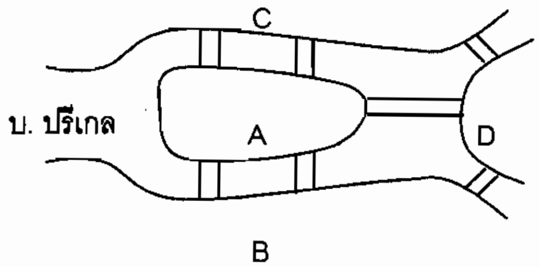
บทที่ 5
กราฟแบบออยเลอร์

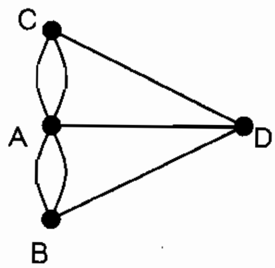
5.1 นำเรื่อง

ในช่วงพุทธศตวรรษที่ 24 เขตปรัสเซียตะวันออกมีเมือง ๆ หนึ่ง ชื่อ โคนิกสเบร์ก ซึ่งประกอบด้วยเกาะสองเกาะล้อมรอบด้วยแม่น้ำปรีเกล เกาะทั้งสองติดต่อกับแผ่นดินใหญ่ด้วยสะพาน 7 แห่ง กล่าวกันว่าชาวเมืองโคนิกส์เบอร์กหาความเพลิดเพลินให้ตนเองด้วยการเดินท่องเที่ยวทั่วเมืองและชมวิวสะพานทุกแห่งโดยพยายามใช้สะพานเพียงแห่งละหนึ่งครั้งแต่ทำไม่สำเร็จในที่สุดชาวเมืองเชื่อว่าทำไม่ได้แต่ไม่มีผู้ใดพิสูจน์ไว้ จนกระทั่งในปี พ.ศ. 2279 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ได้พิสูจน์ไว้ในผลงาน ชื่อ Solutio Problematis ad geometrium situs pertinentis ว่าเป็นไปไม่ได้ การพิสูจน์เป็นการเริ่มต้นของทฤษฎีกราฟ มีแนวความคิดในการพิสูจน์เป็นแบบของทฤษฎีกราฟโดยชัดเจน

ตามวิธีทางของออยเลอร์ ปัญหาสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก มีการใช้รูปแบบของกราฟคือ การกำหนดให้จุดยอด แทนพื้นที่เมืองทั้ง 4 แห่ง และกำหนดให้เส้นเชื่อมแทนสะพาน ดังนี้



โคนิกสเบอร์ก



กราฟ G

จะเห็นได้ว่าปัญหาสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก คือปัญหาที่ต้องการคำตอบว่ากราฟ G ตามรูปข้างต้นมีรอยเดิน (หรือวงจร) ซึ่งรวมเส้นเชื่อมทั้งหมดใน G หรือไม่ ปัญหานี้อาจใช้วิธีลองผิดลองผิด แต่ต้องใช้เวลามากและในกรณีที่มีสะพานจำนวนมากจะซับซ้อนและใช้เวลามากขึ้น ออยเลอร์จึงหาวิธีการตอบปัญหานี้โดยใช้กราฟมาช่วยในการพิสูจน์ ดังต่อไปนี้

ปัญหาสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก

ทฤษฎีบท 6.2.1

กราฟ G ของปัญหาสะพานโคนิกสเบอร์ก ไม่มีรอยเดินที่ประกอบด้วยเส้นทั้งหมด

พิสูจน์ (การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง)

ถ้ากราฟ G มีรอยเดิน P ซึ่งรวมทุกเส้นในกราฟ รอยเดิน P จะต้องเริ่มต้นที่จุดยอดใดจุดยอดหนึ่ง คือ จุด Aหรือ B หรือ C หรือ D และมาสิ้นสุดที่จุดยอด A หรือ B หรือ C หรือ D จุดใดจุดหนึ่งและเพราะว่าจะต้องมีจุดยอดอย่างน้อย 2 จุด ในกลุ่ม A,B,C,D ซึ่งไม่ได้เป็นทั้งจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด ถ้าให้จุดยอด v เป็นจุด ในกลุ่ม A,B,C ซึ่งไม่เป็นจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุด เนื่องจากจุดยอด A,B,C มีดีกรีเท่ากับ 3 หรือ 5 ดังนั้นเมื่อมีรอยเดินของ P เข้ามาที่จุด v จะต้องมีรอยเดินของ P ออกจาก v จึงเหลือเส้นเชื่อมของ v หนึ่งเส้น ที่รอยเดิน P จะต้องผ่านเพราะยังไม่ได้ใช้แต่เมื่อใช้เส้นเชื่อมที่เข้ามาที่ P จะไม่มีเส้นเชื่อมออกจาก v แสดงว่ารอยเดินของ P ต้องมาสิ้นสุดที่จุดยอด v ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะขัดแย้งกับข้อที่กำหนดในตอนแรกว่าจุดยอด v ไม่เป็นจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุด จึงสรุปได้ว่าไม่มีรอยเดิน P ซึ่งรวมทุกเส้นในกราฟ G

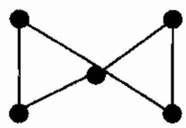
จากปัญหาของสะพานโคนิกสเบอร์ก ทำให้ได้บทนิยามเรื่องพหุกราฟตามชื่อของออยเลอร์ ดังนี้

