

## ประยุกต์ของกราฟระบุทิศทาง

### 4.1 นำเรื่อง

กราฟระบุทิศทางสามารถประยุกต์ใช้ได้ ในหลายสาขาวิชาเช่นเดียวกับกราฟ สำหรับในบทนี้ จะนำตัวอย่างการประยุกต์ที่สำคัญต่าง ๆ ของกราฟระบุทิศทางมาอธิบายให้เห็นแนวความคิดและวิธีการนำไปใช้ เรื่องแรก ที่จะกล่าวถึงคือ กราฟระบุทิศทางที่ใช้ในกราฟการแข่งขัน (tournaments) ซึ่งได้ชื่อมาจากการแข่งขันกีฬาแบบทุกทีมที่เข้าแข่งขันต้องพบกันหมดทีมละ 1 ครั้ง และไม่ให้มีการเสมอ

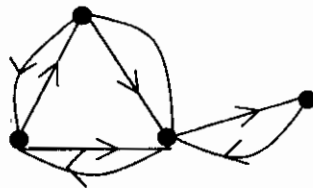
ในการทำความเข้าใจเรื่องการประยุกต์ในสถานะการณ์ต่าง ๆ ของกราฟระบุทิศทาง มีบทนิยาม และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

#### บทนิยาม 4.1.1

กราฟระบุทิศทาง  $D$  เรียกว่า มีความสมมาตร (Symmetry) ถ้าหากเมื่อใดก็ตามที่มีเส้นเชื่อม  $v_1v_2$  แล้วมีเส้นเชื่อม  $v_2v_1$  สำหรับจุดยอด  $v_1$  และ  $v_2$  ใด ๆ ใน  $D$

#### ตัวอย่างที่ 1

กราฟ  $D$  ต่อไปนี้ เป็นกราฟระบุทิศทางที่มีความสมมาตร

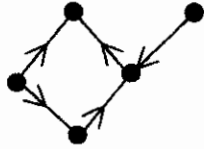


#### บทนิยาม 4.1.2

กราฟระบุทิศทาง  $D$  เรียกว่า ไม่มีความสมมาตร หรือ อสมมาตร (asymmetry) ถ้าหากเมื่อใดก็ตามที่มีเส้นเชื่อม  $v_1v_2$  แล้ว ไม่มีเส้นเชื่อม  $v_2v_1$  สำหรับจุดยอด  $v_1$  และ  $v_2$  ใด ๆ ใน  $D$

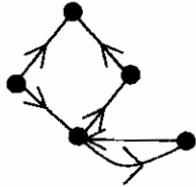
### ตัวอย่างที่ 2

กราฟ D ต่อไปนี้ เป็นกราฟระบุทิศทางแบบอสมมาตร



### ตัวอย่างที่ 3

กราฟ D ต่อไปนี้เป็นกราฟระบุทิศทางแบบผสม คือไม่มีคุณสมบัติของสมมาตร หรือ อสมมาตร



### บทนิยาม 4.1.3

กราฟระบุทิศทาง D เรียกว่า เป็นกราฟแบบบริบูรณ์ (complete) ถ้าเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด  $v_1$  และ  $v_2$  ใด ๆ ใน D มีทิศทางกำหนด 1 ทิศทาง และเรียกว่า D เป็นกราฟสมมาตรแบบบริบูรณ์ ถ้ามีเส้นระบุทิศทางทั้งจากจุดยอด  $v_1$  ไป  $v_2$  และจาก  $v_2$  ไป  $v_1$  ( $v_1 \neq v_2$ )

กราฟระบุทิศทางซึ่งมีความสมมาตรแบบบริบูรณ์มีสัญลักษณ์ คือ  $K_p$  ซึ่ง  $p$  แทนอันดับในกราฟ และกราฟ  $K_p$  มีขนาด  $p(p-1)$

### ตัวอย่างที่ 4

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของกราฟสมมาตรแบบบริบูรณ์



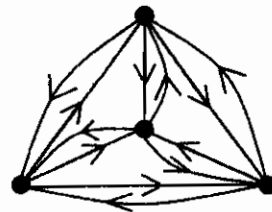
$K_1$



$K_2$



$K_3$



$K_4$

#### **บทนิยาม 4.1.4**

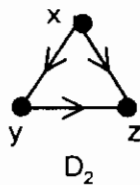
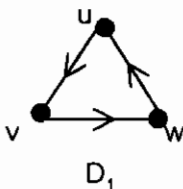
กราฟระบุทิศทาง  $D$  เรียกว่า **กราฟการแข่งขัน** (tournament) ถ้า  $D$  เป็นกราฟระบุทิศทางอสมมาตรแบบบริบูรณ์ นั่นคือ สำหรับจุดยอด  $v_1$  และ  $v_2$  ใด ๆ ใน  $D$  ซึ่ง  $v_1 \neq v_2$  จะมีเส้นเชื่อมระบุทิศทางระหว่าง  $v_1$  และ  $v_2$  เพียงเส้นเดียว ส่วนจำนวนคะแนนของจุดยอดในกราฟแทนด้วย  $S(V)$  คือดีกรีออกจากจุดยอดนั้น และลำดับคะแนนของกราฟคือ ลำดับของดีกรีออก

#### **ตัวอย่างที่ 5**

กราฟการแข่งขันอันดับ 1 มี 1 รูป

กราฟการแข่งขันอันดับ 2 มี 1 รูป

กราฟการแข่งขันอันดับ 3 มี 2 รูป แตกต่างกัน



จะเห็นได้ว่ากราฟ  $D_1$  มี  $id = od = 1$  สำหรับจุดยอดใด ๆ ใน  $D_1$

แต่  $D_2$  มี  $odx = idz = 2$

$ody = idy = 1$

$odz = idx = 0$

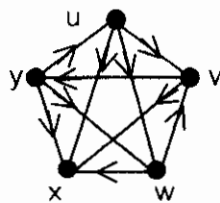
#### **ตัวอย่างที่ 6**

ถ้ากราฟการแข่งขัน  $D_1$  มีจุดยอด  $n$  จุด ซึ่งแต่ละจุดยอดมีจำนวนคะแนนแตกต่างกัน จำนวนลำดับของคะแนนของกราฟ  $D_1$  จะเท่ากับเท่าใด

**วิธีทำ**

เนื่องจากในกราฟการแข่งขันที่มีผู้เล่นจำนวน  $n$  คน แต่ละคนสามารถได้รับชัยชนะได้ไม่เกิน  $n - 1$  ครั้ง ดังนั้นจุดยอดแต่ละจุดจะมีจำนวนคะแนนอย่างมากที่สุด  $n - 1$  คะแนน และเพราะว่าจุดยอดแต่ละจุดมีคะแนนเป็นบวก ดังนั้น จำนวนคะแนนจะอยู่ในช่วง  $0 \leq S \leq n - 1$  นั่นคือ ลำดับของจำนวนแต้มที่ไม่ซ้ำกันใน  $D$ , จะเท่ากับ  $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

กราฟการแข่งขันพบได้ในกรณีต่าง ๆ กัน กรณีที่เห็นได้ชัดเจน คือ กรณีการแข่งขันกีฬาแบบทุกทีมที่เข้าแข่งขันต้องพบกัน 1 ครั้ง ในกราฟการแข่งขัน แต่ละทีมแทนด้วยจุดยอด 1 จุด และทีมที่แข่งขันกันจะมีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง เช่น ถ้าเส้นเชื่อมระบุทิศทางจาก  $u$  ไป  $v$  แสดงว่าทีม  $u$  มีชัยชนะเหนือทีม  $v$  จำนวนคะแนนของแต่ละจุดคือจำนวนของชัยชนะและลำดับของจำนวนคะแนน คือลำดับของชัยชนะของแต่ละทีม เช่นการแข่งขันของ 5 ทีม แบบพบกันหมด (ดังกราฟ)



y ชนะ 3  
u ชนะ 3  
v ชนะ 2

จะมีลำดับคะแนนดังนี้ คือ 3,3,2,2,0

กราฟการแข่งขันซึ่งใช้ในด้านชีววิทยา จะเกี่ยวข้องกับสัตว์แต่ละคู่ซึ่งสัตว์ตัวหนึ่งมีอำนาจหรืออิทธิพลเหนือสัตว์อีกตัวหนึ่งทำให้สามารถใช้กราฟในการกำหนดลำดับของความมีอำนาจจะเห็นอกันและกันได้

