากราฟ G อันดับ n ซึ่ง $n \geq 3$ มี $\deg u + \deg v \geq n$ และ u กับ v เป็นจุดยอดใด ๆ ที่ไม่เป็นจุดประชิด

พิสูจน์ (ใช้ความขัดแย้ง)

ถ้ากราฟ G ไม่เป็นแบบแฮมิลตัน ซึ่ง $\deg u + \deg v \geq n$ สำหรับจุดยอด u และ v ที่ไม่เป็นจุดประชิดกัน ในกรณีนี้สมมติว่าเมื่อเพิ่มเส้นเชื่อมบางเส้นใน G ทำให้กราฟ G เป็นแบบแฮมิลตัน ซึ่งหมายถึงว่า จะต้องมียัง u_1, u_2, \dots, u_n ซึ่งรวมจุดยอดทุกจุดแต่จุดยอด u_1 กับ u_n ไม่เป็นจุดประชิด (ดังรูป)



จากกราฟจะเห็นได้ว่าถ้าเพิ่มเส้นเชื่อม u_1, u_n จะได้กราฟแบบแฮมิลตัน เนื่องจาก u_1 กับ u_n ไม่เป็นจุดประชิดกัน ดังนั้น

$$\deg u_1 + \deg u_n \geq n$$

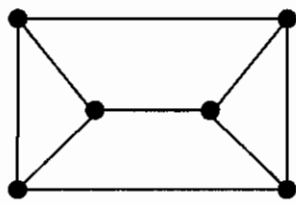
หรือ $\deg u_n \geq n - \deg u_1$

แสดงให้เห็นว่า ถ้า $\deg u_1 = r$ แล้วจะมีจุดยอดที่ไม่ประชิดกับ u_n ซึ่งรวมทั้ง u_n ด้วยเป็นจำนวนอย่างมากที่สุด r จุด

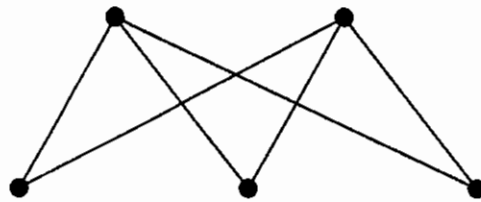
พิจารณาคู่จุดยอดต่าง ๆ ที่ประชิดกับจุดยอด u_1 และให้ V เป็นเซตของจุดยอดต่าง ๆ ที่อยู่ถัดจากจุดยอดที่ประชิดกับจุดยอด u_1 ขึ้นไปในวิถี เช่น ถ้า u_1 เชื่อมโยงกับ u_k แล้ว u_{k-1} เป็นจุดที่อยู่ใน V ดังนั้นเซต V มีจุดยอด r จุด แต่ไม่รวมจุดยอด u_n

การที่มีจุดยอดที่ไม่ประชิดกับ u_n อย่างมากที่สุดจำนวน r จุด และจุดยอดในเซต V มีทั้งหมด r จุด แต่ไม่รวมจุดยอด u_n นี้ให้เห็นว่าเซตของจุดยอด V จะต้องมียุค u_1 ที่ประชิดกับจุด u_n และจะต้องมีเส้นเชื่อม u_1 กับ u_{r+1} และเส้นเชื่อม u_1 กับ u_n (ดังรูป) แสดงว่ามีวงเวียนแบบแฮมิลตันใน G คือ $u_1, u_2, \dots, u_{r+1}, u_1, u_n, u_{n-1}, \dots, u_{r+1}, u_1$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานในตอนแรกว่ากราฟ G ไม่ใช่กราฟแบบแฮมิลตัน ดังนั้นสรุปได้ว่าทฤษฎีเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 4



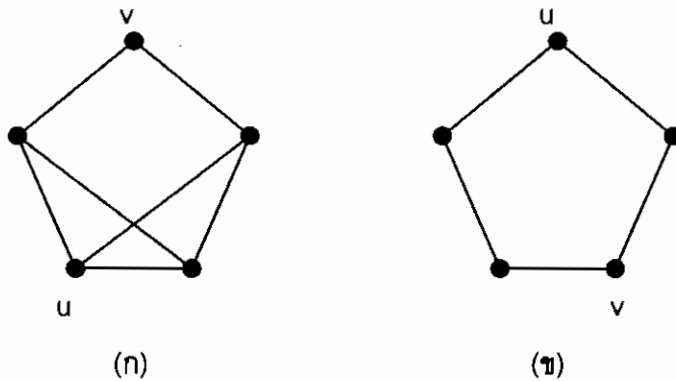
(ก)