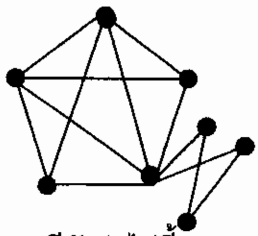
บทนิยาม 5.2.1

รอยเดินที่รวมจุดยอดและเส้นเชื่อมทั้งหมดของพหุกราฟ G ซึ่งเริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดเดียวกัน เรียกว่า <u>วงจรแบบออยเลอร์</u> และสำหรับกราฟที่มีวงจรแบบออยเลอร์ เรียกว่า <u>กราฟแบบออยเลอร์</u>

ตัวอย่างที่ 1

กราฟต่อไปนี้เป็นกราฟแบบออยเลอร์





จากงานที่เกี่ยวข้องกับกราฟของออยเลอร์ได้นำไปสู่ทฤษฎีดังต่อไปนี้

5.3 กราฟแบบออยเลอร์

ทฤษฎีบท 5.3.1

กราฟ G เป็นกราฟแบบออยเลอร์ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ G มีความเชื่อมโยงและจุดยอดทุกจุดใน G มีดีกรีเป็นคู่

พิสูจน์

$\Rightarrow$ ถ้า G เป็นกราฟแบบออยเลอร์ G จะต้องมีวงจรแบบออยเลอร์วงจรแบบออยเลอร์สิ้นสุดที่จุดยอดเดียวกัน ให้ C เป็นวงจรแบบออยเลอร์ และมี v เป็นจุดเริ่มต้น และสิ้นสุด เพราะว่า C รวมจุดทั้งหมดใน G ดังนั้นทุก ๆ 2 จุดใน G จะต้องมีรอยเดิน และวิถี นั่นคือ G มีความเชื่อมโยง (เพื่อแสดงว่าทุกจุดยอดใน G มีดีกรีเป็นคู่)

ขั้นแรก

ถ้าจุดยอด u ใน G แตกต่างจากจุดยอด v แสดงว่า u ไม่ใช่จุดเริ่มต้นและสิ้นสุดของวงจร C ดังนั้น เมื่อมีเส้นเชื่อมเข้ามาที่จุด u จะต้องมีเส้นเชื่อมออกจากจุด u นั่นคือ จุดยอด u มีดีกรีเป็นคู่ (ถ้ามีเส้นเชื่อมเพิ่มจะเพิ่มครั้งละ 2 เส้น)

ขั้นที่สอง

เพราะว่า v เป็นจุดเริ่มต้นและสิ้นสุด จึงมีดีกรีเป็นคู่เสมอ ดังนั้น จุดยอดใน G ทุกจุดมีดีกรีเป็นคู่

$\Leftarrow$ ในทางกลับกัน ถ้า G เชื่อมโยง และจุดยอดทุกจุดมีดีกรีเป็นคู่ (เพื่อแสดงว่า G เป็นกราฟแบบออยเลอร์) เลือกรอยเดิน P ใน G โดยเริ่มที่จุด v และให้ P รวมจุดใน G ให้มากที่สุดมาจนถึงจุด w ซึ่งจะเดินต่อไปอีกไม่ได้ นั่นคือ สิ้นสุดที่จุด w แสดงว่า $w = v$

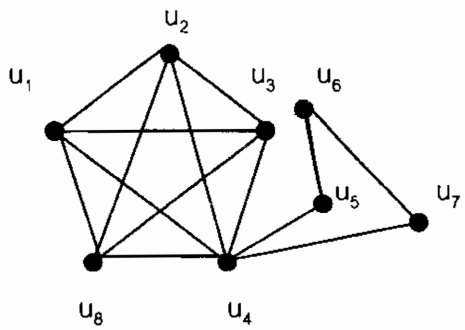
ถ้า $w \neq v$ แสดงว่ารอยเดิน P ไม่สิ้นสุดที่ w ดังนั้น จะต้องมีเส้นเชื่อมที่เข้าและออกจากจุด w เพราะถ้ามีเส้นเชื่อมเข้าที่จุด w แต่ไม่มีเส้นเชื่อมออกจุด w จะมีดีกรีเป็นคี่ ขัดแย้งกับสมมุติฐานในตอนแรก หรือถ้าเส้นเชื่อมที่เข้ามาที่จุด w ไม่อยู่ใน P ก็แสดงว่ารอยเดิน P มีเส้นเชื่อมต่อไปได้อีก ไม่สิ้นสุดที่ w ดังนั้น สรุปได้ว่าเมื่อรอยเดิน P สิ้นสุดที่ w จะต้องได้ $w = v$ และรอยเดิน P เป็นวงจร และเนื่องจากวงจร P รวมเส้นเชื่อมใน G จึงเรียกว่า P เป็นวงจรแบบออยเลอร์ และ G เป็นกราฟแบบออยเลอร์

สมมุติว่ามีกรณีที่รอยเดิน P ไม่ได้รวมทุกเส้นเชื่อมใน G แต่เนื่องจาก G มีความเชื่อมโยง ดังนั้น อย่างน้อยที่สุดจะต้องมีจุดยอดจุดหนึ่งใน P ที่โยงกันเส้นเชื่อมอื่น ๆ ที่อยู่นอก P ในกรณีเช่นนี้ ให้เริ่มรอยเดิน P_1 ต่อจาก P เข้าไปตามจุดและเส้นเชื่อมของกราฟที่ P ยังไม่ได้รวมไว้ สมมุติว่าเริ่มรอยเดิน P_1 จากจุด u และไปตามเส้นเชื่อมให้รวมจุดมากที่สุด และ P_1 จะมาสิ้นสุดที่ u ตามแนวคิดนี้แสดงว่า มีวงจรอื่น เช่น C ใน G ซึ่งเริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุด v โดย C มีเส้นเชื่อมมากกว่าวงจร P โดย C เกิดจากการใส่วงจร P_1 เข้ากับวงจร P ที่จุด u ถ้าเป็นเช่นนี้แสดงว่า P ยังไม่ใช่วงจรแบบออยเลอร์ เพราะไม่ได้รวมจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้นใน G