โดยปกติถือเป็นเรื่องสำคัญที่ต้องจัดลำดับของจุดยอดในกราฟการแข่งขัน เช่น กราฟการแข่งขันแบบพบกัน 5 ทีมข้างต้น จำนวนของชัยชนะกำหนดว่า  $u, v, w, x$  และ  $y$  คือ 3,2,2,0 และ 3 ตามลำดับ เพราะว่า  $u$  และ  $y$  มีคะแนนสูงสุด ทีม  $u$  และ  $y$  ควรจะมีชัยชนะนำหน้าทีมอื่น และเพราะว่า  $y$  ชนะ  $u$  ทีม  $y$  จึงควรจัดอันดับมาก่อนทีม  $u$  ซึ่งทีม  $u$  อาจจะไม่ชอบเท่าใดเพราะว่าทีม  $u$  เอาชนะทีม  $v$  ซึ่งชนะทีม  $y$  ในกรณีเช่นนี้จึงอาจจะใช้วิธีของแฮมิลตันช่วยในการจัดอันดับได้ กล่าวคือ ทีม B

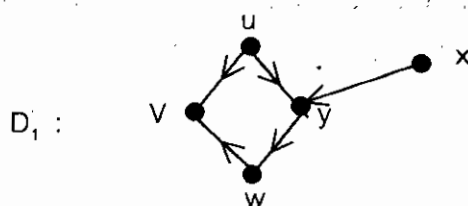
จะจัดว่ามีลำดับที่ก่อนทีม A ถ้าวิถีแฮมิลตันถึงจุด B ก่อนจุด A กรณีเช่นนี้ เมื่อดูจากกราฟตัวอย่าง ซึ่งมีวิถี  $yuwvx$  เป็นแบบแฮมิลตัน ซึ่งสอดคล้องกับการจัดอันดับทีมผู้เล่น ดังนั้น ทีม  $y$  จึงควรมีลำดับก่อนทีม  $u$

**บทนิยาม 4.1.5**

จุดยอด  $v$  ใด ๆ ในกราฟการแข่งขันเรียกว่าเป็น **จุดส่ง** ถ้ามี  $odv$  เป็นบวก และ  $idv$  เป็นศูนย์ แต่เรียกจุดยอด  $v$  ว่าเป็น**จุดรับ**ถ้า  $idv$  เป็นบวก และ  $odv$  เป็นศูนย์

**ตัวอย่างที่ 7**

กำหนดกราฟการแข่งขัน  $D_1$  ดังต่อไปนี้

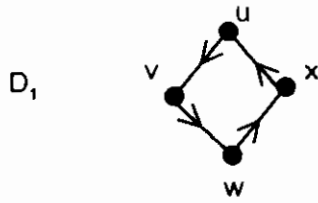


จะเห็นได้ว่า จุดยอด  $u$  และ  $x$  เป็นจุดส่ง  
 จุดยอด  $v$  เป็นจุดรับ  
 จุดยอด  $w$  และ  $y$  เป็นทั้งจุดรับและจุดส่ง

**บทนิยาม 4.1.6**

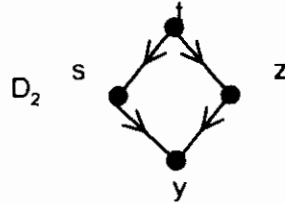
กราฟการแข่งขัน  $D$  เรียกว่า **มีการถ่ายทอด** (transitive) ถ้าเมื่อใดก็ตามที่  $uv$  และ  $vw$  เป็นเส้นเชื่อมใน  $D$  แล้ว  $uw$  เป็นเส้นเชื่อมใน  $D$  ด้วย

**ตัวอย่างที่ 8**



$D_1$

$D_1$  ไม่มีการถ่ายทอด



$D_2$

$D_2$  มีการถ่ายทอด

#### ทฤษฎีบท 4.1

กราฟการแข่งขัน  $D$  เป็นแบบที่มีการถ่ายทอดก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ กราฟ  $D$  ไม่มีวงเวียน

#### พิสูจน์

□ ให้  $D$  เป็นกราฟการแข่งขันซึ่งไม่มีวงเวียน และให้  $uv$  และ  $wv$  เป็นเส้นเชื่อมระบุทิศทางใน  $D$  เพราะว่า  $D$  ไม่มีวงเวียนทำให้ไม่มีเส้นเชื่อม  $wv$  ใน  $D$  แต่มีเส้นเชื่อม  $wv$  ดังนั้น  $D$  มีการถ่ายทอด

□ ถ้า  $D$  มีการถ่ายทอดและมีวงเวียน  $C$  ซึ่ง  $C$  คือ  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  ( $n \geq 3$  เพราะว่า  $D$  เป็นแบบอสมมาตร)

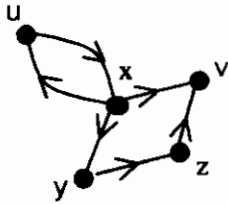
เพราะว่าเส้นเชื่อมระบุทิศทางจาก  $v_1$  ไป  $v_2$  และจาก  $v_2$  ไป  $v_3$  ดังนั้นมีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจาก  $v_1$  ไป  $v_3$  ใน  $D$  ( $D$  มีการถ่ายทอด) ในทำนองเดียวกัน  $v_1, v_4, v_1, v_5, \dots$  และ  $v_1, v_n$  เป็นเส้นเชื่อมระบุทิศทางใน  $D$  แต่ในวงเวียน  $C$  มีเส้นเชื่อมคือ  $v_n, v_1$  ได้ความขัดแย้ง ดังนั้น  $D$  ต้องไม่มีวงเวียน

#### บทนิยาม 4.1.7

ระยะทางจากจุดยอด  $u$  ถึง  $v$  หรือ  $d(u,v)$  สำหรับ  $u$  และ  $v$  ใด ๆ ในกราฟระบุทิศทาง  $D$  คือความยาวของวิถีจาก  $u$  ถึง  $v$  ซึ่งสั้นที่สุด

**ตัวอย่างที่ ๑**

กำหนดกราฟ D ดังต่อไปนี้

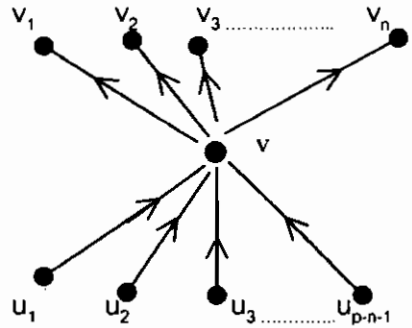


จะเห็นได้ว่า  $d(u,v) = 2$  ได้จากวิถี  $u \rightarrow x \rightarrow v$

**ทฤษฎีบท 4.2**  
ถ้า D เป็นกราฟการแข่งขัน และ v เป็นจุดยอดใน D ซึ่ง  $odv$  มีค่าสูงสุดใน D ระยะทางจาก v ไปยังจุดยอดอื่น ๆ ใน D จะเท่ากับ 1 หรือ 2

**พิสูจน์**

ให้  $odv = n$  และจุดประชิดจาก v เป็น  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ถ้ากราฟ D มีอันดับ p จุดยอดที่เหลือคือ  $u_1, u_2, \dots, u_{p-n-1}$  เป็นจุดประชิดที่เข้าหาจุด v



เพราะว่าจุด  $v_i, 1 \leq i \leq n$  มีระยะห่างจากจุด v หรือ  $d(v, v_i) = 1$  ถ้าเซตของจุดยอดใน D คือ  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  จะได้  $d(v, v_i) = 1$  ตามทฤษฎี ถ้า D มีจุดอื่น ๆ ที่แตกต่างจากจุด v และ  $v_i$  ให้จุด