(ข)

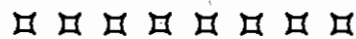
กราฟในรูป (ก) เป็นกราฟแบบแฮมิลตันตามทฤษฎี 6.1 เพราะว่าแต่ละจุดมีดีกรี 3 และกราฟมีอันดับ 6 ดังนั้น $\deg v_i \geq p/2$ ($3 = \frac{6}{2}$) กราฟในรูป (ข) ไม่เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน เพราะมีจุดยอดซึ่งมีดีกรี 2 ดังนั้น $\deg v_i \not\geq \frac{p}{2}$ ($2 \not\geq \frac{5}{2}$)

ตัวอย่างที่ 5



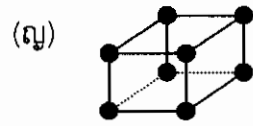
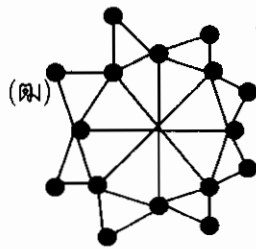
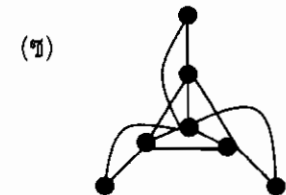
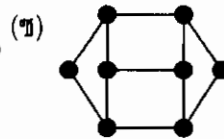
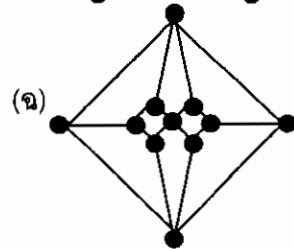
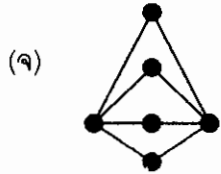
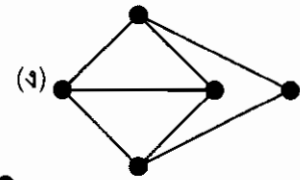
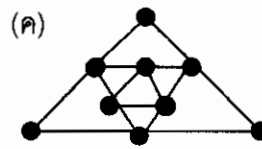
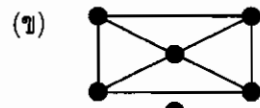
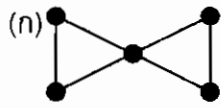
กราฟในรูป (ก) มีอันดับ 5 ส่วนดีกรีของจุด $v = 2$ ดังนั้นใช้ทฤษฎีบท 7.1 ไม่ได้ แต่ใช้ทฤษฎีบท 7.2 ได้ เนื่องจาก $\deg u + \deg v \geq 5$ สำหรับจุดยอด u และ v ที่ไม่ประชิดกัน ดังนั้นกราฟในรูป (ก) เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน

อย่างไรก็ตามกราฟในรูป (ข) มีอันดับ 5 ส่วนดีกรีของจุด $= 2$ และใช้ทฤษฎีบททั้ง 6.1 และ 6.2 ไม่ได้ เพราะไม่ตรงตามเงื่อนไขที่เพียงพอแต่กราฟนี้มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน และเป็นกราฟแบบแฮมิลตันชี้ให้เห็นว่าเป็นความสำคัญในการศึกษาเรื่องทฤษฎีกราฟในปัจจุบันที่ต้องหาทฤษฎีบทที่เพียงพอและจำเป็นในการหากราฟแบบแฮมิลตัน