สรุปได้ว่าวงจร C คือ วงจร P + P_1 ดังนั้น ถ้าวงจร P เป็นวงจรแบบออยเลอร์ วงจร P จะรวมจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้น

ตัวอย่างที่ 2

จากกราฟ



จะเห็นได้ว่าถ้าวงจร P เป็น $u_1, u_2, u_3, u_4, u_8, u_1, u_3, u_8, u_2, u_4, u_1$ วงจร P ไม่ใช่วงจรแบบออยเลอร์ เพราะยังไม่รวมจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟมี u_4 เป็นจุดใน P ซึ่งโยงกับเส้นเชื่อมที่อยู่นอก P ดังนั้น ให้เริ่มรอยเดิน P_1 จาก u_4 ให้รวมจุดมากที่สุดในที่นี้ P_1 คือ u_4, u_5, u_6, u_7, u_4 ซึ่งเมื่อรวมกับ P_1 ที่จุด P ที่จุด u_4 ได้วงจรแบบออยเลอร์คือ P + P_1 หรือ $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_4, u_8, u_1, u_3, u_8, u_2, u_4, u_1$

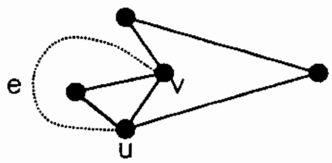
<u>ทฤษฎีบท 5.3.2</u>

กราฟ G เรียกว่า เป็นกราฟซึ่งมี<u>วิถีแบบออยเลอร์</u> ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อกราฟ G มีความเชื่อมโยงและมีจุดยอดซึ่งมีดีกรีเป็นคี่ จำนวน 2 จุด

วิถีแบบออยเลอร์เริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดยอดซึ่งมีดีกรีเป็นคี่และไม่ใช่จุดยอดเดียวกัน

<u>พิสูจน์</u>

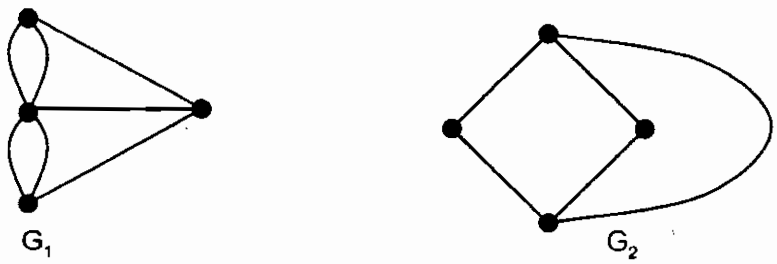
ให้ G เป็นกราฟ ซึ่งมีวิถีแบบออยเลอร์ และให้จุดยอด u เป็นจุดเริ่มต้น จุดยอด v เป็นจุดสิ้นสุดของวิถี ถ้าเติมเส้นเชื่อมระหว่าง u กับ v จะได้กราฟแบบออยเลอร์ซึ่งจุดยอดทุกจุดมีดีกรีคู่ แสดงให้เห็นว่าเมื่อเอาเส้น e ออกจะได้ กราฟ G เดิมซึ่งมีเฉพาะจุดยอด u กับ v เท่านั้นที่เป็นจุดคี่



ในทางกลับกันถ้าให้กราฟ G มีจุดยอด u และ v เท่านั้นที่เป็นจุดคี่ เมื่อเติมเส้นเชื่อม e ระหว่าง u กับ v จะทำให้ได้กราฟเชื่อมโยง ซึ่งจุดยอดทุกจุดมีดีกรีคู่ ดังนั้น ตามทฤษฎีกราฟนี้ต้องเป็นกราฟแบบออยเลอร์ และต้องมีวงจรแบบออยเลอร์ ซึ่งเมื่อลบเส้น e ออกจากกราฟจะได้แนวเดินซึ่งรวมทุกเส้นเชื่อมใน G ดังนั้น G มีวิถีแบบออยเลอร์

<u>ตัวอย่างที่ 3</u>

จากกราฟต่อไปนี้



จะเห็นได้ว่ากราฟ G_1 ไม่มีทั้งวงจรและวิถีแบบออยเลอร์ ส่วนกราฟ G_2 มีวิถีแบบออยเลอร์

<u>ข้อสังเกต</u>

ลักษณะเด่นประการหนึ่งของกราฟแบบออยเลอร์ หรือกราฟที่มีวิถีแบบออยเลอร์ คือ เมื่อกำหนดจุดยอดแล้วจะสามารถลากเส้นเชื่อมโยงจุดยอดทุกจุดได้อย่างต่อเนื่องโดยไม่ต้องยกปากกาขึ้น ถ้าจุดยอดทุกจุดมีดีกรีเป็นคู่ แต่ถ้าจุดยอดมีดีกรีเป็นคี่ จะต้องมีได้เพียงสองจุดเท่านั้น

5.4 <u>การหาวงจรแบบออยเลอร์</u>

ต่อไปนี้เป็นขั้นตอนวิธีในการหาวงจรแบบออยเลอร์ของกราฟซึ่งจุดสำคัญ คือ สะพานหมายถึงเส้นเชื่อมในกราฟเชื่อมโยงซึ่งถ้าลบเส้นเชื่อมนี้ออกแล้วจะทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง

<u>ขั้นตอนวิธีของฟลูรี</u>

ถ้า G เป็นกราฟแบบออยเลอร์ จะมีขั้นตอนในการหาวงจรแบบออยเลอร์ ดังนี้

<u>ขั้นแรก</u> เลือกจุดเริ่มต้น v

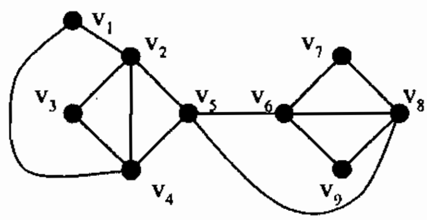
<u>ขั้นที่สอง</u> ในแต่ละขั้นให้ไปตามเส้นเชื่อมใด ๆ ที่มีอยู่และจะเลือกไปตามเส้นเชื่อมที่เป็นสะพานก็ต่อเมื่อไม่มีทางเลือกอื่น

<u>ขั้นที่สาม</u> หลังจากใช้เส้นเชื่อมใดแล้วให้ลบเส้นเชื่อมนั้นออก (ลบจุดยอดที่มีดีกรีศูนย์ด้วย) โดยไม่ให้กราฟขาดความเชื่อมโยงแล้วเลือกเส้นเชื่อมอื่น ๆ ต่อไป

<u>ขั้นที่สี่</u> จบขั้นตอนวิธี เมื่อลบเส้นเชื่อมหมด

<u>ตัวอย่างที่ 4</u>

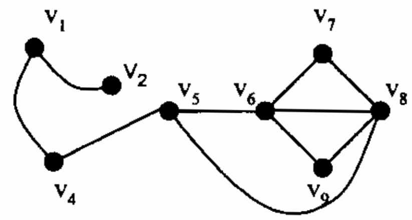
ให้แสดงว่ากราฟข้างล่างนี้เป็นกราฟแบบออยเลอร์ แล้วใช้วิธีของฟลูรี หาวงจรแบบออยเลอร์



<u>วิธีทำ</u>

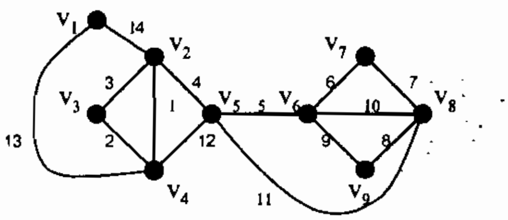
<u>ขั้นแรก</u> หาดีกรีของจุดยอดก่อน จะเห็นได้ว่าจุด v_1, v_3, v_7 และ v_9 มีดีกรีสองส่วนจุด v_2, v_4, v_5, v_6, และ v_8 มีดีกรีสี่ แสดงว่าทุดจุดมีดีกรีคู่กราฟเป็นแบบออยเลอร์

<u>ขั้นที่สอง</u> ใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรี จะเริ่มที่จุดใดก่อนก็ได้ ในที่นี้เริ่มที่จุด v_2 ไปตามเส้นที่โยงกับ v_2 เช่น v_2, v_4 (ลบ v_2, v_4 ออก) แล้วไปตามเส้นเชื่อมต่อ ๆ ไป คือ v_4, v_3, v_3 v_2 และ v_2, v_5 ตามลำดับ จะได้กราฟ



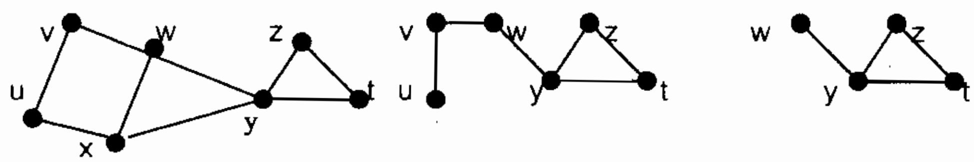
จะเห็นได้ว่าการลบในครั้งต่อไปต้องระมัดระวัง เพราะถ้าลบเส้น v_4, v_5 กราฟจะขาดความเชื่อมโยง ดังนั้น จึงลบเส้น v_5 v_6 ,v_6 v_7 ,v_7 v_8 ,v_8 v_9 (ไม่เลือกเส้น v_8 v_5 เพราะกราฟจะขาดความเชื่อมโยง เมื่อลบ v_8 v_5) v_9 v_8 ,v_6 v_8 ,v_8 v_5 ,v_5 v_4 ,v_4 v_1 และ v_1 v_2

เพื่อให้เห็นชัดเจนอาจใช้ตัวเลขลำดับของเส้นที่ลบดังนี้



ดังนั้นวงจรแบบออยเลอร์คือ v_2 v_4 v_3 v_2 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_6 v_8 v_5 v_4 v_1 v_2

<u>ตัวอย่างที่ 5</u>



G_1 G_2 G_3

ตามขั้นตอนวิธีของฟลูรี

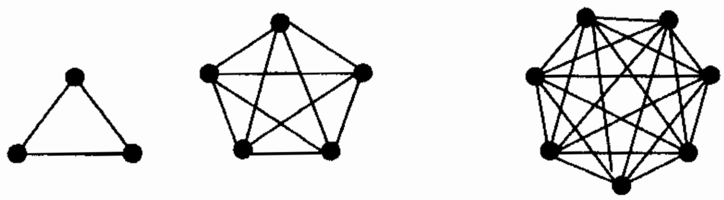
ขั้นแรก เลือกจุดเริ่มต้น y ใน G_1

ขั้นที่สอง เลือกเส้น yx ตามด้วย xw (ลบจุดยอด x) จะได้กราฟ G_2

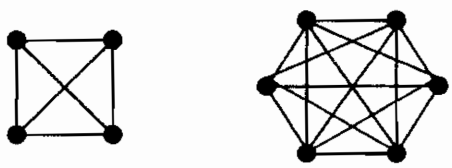
ขั้นที่สาม เลือกเส้น yw ไม่ได้เพราะเป็นสะพาน ดังนั้นเลือกเส้น uv ตามด้วย vw (ลบจุดยอด v) จะได้กราฟ G_3 ซึ่งจากนี้จะเห็นได้ว่าต้องเลือก wy แล้วไปตามวงเวียน yzty ได้วงจรแบบออยเลอร์ คือ yxuvwyzty