เหล่านั้นเป็น  $u_j$ ,  $1 \leq j \leq p - n - 1$  (เพื่อแสดงให้เห็นว่าระยะทางจาก  $u_j$  ถึง  $v$  เท่ากับ 2) จะเห็นได้ชัด  
 เจนว่าแต่ละจุด  $u_j$  ถ้าเป็น  $odu_j$  จากจุด  $v$ , ระยะทาง  $d(v, u_j) = 2$  ตามทฤษฎี แต่ถ้าสมมุติว่ามีจุด  $u_k$   
 ซึ่ง  $1 \leq k \leq p - n - 1$  ซึ่งไม่เป็น  $odu_j$  จาก  $v$ , แสดงว่าเป็น  $idu_k$  เข้าหา  $v$  และเข้าหาจุด  $v$  ด้วย ซึ่งใน  
 กรณีเช่นนี้

$$odu_k \geq n + 1$$

แต่เป็นไปได้ไม่ได้เพราะมีเฉพาะจุดยอด  $v$  เท่านั้น ซึ่ง  $odv$  มีค่าสูงสุด และ  $odv = n$  ดังนั้นแต่ละจุด  $u_j$   
 เป็น  $odu_j$  จากจุด  $v$

**ข้อสังเกต**

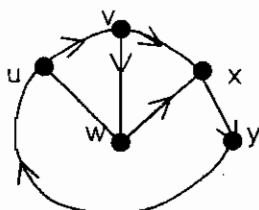
ตามทฤษฎีนี้มีความหมายว่าในการแข่งขันเป็นทีมที่มีทีมนักกีฬาเข้าแข่งขันหลายทีม มีเงื่อนไขว่า ทุก  
 ทีมต้องพบกันและไม่ให้มีการเสมอ และทีมใด ๆ เช่น  $w$  ถือว่าเป็นทีมแพ้ก็ต่อเมื่อทีมที่ชนะทีม  $w$  ไป  
 แพ้ทีมที่แพ้ทีม  $w$

กราฟแข่งขันมีคุณสมบัติที่น่าสนใจอีกเรื่องหนึ่งซึ่งเกี่ยวข้องกับวิถีแบบแฮมิลตัน

**บทนิยาม 4.1.8**  
 ในกราฟระบุทิศทาง  $D$  วิถีแบบแฮมิลตันคือวิถีที่รวมจุดทั้งหมดใน  $D$

**ตัวอย่างที่ 10**

กำหนดกราฟระบุทิศทาง  $D$  ดังต่อไปนี้



วิถี  $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y$  เป็นวิถีแบบแฮมิลตัน



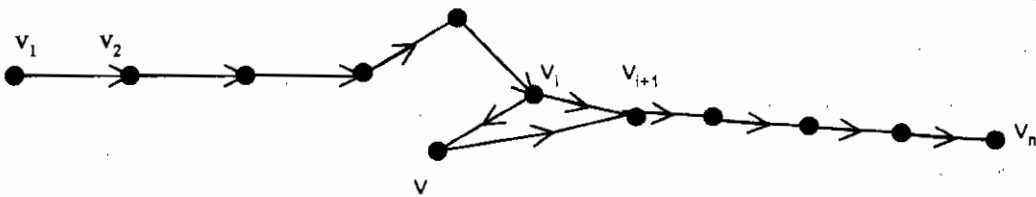
### ทฤษฎีบท 4.3

กราฟการแข่งขันต้องมีวิถีแบบแฮมิลตัน

**พิสูจน์** (ใช้คณิตศาสตร์อุปนัย)

กราฟการแข่งขันซึ่งมีจุดยอด 1 ถึง 4 จุด มีวิถีแบบแฮมิลตัน กำหนดให้กราฟการแข่งขันอันดับ  $n$  ซึ่ง  $n \geq 4$  มีวิถีแบบแฮมิลตัน ถ้ากราฟการแข่งขัน  $D$  มีอันดับ  $n + 1$  และมี  $v$  เป็นจุดยอดจุดหนึ่งใน  $D$  ดังนั้น  $D - v$  จะมีอันดับ  $n$  และมีวิถีแบบแฮมิลตัน

ให้วิถีแบบแฮมิลตันนี้คือ  $P : v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  ถ้า  $vv_1$  เป็นเส้นระบุทิศทางในกราฟ  $D$  กราฟ  $D$  จะมีวิถีแบบแฮมิลตันเป็น  $v, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$  ถ้า  $v_n v$  เป็นเส้นระบุทิศทางใน  $D$  กราฟ  $D$  จะมีวิถีแบบแฮมิลตัน  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v$  ให้  $v_1 v$  เป็นเส้นระบุทิศทางใน  $D$  ถ้าจุด  $v_i$  ซึ่ง  $1 \leq i \leq n$  เป็นจุดประชิดเข้าหาจุด  $v$  กราฟ  $D$  ต้องมีวิถีแบบแฮมิลตัน เพราะว่า  $v_n v$  เป็นเส้นระบุทิศทางใน  $D$  ถ้าจุด  $v_i$  ซึ่ง  $1 \leq i \leq n$  ไม่เป็นจุดประชิดเข้าหาจุด  $v$  แสดงว่าต้องมีจุดยอด  $v_i$  ซึ่ง  $1 \leq i \leq n - 1$  ซึ่งเส้นเชื่อม  $v_i v$  และ  $vv_{i+1}$  เป็นเส้นระบุทิศทางใน  $D$  (ดังรูป)



ดังนั้น ผลลัพธ์ที่ได้คือ วิถี  $v_1, v_2, \dots, v_i, v, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n$  เป็นวิถีแบบแฮมิลตัน

### ข้อสังเกต

ผลของทฤษฎีแสดงว่าในการแข่งขันแบบพบกันหมด  $n$  ทีม อาจจัดอันดับเป็น  $D_1, D_2, \dots, D_n$  โดยมีทีม  $D_1$  ชนะทีม  $D_2$  ทีม  $D_2$  ชนะทีม  $D_3$  ฯลฯ



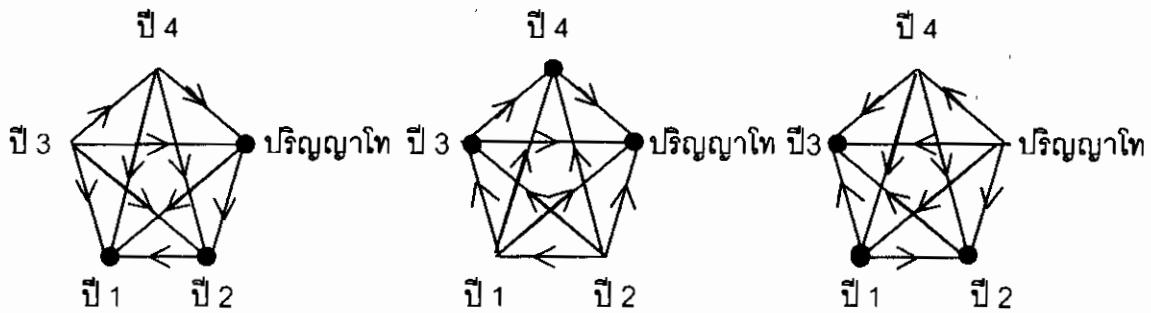
เพื่อหาว่านักศึกษาชั้นปีใดเหมาะสมที่สุดที่จะเข้าไปเป็นตัวแทน กรรมการองค์การทั้ง 3 คน คือ จำแลง ในฐานะประธาน คมขำ และ เพ็รียวลม เป็นกรรมการ ซึ่งจากการพบปะหรือจำแลง คมขำ และเพ็รียวลม พบว่าต่างมีอันดับความชอบต่าง ๆ กัน ดังนี้

อันดับที่	จำแลง ชอบ	คมขำ ชอบ	เพ็รียวลม ชอบ
1	ปี 3	ปี 1	ปริญญาโท
2	ปี 4	ปี 2	ปี 4
3	ปริญญาโท	ปี 3	ปี 2
4	ปี 1	ปี 4	ปี 1
5	ปี 2	ปริญญาโท	ปี 3

ให้พิจารณาว่าโดยใช้กราฟการแข่งขัน จำแลง ในฐานะประธานกรรมการจะใช้วิธีการสรรหาแบบใด เพื่อให้ได้ตัวแทนที่เป็นนักศึกษาปี 3 ซึ่งจำแลงชอบมากที่สุดเป็นอันดับ 1

**วิธีทำ**

กราฟการแข่งขันแสดงอันดับความชอบของกรรมการทั้งสามมีดังนี้



กราฟการแข่งขันมีวงเวียน ดังนั้น เพื่อให้ได้ตัวแทนนักศึกษาที่จำแลง ชอบมากที่สุด จำแลง ต้องนำเสนอวิธีการคัดเลือกในฐานะประธาน ด้วยการให้เหตุผลว่า เนื่องจากมติของกรรมการไม่เป็นเอกฉันท์ ในเรื่องจะให้นักศึกษาปีใดเป็นตัวแทน จึงขอเสนอให้เลือกโดยวิธีการคัดออกครั้งละ 1 คน จาก