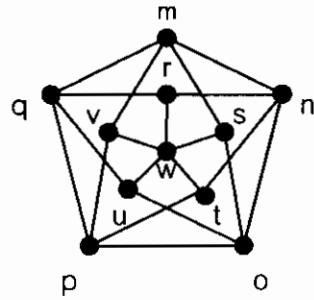
แบบฝึกหัด

1. ให้อธิบายว่ากราฟต่อไปนี้เป็นกราฟแบบแฮมิลตันหรือไม่



2. ให้ยกตัวอย่างกราฟอันดับ 10 ซึ่งเป็นกราฟแบบแฮมิลตัน
3. ให้ยกตัวอย่างกราฟอันดับ 10 ซึ่งไม่เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน
4. เป็นความจริงหรือไม่ที่กล่าวว่ากราฟแบบออยเลอร์เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน ให้อธิบายและยกตัวอย่างประกอบ
5. เป็นความจริงหรือไม่ที่กล่าวว่ากราฟแบบแฮมิลตันเป็นกราฟแบบออยเลอร์ให้อธิบายและยกตัวอย่างประกอบ
6. ในงานเลี้ยงสังสรรค์วันสำเร็จการศึกษาของบัณฑิตที่จบจากมหาวิทยาลัยรามคำแหงปรากฏว่ามีผู้มาร่วมงานมากมาย มีทั้งชาย (ช) และ หญิง (ญ) จึงแสดงให้เห็นว่าเมื่อแทนสถานะการณในงานเลี้ยงด้วยกราฟ G ซึ่งจุดยอดแทน ชาย กับ หญิง และมีเส้นเชื่อมระหว่างชายกับหญิง ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อบัณฑิตคู่นั้นรู้จักกันมาก่อน จงพิสูจน์ว่ากราฟ G จะเป็นแบบแฮมิลตันก็ต่อเมื่อจำนวนบัณฑิตชายหญิงเท่ากัน
(ข้อแนะนำ G เป็นกราฟแบบแฮมิลตันก็ต่อเมื่อ G มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน)

7. ถ้ากำหนดกราฟ G ให้ดังนี้

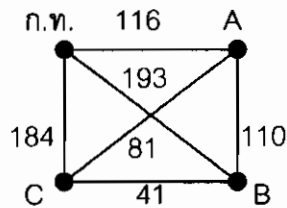


(ก) ให้หาวงเวียนแบบแฮมิลตันซึ่งรวมเส้นเชื่อม mn และ nr

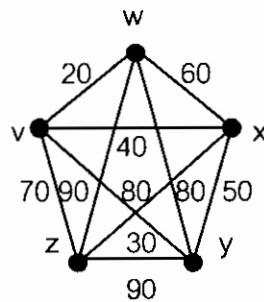
(ข) ให้พิสูจน์ว่าไม่มีวงเวียนแบบแฮมิลตันซึ่งมีเส้นเชื่อม mn , nr และ rw รวมอยู่ด้วย

8. ให้พิสูจน์ว่ากราฟแบ่งกันใด ๆ ที่มีจุดยอดเป็นจำนวนคี่จะไม่เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน

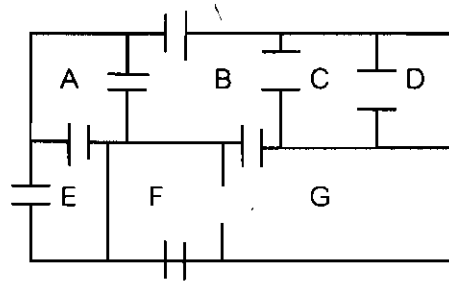
9. ถ้าเจ้าหน้าที่ฝ่ายการตลาดผู้หนึ่งต้องการเดินทางไปยังสถานที่ต่าง ๆ เพียงแห่งละ 1 ครั้ง แล้วกลับที่เดิม โดยให้มีระยะทางของการเดินทางสั้นที่สุด ให้นหาว่าถ้าเจ้าหน้าที่ผู้นี้อยู่ที่กรุงเทพและต้องการเดินทางไปยังสถานที่ต่าง ๆ 4 แห่ง (ดังรูป) เส้นทางที่เลือกเดินทางควรจะเป็นเส้นใด



10. เจ้าหนี้ยายหนึ่งต้องการไปทวงเงินบรรดาลูกหนี้ซึ่งอยู่ตามสถานที่ต่าง ๆ กัน แล้วกลับบ้านให้นหาว่าถ้าบ้านเจ้าหนี้ยู่ที่จุด V เส้นทางซึ่งสั้นที่สุดไปยังบ้านลูกหนี้เพียงแห่งละ 1 ครั้ง แล้วกลับมาที่ V คือเส้นทางใด



11. แผนผังบ้านชั้นเดียวซึ่งแสดงทางเดินระหว่างห้องพร้อมประตูเข้าออกมีดังนี้



เป็นไปได้หรือไม่ที่จะเริ่มต้นจากภายนอกบ้าน เดินเข้าไปภายในบ้านเดินผ่านห้องทุกห้องเพียง 1 ครั้ง แล้วกลับออกภายนอกบ้าน ถ้ามีเส้นทางที่เป็นไปได้ให้อธิบายว่าใช้เส้นทางใด