ในปี พ.ศ. 2350 อัล ปวงโซต์ ได้แสดงให้เห็นว่ากราฟสมบูรณ์ K_n ที่สามารถเขียนได้โดยต่อเนื่อง หรือเขียนได้โดยไม่ต้องยกปากกาขึ้น คือกราฟที่มีจำนวนจุดยอดเป็นเลขคี่ ส่วนที่มีจำนวนจุดยอดเป็นเลขคู่จะทำไม่ได้

ตัวอย่างที่ 6



กราฟซึ่งเขียนได้โดยต่อเนื่อง มีจำนวนจุดยอดเป็นเลขคี่



กราฟซึ่งมีจำนวนจุดยอดเป็นเลขคู่และเขียนไม่ได้โดยต่อเนื่อง

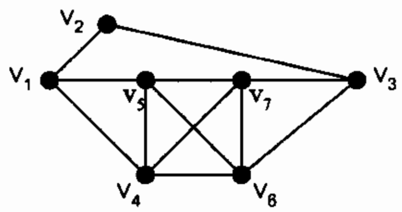
5.5 วิธีการสร้างกราฟแบบออยเลอร์

การประยุกต์ในบางกรณี จำเป็นต้องสร้างเส้นเชื่อมเพิ่มเติมหรือลบเส้นเชื่อมบางเส้นเพื่อทำให้กราฟที่ไม่เป็นแบบออยเลอร์กลายเป็นกราฟแบบออยเลอร์ เช่นในกรณีกราฟเชื่อมโยงซึ่งจุดยอด u กับ v ใน

กราฟเพียงสองจุดเท่านั้นที่เป็นจุดคี่ ถ้าสร้างเส้นเชื่อม จาก u ถึง v จะทำให้ดีกรีของจุดทั้งสองเพิ่มขึ้นอีกหนึ่ง เป็นดีกรีคู่ กราฟใหม่จะเป็นกราฟแบบออยเลอร์

ตัวอย่างที่ 7

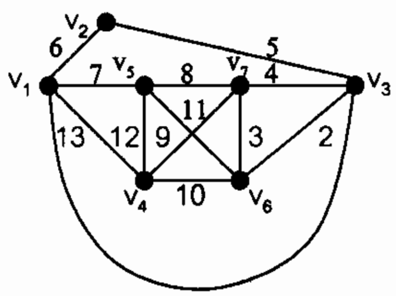
ให้สร้างเส้นเชื่อมเพิ่มเติมในกราฟที่กำหนดให้ เพื่อให้กราฟเป็นแบบออยเลอร์ และให้หาวงจรแบบออยเลอร์



วิธีทำ

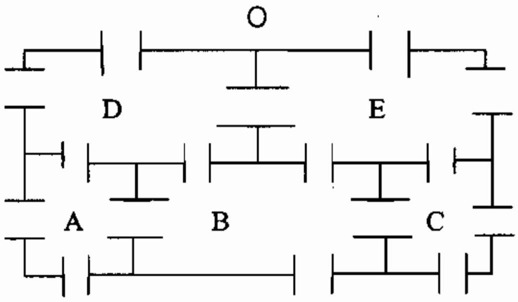
จากกราฟจะเห็นได้ว่าจุดยอดที่มีดีกรีคี่ คือ v_1 กับ v_3(ดีกรีเท่ากับสาม) ส่วนจุดที่มีดีกรีคู่คือจุด v_4,v_5,v_6 และ v_7 มีดีกรีสี่ และจุด v_2 มีดีกรีสอง

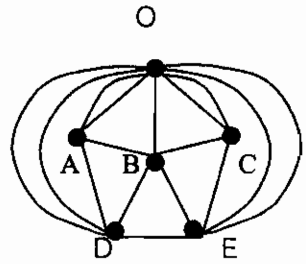
เพื่อให้จุด v_1 และ v_3 มีดีกรีคู่ จึงสร้างวิถีสั้นที่สุดจาก v_1 ถึง v_3 ได้กราฟดังนี้



กราฟแบบออยเลอร์และวิถีแบบออยเลอร์ถูกนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ เช่น ปัญหาการส่งจดหมายของบุรุษไปรษณีย์ที่ต้องการส่งจดหมายให้ครบทุกแห่งแต่ใช้ระยะทางน้อยที่สุด ปัญหาเรื่องการหาทางออกจากเขาวงกต ซึ่งได้รับความสนใจมากในช่วงปลายคริสตศตวรรษที่ 19 ปัญหาเกี่ยวกับปริศนาเชิงให้ความบันเทิง หรือพักผ่อนหย่อนใจ

ตัวอย่างที่ 8



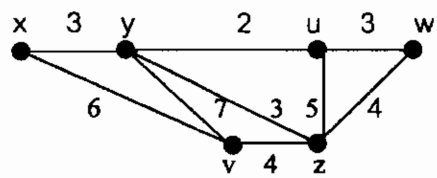


(ก) (ข)