2 คน นั่นคือ พิจารณาตัวแทนนักศึกษาครวละ 2 คน แล้วคัดออก 1 คน จนกว่าจะได้ตัวแทนที่ต้องการ

ขั้นที่หนึ่ง กรรมการลงมติคัดเลือกระหว่างตัวแทนนักศึกษา ปี 1 กับ ปี 2 ผลลัพธ์คือได้นักศึกษา ปี 1 เป็นตัวแทน

ขั้นที่สอง คัดเลือกระหว่างตัวแทนนักศึกษาปี 3 กับ ปี 4 ผลลัพธ์คือได้ นักศึกษาปี 3 เป็นตัวแทน (ถึงขั้นนี้เหลือเฉพาะนักศึกษาปริญญาโท ผลลัพธ์ คือ ได้นักศึกษาปริญญาโท

ขั้นที่สาม คัดเลือกระหว่างนักศึกษาปี 1 กับนักศึกษาปริญญาโท ผลลัพธ์ คือ ได้นักศึกษาปริญญาโท

ขั้นที่สี่ คัดเลือกระหว่างนักศึกษาปี 3 กับนักศึกษาปริญญาโท ผลลัพธ์ คือ ได้นักศึกษาปี 3 เป็นตัวแทน ซึ่งเป็นตัวแทนนักศึกษาที่จำแลงชอบมากที่สุด

### ตัวอย่างที่ 13

ในการเลือกผู้ว่าการเมืองใหม่แห่งหนึ่งซึ่งมีผู้สมัคร 3 คน คือ วิจิตร วาตะ และ ไหวหาร เนื่องจากเป็นเมืองที่ได้รับการยกฐานะขึ้นมาใหม่ เจ้าหน้าที่ผู้ดำเนินการเลือกตั้งรู้สึกไม่มั่นใจในการดำเนินงาน จึงขอคำปรึกษาจาก ดร. ชื่นชอบ จรุงใจ ซึ่งสอนที่มหาวิทยาลัยใกล้ตัวเมือง ดร. ชื่นชอบ ขอเวลาพิจารณาสองสามวัน ประกอบกับการเลือกตั้งใกล้กำหนดเวลาเข้ามา ดร.ชื่นชอบ ให้นักศึกษาออกสำรวจความคิดเห็นผู้มีสิทธิออกเสียงได้รับผล ดังนี้คือ

1. ในจำนวนผู้มีสิทธิออกเสียงเลือกตั้ง 2,170 คน สองในสามยืนยันว่าวางแผนจะไปใช้สิทธิในวันแรงงาน
2. 35 % ของผู้มีสิทธิออกเสียง เลือกวิจิตร เป็นอันดับหนึ่ง และเกือบทั้งหมดเลือกไหวหาร เป็นอันดับสอง
3. 30 % เลือกวาตะเป็นอันดับแรก และเกือบทั้งหมดเลือกไหวหาร เป็นอันดับสอง
4. 25 % เลือกไหวหาร เป็นอันดับแรก และเกือบทั้งหมดเลือกวาตะ เป็นอันดับสอง
5. 10 % ยังไม่ตัดสินใจ

จากการสำรวจ ดร. ชื่นชอบ โทรศัพท์ถึงผู้สมัครทั้งสามและบอกกับแต่ละคนว่ามีโอกาสที่จะได้รับเลือกเป็นผู้ว่าราชการฯ แต่จะต้องเสียค่าใช้จ่ายจำนวนหนึ่งในขณะที่รอคำตอบจากผู้สมัคร ดร. ชื่นชอบทำบันทึกช่วยจำไว้ 3 เล่ม ซึ่งจะมีเพียงหนึ่งเล่มที่มอบให้กับเจ้าหน้าที่ผู้ดำเนินการเลือกตั้ง

#### บันทึกเล่มที่ 1

เสนอให้เจ้าหน้าที่จัดเลือกตั้งในวันแรงงาน และประกาศรายชื่อผู้ได้รับคะแนนเสียงสูงสุดให้เป็นผู้ว่าราชการฯ วิธีนี้ดีที่สุด เพราะประหยัดค่าใช้จ่าย

#### บันทึกเล่มที่ 2

เสนอให้เจ้าหน้าที่จัดเลือกตั้ง 2 ครั้ง ครั้งแรกเป็นการเลือกเพื่อคัดผู้ได้คะแนนเสียงต่ำสุดออก ครั้งที่สองเป็นการแข่งขันระหว่างผู้ได้คะแนนสูงจากการเลือกครั้งแรก ผู้ที่ได้คะแนนเสียงมากที่สุดเป็นผู้ชนะ วิธีการแบบนี้ทำให้มั่นใจได้ว่าผู้ว่าราชการฯ คนใหม่ ได้รับคะแนนเสียงส่วนมากจากผู้มีสิทธิลงคะแนน

#### บันทึกเล่มที่ 3

เสนอให้มีการเลือกตั้ง 2 ครั้ง โดยครั้งแรกให้ผู้มีสิทธิออกเสียงลงความเห็นว่าจะไม่ต้องการให้ผู้สมัครคนใดเป็นผู้ว่าราชการฯ มากที่สุด คัดผู้สมัครนั้นออก แล้วจัดเลือกตั้งครั้งที่สอง เพื่อเลือกผู้ได้รับคะแนนเสียงสูงสุดให้เป็นผู้ว่าราชการฯ

ปรากฏว่า ดร. ชื่นชอบ ยังไม่ทันได้ยื่นบันทึกเล่มใดเล่มหนึ่งให้แก่เจ้าหน้าที่ผู้ดำเนินการเลือกตั้งก็ต้องเดินทางไปต่างประเทศ เจ้าหน้าที่จึงดำเนินการเลือกตั้งไปเพียงครั้งเดียวและ วิจิตร ได้รับคะแนนเสียงสูงสุด 600 คะแนน ผู้ได้รับคะแนนเสียงลดหลั่นลงไป คือ วาตะ ได้ 500 คะแนน และ โวหารได้ 400 คะแนน ดังนั้น วิจิตร จึงได้รับการแต่งตั้งให้เป็นผู้ว่าราชการฯ คนใหม่

#### ตัวอย่างที่ 14

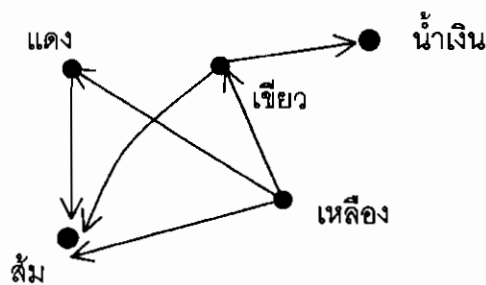
ถ้า แดง ส้ม เหลือง เขียว และ น้ำเงิน เป็นเพื่อนรุ่นเดียวกันบุคคลทั้ง ห้าจะมีการพูดคุยและเล่าเรื่องที่ได้นับมาดังนี้คือ

1. เมื่อแดงได้ยืมข่าวมา จะส่งข่าวต่อให้ส้ม ส่วนส้มจะไม่บอกข่าวใด ๆ ที่ได้ยืมมาให้แดง แต่จะบอกข่าวต่อให้เหลือง กับ เขียว
2. เมื่อเหลืองได้ยืมข่าว จะบอกข่าวต่อให้แดง เขียว และส้ม
3. เมื่อเขียวได้ยืมข่าว จะบอกต่อให้ส้ม และน้ำเงิน
4. น้ำเงินเมื่อได้ยืมข่าวจะเก็บเงียบไม่บอกใคร

ให้ใช้กราฟระบุทิศทาง แสดงการกระจายข่าวในกลุ่มเพื่อนทั้งห้าคน

**วิธีทำ**

ให้จุดยอดแทนบุคคลทั้ง 5 และเส้นเชื่อมระบุทิศทาง แสดงการส่งข่าวคือจะได้กราฟระบุทิศทางแสดงทิศทางการกระจายข่าวลือดังนี้