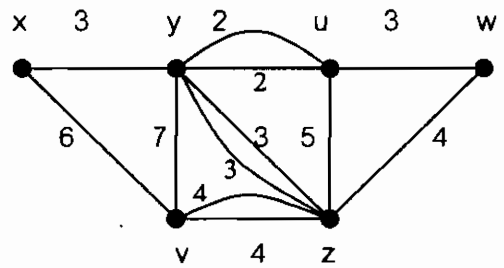
จากแผนผังแสดงสถานที่ภายในบ้านและประตูที่ติดต่อถึงกันภายในบ้านและสถานที่ภายนอกบ้าน เมื่อเขียนเป็นกราฟโดยให้จุดยอด A, B, C, D และ E แทนสถานที่ภายในบ้านและจุดยอด O แทนสถานที่ภายนอกบ้าน และให้เส้นเชื่อมแทนประตูที่ติดต่อถึงกันและออกไปภายนอกบ้าน จะทำให้ใช้คุณสมบัติของกราฟแบบออยเลอร์ตอบปัญหาได้ว่า ถ้าเริ่มจากจุดใดจุดหนึ่งไม่ว่าภายในบ้านหรือภายนอกบ้าน จะสามารถเดินผ่านประตูบ้านทุกประตู โดยไม่ซ้ำกันได้หรือไม่ ซึ่งคำตอบจะเห็นได้โดยชัดเจนว่า ไม่สามารถจะเดินผ่านประตูบ้านทุกประตูได้ โดยไม่ซ้ำกัน เพราะกราฟไม่เป็นแบบออยเลอร์และไม่มีวิถีแบบออยเลอร์ เนื่องจากมีจุดคี่ถึง 4 จุด คือ จุด B, D, E และ O

ตัวอย่างที่ 9

กราฟระบุน้ำหนักคือกราฟซึ่งเส้นเชื่อมแต่ละเส้นระบุน้ำหนักเป็นจำนวนจริงบวก ในตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นการนำกราฟน้ำหนักมาใช้กับปัญหาการส่งจดหมายของบุรุษไปรษณีย์ซึ่งในที่นี้คือการหาแนวเดินแบบปิด ซึ่งมีน้ำหนักรวมทั้งหมดต่ำสุด และใช้เส้นเชื่อมทุกเส้นอย่างน้อย 1 ครั้ง กราฟระบุน้ำหนักตามตัวอย่างมีจุดคี่ 2 จุด คือ u กับ v



จะเห็นได้ว่าวิถีจุดยอด u ถึง v ซึ่งมีน้ำหนักน้อยที่สุด คือ วิถี uyzv ซึ่งมีน้ำหนักรวมทั้งหมดเท่ากับ 9 และถ้าใช้เส้นเชื่อมในวิถีนี้เส้นละ 2 ครั้ง จะทำให้ได้กราฟแบบออยเลอร์ (ดังรูป)

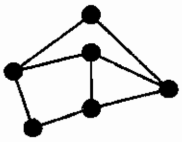


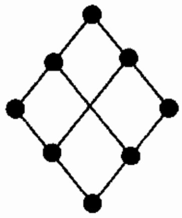
ดังนั้น คำตอบสำหรับปัญหาของบุรุษไปรษณีย์ในกราฟแบบออยเลอร์ คือ หาแนวเดินปิดซึ่งมีน้ำหนักรวมทั้งหมดต่ำสุด แนวเดินในที่นี้คือ x y u w z u y z y v z v x ซึ่งมีน้ำหนักรวมทั้งหมดเท่ากับ 46

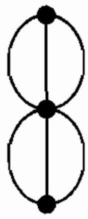
* * * * * * * *

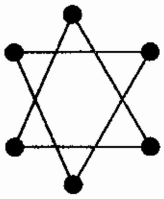
แบบฝึกหัด

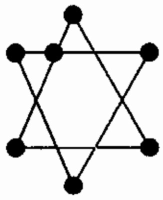
1. จากกราฟต่อไปนี้ ให้หาว่ากราฟใดมีวิถีแบบออยเลอร์ หรือวงจรแบบออยเลอร์

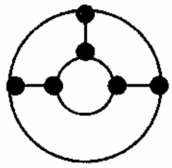
1.1 

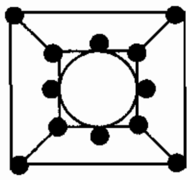
1.2 

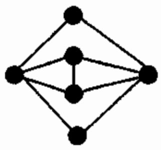
1.3 

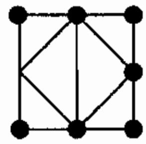
1.4 

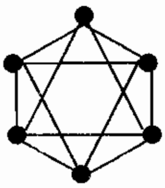
1.5 

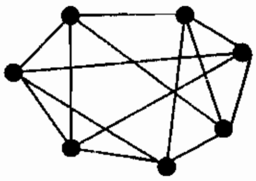
1.6 

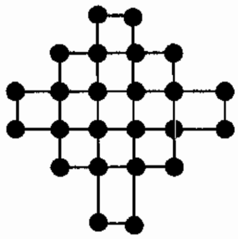
1.7 

1.8 

1.9 

1.10 

1.12 

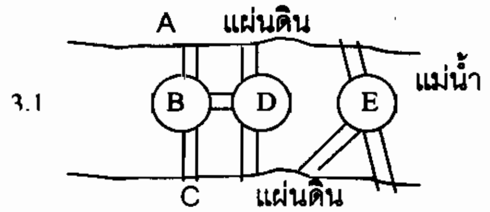
1.13 

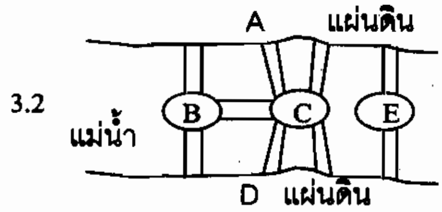
2. ให้ยกตัวอย่างกราฟอันดับ 10 ซึ่ง

 2.1 เป็นกราฟแบบออยเลอร์ 2.2 เป็นกราฟซึ่งมีวิถีแบบออยเลอร์

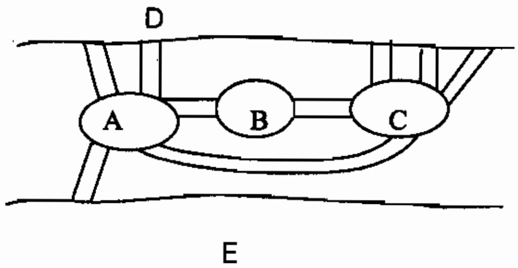
 2.3 ไม่เป็นกราฟแบบออยเลอร์ และไม่มีวิถีแบบออยเลอร์