**ตัวอย่างที่ 15**

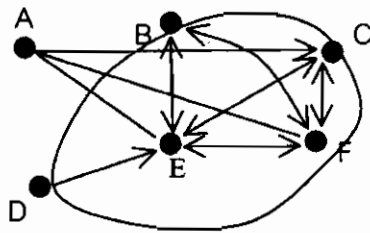
ผู้เชี่ยวชาญของบริษัทใหญ่แห่งหนึ่งต้องการให้คณะกรรมการของรัฐออกกฎหมายที่จะเป็นประโยชน์ต่อบริษัท ซึ่งขออนโยบายที่ดีที่สุด คือ ให้ได้รับการสนับสนุนจากสมาชิกที่มีอิทธิพลมากที่สุดในคณะกรรมการ และจากข้อมูลตลอดจนประสบการณ์ผู้เชี่ยวชาญได้ข้อสรุปเกี่ยวกับกรรมกรดังนี้ คือ

กรรมการ	กรรมการได้รับอิทธิพล
อนิรุท (A)	คณิงนิจ เพชรไพร ฟ้าสววย
บัญญัติ (B)	ฟ้าสววย
คณิงนิจ (C)	บัญญัติ เพชรไพร
ดวงพร (D)	บัญญัติ คณิงนิจ เพชรไพร
เพชรไพร (E)	บัญญัติ
ฟ้าสววย (F)	คณิงนิจ เพชรไพร

- (ก) ถ้าความสัมพันธ์ในแบบ มีอิทธิพลเหนือ เป็นแบบชั้นเดียว เช่น ถ้าอนิรุจมีอิทธิพลต่อคณิงนิจ คณิงนิจต้องไม่มีอิทธิพลเหนืออนิรุจ ให้เขียนกราฟระบุทิศทางแสดงความสัมพันธ์ตามตาราง
- (ข) ถ้าผลกระทบของการมีอิทธิพลเหนือมีลักษณะเป็นแบบสองชั้น นั่นคือถ้าอนิรุจมีอิทธิพลเหนือคณิงนิจ และคณิงนิจมีอิทธิพลเหนือบัญญัติ สรุปได้ว่าอนิรุจมีอิทธิพลเหนือบัญญัติ จะเขียนตารางแสดงให้เห็นว่ากรรมการคนใดมีอิทธิพลเหนือแบบชั้นเดียว และแบบสองชั้น เป็นจำนวนเท่าใด
- (ค) ถ้ากำหนดว่าผู้ที่มีอิทธิพลมากที่สุด คือ ผู้ที่มีจำนวนรวมของอิทธิพลเหนือแบบชั้นเดียว กับแบบสองชั้นมากที่สุด ให้ใช้ผลจากข้อ (ข) สรุปลำดับขีดชั้นของกรรมการที่มีอิทธิพลสูงสุดจนถึงผู้มีอิทธิพลน้อยที่สุด
- (ง) ผู้เชี่ยวชาญควรระวังชักชวนกรรมการผู้ใดบ้าง

**วิธีทำ**

- (ก) ให้จุดยอดแทนกรรมการ และเส้นเชื่อมระบุทิศทางมีทิศทางจาก กรรมการ A ไปยัง B ถ้า A มีอิทธิพลเหนือ B เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นแบบชั้นเดียว กราฟระบุทิศทางที่ต้องการคือ



- (ข) เพื่อความสะดวกใช้ตารางแสดงจำนวนเส้นเชื่อมยาว 1 หน่วย และ 2 หน่วย (มีอิทธิพลเหนือแบบชั้นเดียว และแบบสองชั้น) ระหว่างจุดยอด ดังนี้

กรรมกร	A	B	C	D	E	F
A	0	2	2	0	3	1
B	0	0	1	0	1	1
C	0	2	0	0	1	1
D	0	3	1	0	2	1
E	0	1	0	0	0	1
F	0	2	1	0	2	0

จำนวน 1 2 และ 3 คือจำนวนวิถีที่มีความยาว 1 หรือ 2 จากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่ง เช่น จากจุดยอด A ถึง E มี 3 วิถี คือ วิถี AE วิถี ACE และวิถี AFE จากจุดยอด C ถึง B มี 2 วิถี คือ วิถี CB กับวิถี CEB กล่าวโดยสรุป คือ อนุรักษ์ (A) มีอิทธิพลเหนือเพชรไพร (E) ได้ 3 ทาง ส่วนคณิงจ (C) มีอิทธิพลเหนือบัญญัติได้ 2 ทาง

(ค) สรุปผลจากตารางในข้อ (ข) เมื่อรวมจำนวนในแต่ละแถวจะพบว่า

กรรมกร	A	B	C	D	E	F
รวมจำนวนในแต่ละแถว	8	3	4	7	2	5

อนุรักษ์ (A) มีอิทธิพลมากที่สุดรองลงไปคือ ดวงพร (D) ฟ้าสวย (F) คณิงจ (C) บัญชี (B) และเพชรไพร

(ง) จากผลลัพธ์ในตารางของข้อ (ค) ผู้เชี่ยวชาญควรจะเข้าหาและชักจูงกรรมกรซึ่งมีอิทธิพลสูงสุดอย่างน้อย 2 ราย คือ อนุรักษ์ กับ ดวงพร

**ตัวอย่างที่ 16** (ด้านการจัดการและการวางแผนงานที่มีเวลากำหนด)

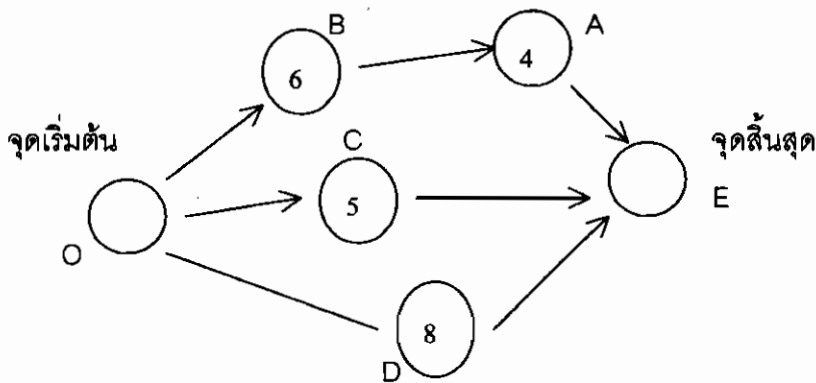


บริษัท FRESHY ต้องการปรับปรุงห้องว่าของสำนักงานให้เป็นห้องออกกำลังกาย จำเป็นต้องมีการติดตั้งฝ้าเพดานใหม่ ปูพรมพื้นห้องติดกระดาษฝาผนัง และติดตั้งเครื่องออกกำลังกาย ถ้าผู้จัดการต้องการให้งานนี้สำเร็จลงด้วยช่างมืออาชีพ และกำหนดให้งานเสร็จสิ้นภายในระยะเวลาอันรวดเร็ว จงหาว่าจะใช้แผนงานจัดการอย่างไร เพื่อให้งานสำเร็จในเวลาอันสั้น ถ้ากำหนดเวลาการใช้งาน แต่ละอย่างดังนี้

	งาน	เวลาที่ใช้ (ชั่วโมง)
A	ติดตั้งเครื่องออกกำลังกาย	4
B	ปูพรมพื้นห้อง	6
C	ติดกระดาษฝาผนัง	5
D	ติดฝ้าเพดาน	8

**วิธีทำ**

เพราะการติดตั้งเครื่องออกกำลังกายจะทำได้ก็ต่อเมื่อได้ปูพรมพื้นห้องแล้วส่วนการติดกระดาษฝาผนัง และการติดฝ้าเพดาน สามารถทำไปพร้อม ๆ กับการปูพรมพื้นห้อง ดังนั้น สามารถใช้กราฟระบุทิศทางแสดงขั้นตอนและเวลาการทำงานได้



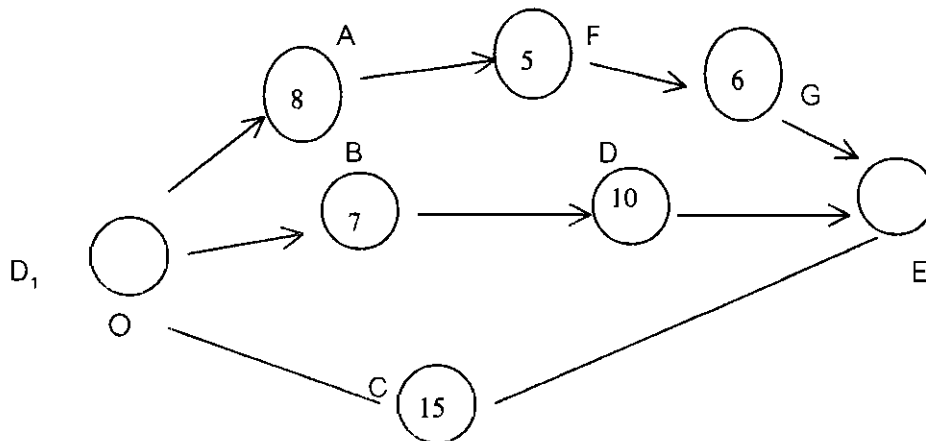
จะเห็นได้ว่างานทั้ง 4 อย่าง ใช้เวลาทั้งหมด  $4 + 6 + 5 + 8 = 23$  ชั่วโมง แต่จากกราฟ ระบุทิศทางเวลาที่ใช้ทั้งหมดเพียง 10 ชั่วโมง เพราะขณะที่ใช้เวลาปูพรมพื้นห้อง (6 ช.ม.) และติดตั้งเครื่องออกกำลังกาย (4 ช.ม.) ผู้ควบคุมงานสามารถให้ช่างติดกระดาษฝาผนัง (5 ช.ม.) และติดฝ้าเพดาน (8 ช.ม.) ทำงานไปพร้อม ๆ กันได้ โดยไม่ต้องรอให้งานปูพรมพื้นห้องและงานติดตั้งเครื่องออกกำลังกายทำเสร็จก่อน เป็นการประหยัดเวลาได้ ถึง 13 ชั่วโมง

**บทนิยาม 4.2.1**

วิถีสำคัญที่สุดของกราฟระบุทิศทาง คือวิถีที่ยาวที่สุด

**ตัวอย่างที่ 17**

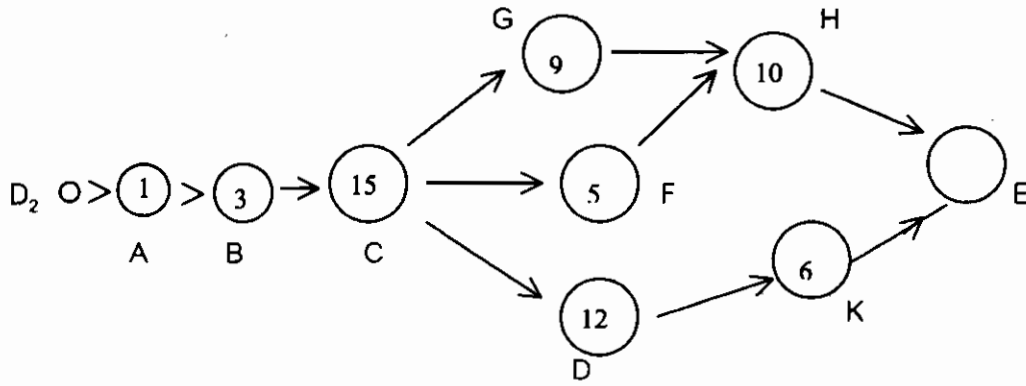
วิถีสำคัญของกราฟระบุทิศทาง  $D_1$



คือ วิถี O, A, F, G, E ซึ่งยาวที่สุดเท่ากับ 19 หน่วย

**ตัวอย่างที่ 18**

วิถีสำคัญของกราฟ  $D_2$



คือ O, A, B, C, G, H, E ซึ่งยาวที่สุดเท่ากับ 38 หน่วย

เทคนิคในตัวอย่างข้างต้นเหล่านี้ได้จาก วิธีประเมินโครงการและการตรวจสอบ โดยใช้การหาวิถีสำคัญที่สุดจากกราฟระบุทิศทาง ดังเช่น ในกราฟตัวอย่างที่ 16 มีวิถีสำคัญ 1 วิถี คือ O,B,A,E ตัวอย่างที่ 17 มีวิถีสำคัญ O,A,F,G,E 1 วิถี เป็นต้น การใช้วิธีการหาวิถีสำคัญนี้ได้จากหลักการของทฤษฎีต่อไปนี้เป็น

**ทฤษฎี 4.4**

ถ้า D เป็นกราฟระบุทิศทางซึ่งแทนโครงการที่กำหนดให้ ระยะเวลาซึ่งสั้นที่สุดในกรณีดำเนินการตามโครงการให้เสร็จสิ้นจะเท่ากับความยาวของวิถีสำคัญที่สุดของกราฟ D

**พิสูจน์**

ให้ P เป็นวิถี  $O = v_1, v_2, \dots, v_n = E$  หรือวิถีสำคัญที่สุดของ D และมีความยาวหรือระยะเวลาเท่ากับ t เพราะว่างาน  $v_i, 0 \leq i \leq n$  จะเริ่มเมื่องาน  $v_{i-1}$  เสร็จสิ้น ดังนั้น เวลาทั้งหมดในการดำเนินงานตามโครงการต้องไม่น้อยกว่า t (เพื่อแสดงให้เห็นว่างานต่าง ๆ ทำได้ในเวลา t)

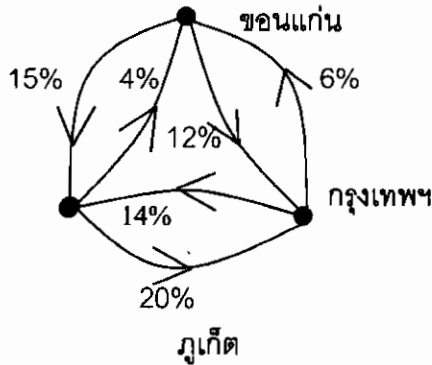
ให้ A เป็นงานใด ๆ ในโครงการ ถ้า A เป็นงานในวิถี P แสดงว่างาน A ทำได้เสร็จสิ้นในเวลา t ถ้า A เป็นงานนอกวิถี P เช่น A อยู่ในวิถี Q ซึ่งมีจุดเริ่มต้น - จุดสิ้นสุด และเป็นวิถีที่ยาวที่สุด เนื่องจากวิถี

$Q$  ต้องเริ่มต้นที่  $O$  และ สิ้นสุดที่  $E$  ร่วมกันกับวิถี  $P$  แสดงว่ามีวิถีย่อย  $Q_1$  คือ  $w_0, w_1, \dots, w_k$  ของ  $Q$  ซึ่ง  $A$  อยู่ใน  $Q_1$   $w_0 = v_i$  และ  $w_k = v_j$  สำหรับ  $0 \leq i \leq j \leq n$  และไม่มีจุดใดใน  $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$  ซึ่งอยู่ในวิถี  $P$  อย่างไรก็ตามเพราะว่า  $P$  เป็นวิถีสำคัญที่สุดแสดงว่า  $P$  เป็นวิถี  $O = v_1, \dots, v_i = w_0, w_1, w_2, \dots, w_k = v_j, v_{j+1}, \dots, v_n = E$  ซึ่งยาวที่สุดและเท่ากับ  $t$  ดังนั้น งาน  $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$  (รวมทั้ง  $A$ ) ของ  $Q$  ดำเนินไปในขณะที่กำลังดำเนินงาน  $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$  ใน  $P$  และเพราะว่า  $A$  เป็นจุดใด ๆ ดังนั้น งานทั้งหมดทำได้เสร็จสิ้นในเวลา  $t$