3. จากแผนผังที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ให้จำลองเป็นกราฟ และอธิบายให้เข้าใจว่ากราฟที่ได้เป็นกราฟแบบออยเลอร์ หรือไม่

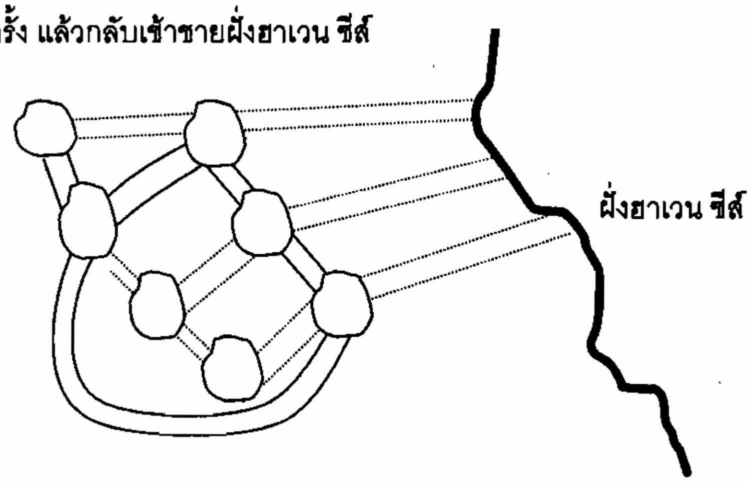




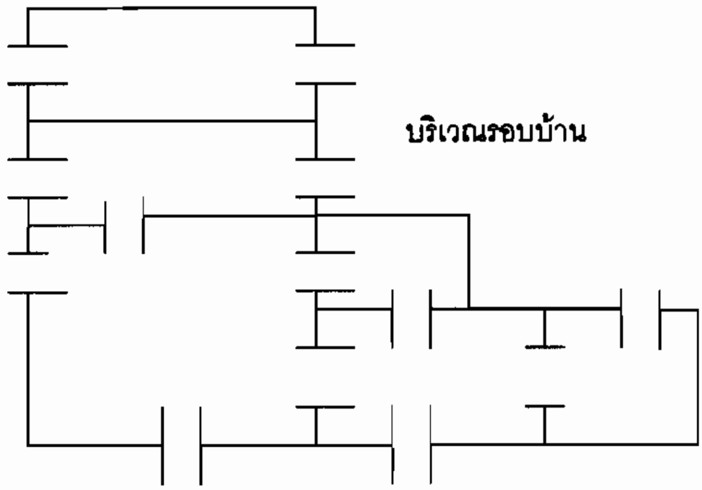
4. จากแผนผังเมืองเก่า ซึ่งประกอบด้วยเกาะ 3 เกาะ และสะพาน 8 แห่ง จงอธิบายให้เห็นว่า จะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเดินเที่ยวให้ทั่วเมืองเก่าแห่งนี้ โดยใช้ทุกสะพานเพียงแห่งละหนึ่งครั้ง



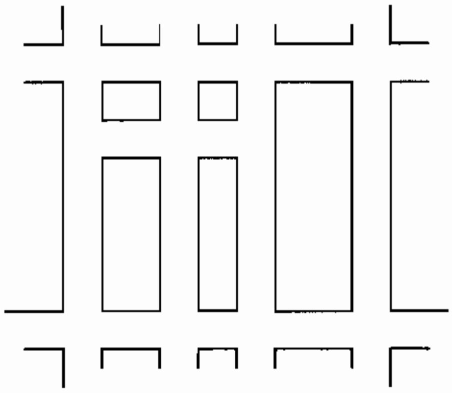
5. จากแผนผังแสดงหมู่เกาะพาราไดซ์ นอกชายฝั่งฮาเวน ซีส์ ซึ่งมีชื่อเสียงด้านการท่องเที่ยว เพราะเส้นทางเที่ยวทางเรือมีทิวทัศน์สวยงาม ให้อธิบายว่าจะเป็นไปได้หรือไม่ที่บริษัทท่องเที่ยวสตาร์แวนเดอเรอ จะนำนักท่องเที่ยวชมวิวตามเส้นทางที่กำหนด (ด้วยเส้นไข่ปลา) ให้ผ่านตามเส้นทางแต่ละเส้นเพียง 1 ครั้ง แล้วกลับเข้าชายฝั่งฮาเวน ซีส์



6. จากแผนผังบ้านที่กำหนด ให้อธิบายว่าเจ้าของบ้าน จะสามารถเดินผ่านประตูบ้านทุกประตู เพียงแห่งละ 1 ครั้ง ได้หรือไม่อย่างไร