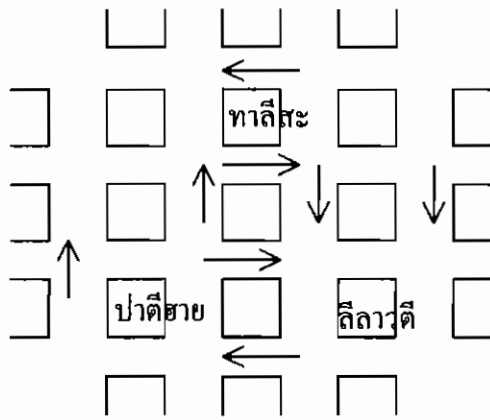
## แบบฝึกหัด

1. จากกราฟระบุทิศทางที่กำหนดให้



ให้หาจำนวน

- 1.1 ประชากรขอนแก่นย้ายเข้ากรุงเทพมหานคร
  - 1.2 ประชากรที่ย้ายจากภูเก็ตเข้ากรุงเทพมหานคร และขอนแก่น
  - 1.3 ประชากรจำนวน 14 % จากกรุงเทพมหานครย้ายไปจังหวัดใด
2. พี่น้องสามคน คือ บุชบา ราตรี และสีไพร ต้องโทรศัพท์ถึงแสงดาวผู้เป็นแม่ ส่วนแสงดาวจะโทรศัพท์ถึงราตรี และไม่โทรศัพท์ถึงลูกสาวอีกสองคน ส่วนสีไพรจะไม่โทรศัพท์ถึงราตรี ในขณะที่ราตรีเป็นฝ่ายโทรศัพท์ถึงสีไพร บุชบาและสีไพรต่างโทรศัพท์ถึงกันและกัน เช่นเดียวกับที่บุชบาและราตรีต่างโทรศัพท์ถึงกันและกัน ให้สร้างกราฟระบุทิศทางที่จำลองสถานการณ์การโทรศัพท์ระหว่างบุคคลทั้งสี่
3. ตามแผนผังข้างล่างนี้ แสดงที่ตั้งของสถาบันศิลป์ 3 แห่ง คือ ทาลีสะ ปาติฮาย และลีลาวดี ซึ่งอยู่ในเขตรถเดินทางเดียว ถ้าบุรุษไปรษณีย์ต้องการจะขับรถไปส่งพัสดุยังสถาบันศิลป์ทั้ง 3 แห่ง โดยให้ผ่านตึกเป็นจำนวนน้อยที่สุด (ระยะทางต่ำสุด) บุรุษไปรษณีย์ควรจะใช้เส้นทางใด



และถ้าบุรุษไปรษณีย์เริ่มต้นจากสถาบันศิลป์แห่งใดแห่งหนึ่ง เช่น ทาลีสะ จะมีเส้นทางส่งพัสดุที่สามารถส่งพัสดุไปยังสถาบันศิลป์อีก 2 แห่ง แล้วกลับมายังทาลีสะได้หรือไม่ และถ้ามี วงจรที่เริ่มต้นจากทาลีสะนี้มีเพียงวงจรถัดเดียว หรือมีมากกว่า 1 วงจร

4. สายการบิน ฟ้ายี่คราม มีเที่ยวบินประจำวัน 9 แห่ง ระหว่างสถานที่ต่าง ๆ คือ

103	จาก A	ถึง H	106	จาก H	ถึง A
201	จาก B	ถึง C	203	จาก B	ถึง D
204	จาก D	ถึง B	301	จาก D	ถึง R
305	จาก C	ถึง M	308	จาก H	ถึง B
401	จาก R	ถึง C			

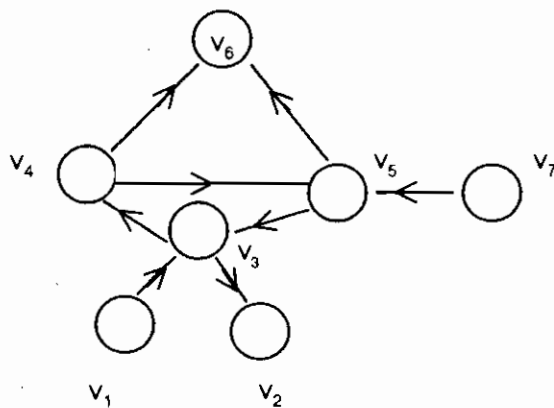
ให้เขียนกราฟระบุทิศทางแสดงเที่ยวบินดังกล่าว

5. ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งวางแผนส่งเสริมการขาย ด้วยการลดราคา ในวันที่ 4 พฤษภาคม (เริ่มจริง 2 พฤษภาคม) ซึ่งตามแผนการจะต้องลงโฆษณา 8 หน้า และต้องให้เสร็จล่วงหน้า 10 วัน ก่อนถึงวันที่ 2 พฤษภาคม วันนี้ตรงกับวันที่ 2 มิถุนายน มีเวลาเหลือเพียง 30 วัน สำหรับงานทั้งหมดและเวลาที่ประเมินได้มีดังนี้

งาน	เวลาที่ใช้ (วัน)	งานที่ต้อง ทำก่อน
1. ฝ่ายจัดการ เลือกสินค้า	3	-
2. ฝ่ายจัดซื้อ เลือกสินค้า	2	-
3. เลือกและกำหนดราคาสินค้าเพื่อลงโฆษณา	2	1,2
4. จัดเตรียมงานศิลป์	4	3
5. จัดเตรียมคำอธิบาย สินค้า	3	3
6. ออกแบบโฆษณาสินค้า	2	4,5
7. รวบรวมรายชื่อสินค้า	3	3
8. พิมพ์รายชื่อสินค้า	1	7
9. พร้อมโฆษณา	5	6
10. ใส่รายชื่อ	2	8,9
11. ส่งไปโฆษณาแจกตามบ้าน	10	10

จะเห็นได้ว่างานทั้งหมดใช้เวลารวมทั้งสิ้น 37 วัน แต่ห้างมีเวลาเหลือเพียง 30 วัน ให้ใช้วิธีการตรวจสอบและประเมินว่าห้างสรรพสินค้าจะสามารถจัดทำโฆษณาได้เสร็จสิ้นทันเวลาตามแผนส่งเสริมการขายหรือไม่

6. จากกราฟ D



ให้หาว่ามีวิถีต่อไปนี้ในกราฟ D หรือไม่

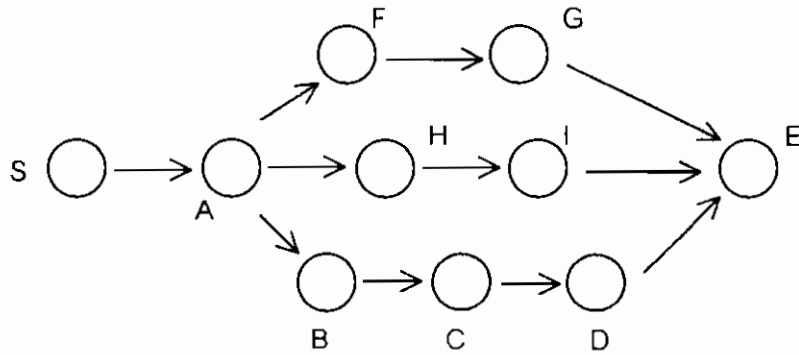
6.1 วิถี  $v_7 - v_1$

6.2 วิถี  $v_7 - v_6$

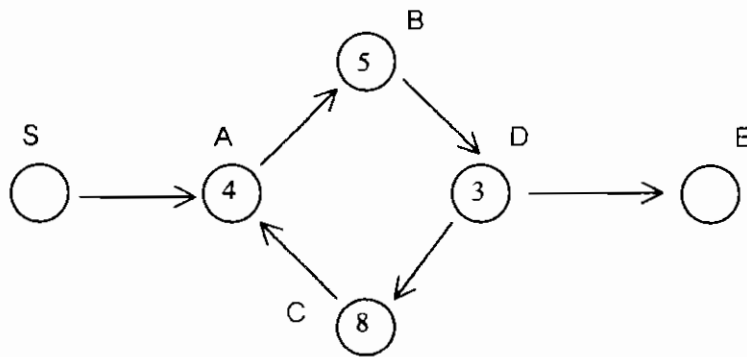
6.3 วิถี  $v_1 - v_6$

6.4 วิถี  $v_4 - v_2$

7. ให้ใส่ตัวเลขตามใจชอบแสดงเวลาในแต่ละจุดของกราฟที่กำหนดให้ แล้วหาวิถีสำคัญของกราฟ

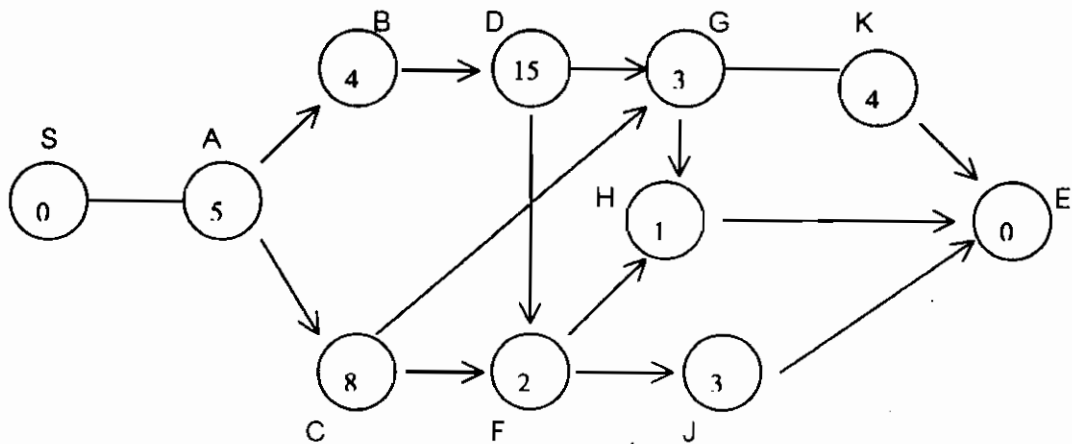


8. ให้อธิบายว่ากราฟระบุทิศทางต่อไปนี้ใช้ประเมินโครงการได้หรือไม่เพราะเหตุใด





9. แผนงานสร้างของเล่นสำหรับเด็กกำหนดได้ด้วยกราฟ D ดังนี้



ให้นำวิถีสำคัญของกราฟ

10. ไพรินทร์ สุวรรณภา จิรพัช และนันทรัตน์ พักรวมกันในอาคารชุด PARADISE DESIRE เนื่องจากในวันที่ 1 มีนาคม เป็นวันครบรอบวันเกิดของจิรพัช เพื่อนทั้ง 3 คน จึงวางแผนจัดงานสังสรรค์วันเกิดให้จิรพัช ในวันที่ 1 มีนาคม เวลา 19.00 น. กิจกรรมที่ต้องทำมีดังนี้

1.	ปูผ้าคลุมโต๊ะ
2.	จัดดอกไม้ใส่แจกันวางบนโต๊ะ
3.	จัดวางจานและช้อนส้อมบนโต๊ะ
4.	จัดเตรียมน้ำดื่ม และน้ำแข็ง
5.	จัดวางขวดไวน์ และถ้วยแก้วดื่มไวน์บนโต๊ะ
6.	จัดเตรียมเครื่องเสียงพร้อม KARAOKE
7.	สั่งอาหารให้มาส่งในงานเลี้ยง
8.	ติดต่อชวนเพื่อนต่างห้องพักอีก 4 คน มาร่วมงาน

ให้กำหนดเวลาที่ต้องใช้ในแต่ละงาน ลำดับงานก่อนหลัง แล้วสร้างกราฟพระนฤทศทาง พร้อมทั้งหาวิธีสำคัญของกราฟ

11. บริษัทธุรกิจขนาดใหญ่ต้องการจัดสถานที่พักผ่อนหย่อนใจในอวกาศด้วยการลงทุนมหาศาลเพื่อการท่องเที่ยวในอนาคต เพื่อให้การจัดสร้างเสร็จสิ้นทันกำหนดเวลา ให้ใช้วิธีการตรวจสอบประเมินผลในโครงการและหาวิธีสำคัญของงานต่าง ๆ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

	งาน	เวลาที่ใช้ (เดือน)
1.	ฝึกแรงงานก่อสร้าง	6
2.	สร้างผนังด้านนอกของสถานที่	8
3.	สร้างระบบช่วยชีวิต	14
4.	รับสมัครผู้เข้าพักในสถานที่	12
5.	ติดตั้งผนังสถานที่	10
6.	ฝึกหัดผู้สมัครเข้าพักในสถานที่	10
7.	ติดตั้งระบบช่วยชีวิต	4
8.	ติดตั้งระบบพลังงานแสงอาทิตย์	3
9.	ทดสอบระบบช่วยชีวิตและระบบพลังงาน	4
10.	นำผู้สมัครไปยังสถานที่พัก	4

ลำดับงานที่ต้องทำก่อนหลังมีดังนี้

งาน	งานที่ต้องเสร็จก่อน
1	-
2	-
3	-
4	-
5	1,2
6	2,3,4
7	1,2,3,5
8	1,2,5
9	1,2,3,5,7,8
10	1,2,3, .....9

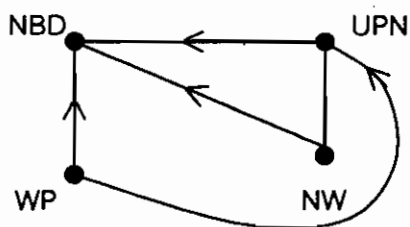
12. ในการแข่งขันฟุตบอลเยาวชนแห่งชาติมีผลการแข่งขันดังนี้

ทีม	A	B	A	D	D
ชนะทีม	R	C	C	A	E

ให้จำลองผลการแข่งขันด้วยกราฟระบุทิศทาง

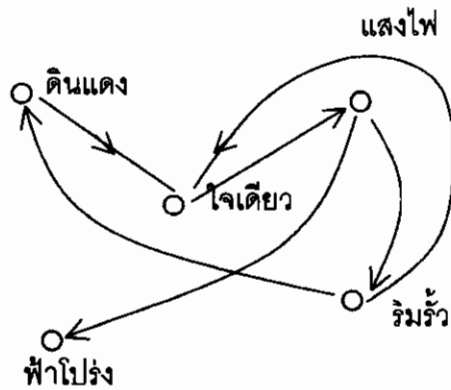
13. กระจ่ายและกวางในทวีปแอฟริกา เป็นสัตว์กินพืชผักเป็นอาหาร ส่วนสิงห์โต หมาใน เสือดาว และมนุษย์กินกระจ่ายและกวางเป็นอาหาร ให้จำลองสถานะการณ์ด้วยกราฟระบุทิศทาง

14. สำนักข่าว 4 แห่ง เสนอข่าวชนิดเดียวกันซึ่งแยกประเภทแล้ว โดยมีระบบการส่งข่าวสารระหว่างสำนักข่าวทั้ง 4 แห่ง ดังรูป



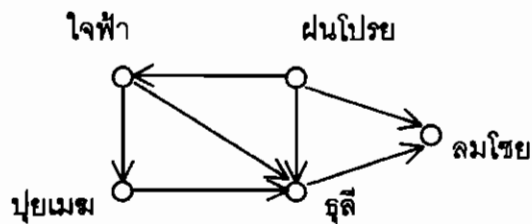
ให้หาสำนักข่าวซึ่งได้รับข่าวเป็นแห่งแรก

14. จากกราฟต่อไปนี้แสดงทิศทางการกระจายข่าวลือในกลุ่มบุคคล 5 คน



ให้อธิบายว่าบุคคลใดน่าจะเป็นผู้เริ่มกระจายข่าวลือ

16. ในหน่วยราชการแห่งหนึ่ง มีแบบฟอร์มของราชการซึ่งต้องมีผู้อนุมัติลงนาม จำนวน 5 คน ซึ่งใน 5 คนนี้ คนหนึ่งจะลงนามก็ต่อเมื่ออีกคนหนึ่งลงนามเรียบร้อยแล้ว สถานการณ์ดังกล่าวจำลองด้วยกราฟได้ดังนี้



เส้นระบุทิศทางจากผนโปรยไปยังใจฟ้า แสดงว่าผนโปรยต้องลงนามก่อนใจฟ้า จึงจะลงนาม เป็นต้น ถ้าผู้ติดต่อต้องถือแบบฟอร์มไปให้บุคคลทั้ง 5 ลงนามตามลำดับ ให้หาลำดับการติดต่อขออนุมัติตามแบบฟอร์ม

17. บริษัท BIOLINE ได้ออกแบบสอบถามเรื่องเกี่ยวกับการใช้สินค้าชนิดเดียวกัน 5 แบบ พบว่า ลำดับความชอบของลูกค้าแตกต่างกันตามแบบดังนี้

แบบ	A	B	C	D	E
ชอบมากกว่า	B	E	B	A	A
	C		D	B	
			E	E	

ให้จำลองสถานการณ์ด้วยกราฟระนาบทิศทาง แล้วเรียงลำดับสินค้าแบบที่มีลูกค้าชอบใช้มากที่สุดตามวิธีการแบบ 1 - 2 ขั้นตอน เพื่อให้เป็นข้อมูลในการผลิตสินค้าต่อไป