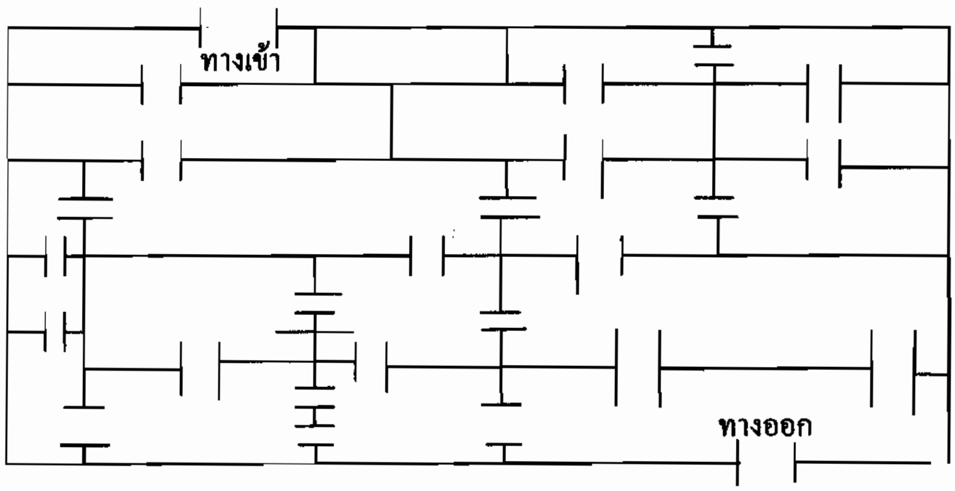
7. บุรุษไปรษณีย์ต้องเดินส่งจดหมายให้แก่บ้านสองฟากถนน (ดังรูป)



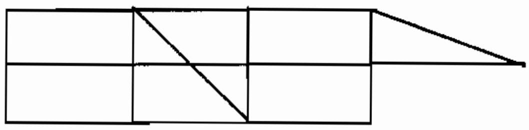
ถ้าบุรุษไปรษณีย์ไม่ต้องการเดินข้ามฟากส่งจดหมาย และต้องการเดินส่งจดหมายในแต่ละสะพานอย่างน้อยถนนละสองครั้ง ให้อธิบายว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะกลับถึงบ้านได้ทันทีเมื่อส่งจดหมายตอนเที่ยวกลับ

8. แผนผังข้างล่างนี้แสดง "บ้านสนธยา" แห่งหนึ่งซึ่งใครก็ตามเมื่อเดินผ่านประตูห้องหนึ่งไปแล้วประตูจะปิดโดยทันที และเปิดกลับไปอีกไม่ได้ สมมุติว่านักศึกษาเข้าบ้านหลังนี้ และเปิดประตูเข้า

ไปในห้องถัดไปได้ ให้นักศึกษาหาวิธีการออกจากบ้านหลังนี้ตามหลักของทฤษฎีกราฟ ถ้านักศึกษาหาทางออกไม่ได้ก็จะต้องอยู่ในบ้านหลังนี้ตลอดไป



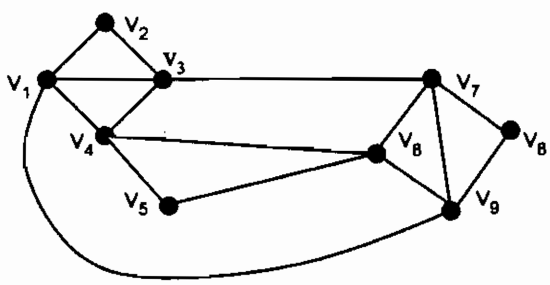
9. ให้อธิบายว่าคนขายไอศกรีมจะสามารถเร่ขายไอศกรีมบนถนนสายต่าง ๆ ทุกสาย (ตามแผนผังข้างล่างนี้) เพียงถนนละ 1 ครั้ง จะได้หรือไม่อย่างไร



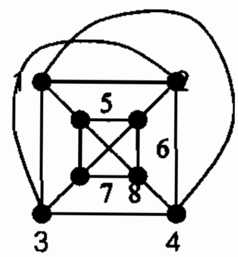
10. ให้พิสูจน์ว่ากราฟ G เป็นแบบออยเลอร์ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ G มีความเชื่อมโยง และชุดของเส้นเชื่อมในกราฟ G สามารถแบ่งออกเป็นวงเวียน

11. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟแบบออยเลอร์ แล้วให้ใช้ขั้นตอนของฟลูรีหาวงจรแบบออยเลอร์

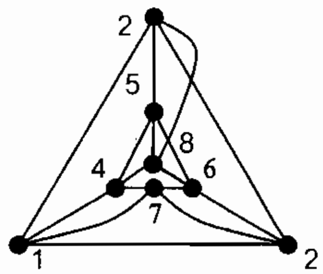
11.1



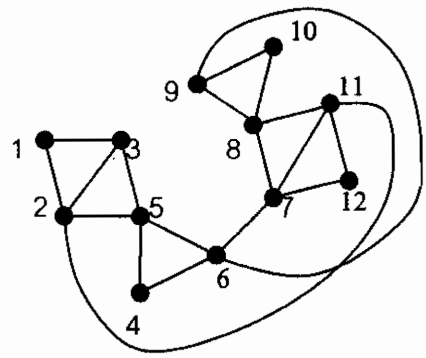
11.2



11.3

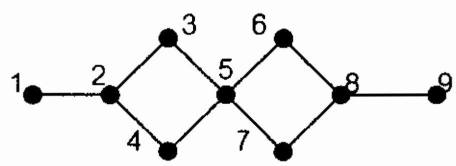


11.4



12. จากกราฟที่กำหนดให้ จงอธิบายว่าเป็นกราฟแบบออยเลอร์หรือไม่ และถ้ากราฟไม่เป็นแบบออยเลอร์ จะสามารถทำให้เป็นกราฟแบบออยเลอร์ด้วยการสร้างเส้นเชื่อมใดเพิ่มเติมได้หรือไม่

12.1



12.2