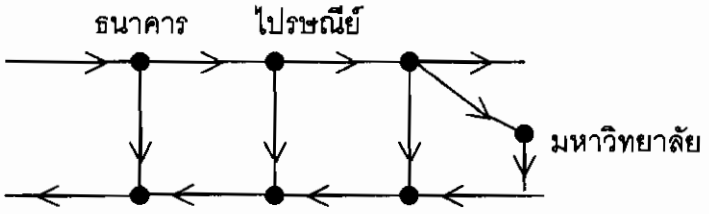
บทที่ 3
กราฟระบุทิศทาง (Directed Graphs)

3.1 นำเรื่อง

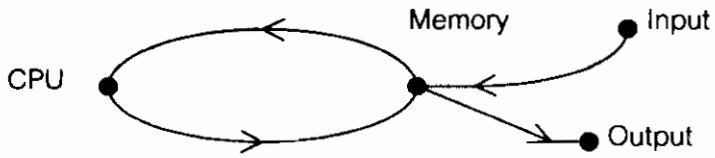
โดยทั่วไปเส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดของกราฟจะมีความสมมาตร นั่นคือเส้นเชื่อมมีลักษณะคล้ายการจราจรแบบสองทางแต่ในทางปฏิบัติมีบางกรณีเป็นแบบทางเดียว เช่น กรณีของการจราจรในถนนบางสายที่มีการเดินรถทางเดียว หรือกรณีของการส่งข้อมูลในคอมพิวเตอร์ขนาดเล็ก ซึ่งการส่งข้อมูลระหว่างหน่วย input กับหน่วย memory และการส่งข้อมูลระหว่างหน่วย memory กับหน่วย output เป็นแบบทางเดียว ในลักษณะเช่นนี้การใช้กราฟแบบเดิมเพื่ออธิบายสถานะการณ์ทำได้ไม่ครบถ้วน จึงจำเป็นต้องใช้กราฟที่สามารถบอกทิศทางได้ เรียกว่า **กราฟระบุทิศทาง**

ตัวอย่างที่ 1 กราฟระบุทิศทางแสดงการเดินรถทางเดียว



จะเห็นได้ว่าเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุด เป็นเส้นเชื่อมซึ่งระบุทิศทาง

ตัวอย่างที่ 2 กราฟระบุทิศทางแสดงการส่งข้อมูลในคอมพิวเตอร์ขนาดเล็ก

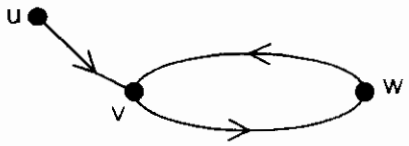


บทนิยาม 3.1

กราฟระบุทิศทางประกอบด้วย เซตของจุด V(D) กับ เซตของคู่อันดับ E(D) เป็นจำนวนนับได้ และเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุด เรียกว่าเส้นระบุทิศทาง

ตัวอย่างที่ 3

กราฟระบุทิศทาง D (ดังรูป)

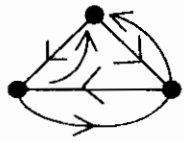


ประกอบด้วยเซตของจุดยอด V(D) = {u, v, w}

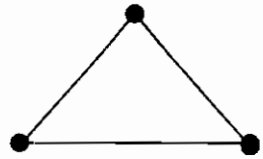
และเซตของคู่อันดับ E(D) = {(u,v), (v,w), (w,v)}

ข้อสังเกต

กราฟระบุทิศทางที่มีความสมมาตรคือกราฟ แต่มีความแตกต่างกันดังรูป



กราฟระบุทิศทาง
แบบสมมาตร



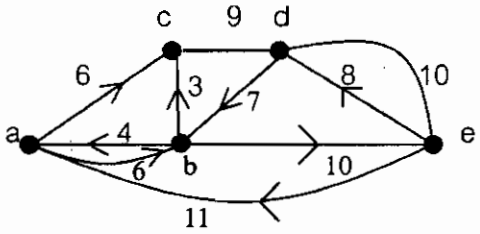
กราฟ

บทนิยาม 3.1.2

กราฟระบุทิศทาง D ซึ่งมีการกำหนดค่าจำนวนจริงบนเส้นเชื่อม e = (u,v) ทุกเส้น เรียกว่ากราฟน้ำหนัก (weighted graphs)

ตัวอย่างที่ 4

กราฟน้ำหนัก D = (V,E) แสดงเส้นทางและระยะเวลาที่ใช้ในการเดินทางระหว่างเมืองต่าง ๆ



ข้อสังเกต

1. เส้นระบุทิศทาง e = (u,v) อาจจะใช้แทน
   ก) ระยะทางจากจุดยอด u ไปยังจุดยอด v หรือ
   ข) ระยะเวลาจากจุดยอด u ไปยังจุดยอด v หรือ
   ค) ค่าใช้จ่ายในการเดินทางจากจุดยอด u ไปยังจุดยอด v เป็นต้น
2. น้ำหนักของเส้น (u,v) กับ (v,u) อาจจะไม่เท่ากัน เช่น ในตัวอย่างที่ 4 นี้ น้ำหนักของเส้นจาก a ไป b ไม่เท่ากับน้ำหนักของเส้นจาก b ไป a
3. สัญลักษณ์ของน้ำหนักของเส้นใช้ w (u,v) เช่น w(a,b) = 6
4. ถ้าไม่มีเส้นเชื่อมระหว่าง u กับ v ใช้สัญลักษณ์ w (u,v) = ∞ เช่น w(e,a) = 11 แต่ w(a,e) = ∞

3.2 อันดับและขนาด

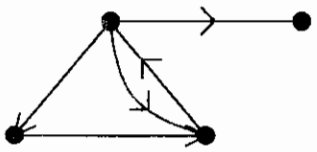
บทนิยาม 3.3.1

อันดับของกราฟระบุทิศทาง D คือจำนวนจุดยอดในกราฟ D

ตัวอย่างที่ 5

จากกราฟระบุทิศทาง D_1 ที่กำหนดให้

D_1 :



จะเห็นได้ชัดเจนว่า กราฟ D_1 มีอันดับที่ 4

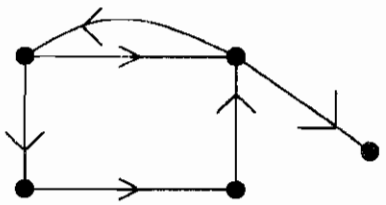
บทนิยาม 3.2.2

ขนาดของกราฟระบุทิศทาง D คือจำนวนเส้นเชื่อม ใน D

ตัวอย่างที่ 6

กราฟระบุทิศทาง D_2 ข้างล่างนี้

D_2



มีขนาดเท่ากับ 6

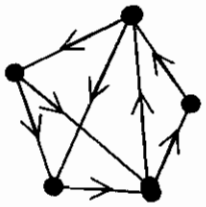
บทนิยาม 3.2.3

กราฟระบุทิศทางอันดับ p และขนาด q จะมีความสัมพันธ์ระหว่างอันดับกับขนาดในรูปอสมการ

$0 \leq q \leq p^2 - p$

ตัวอย่างที่ 7

กราฟระบุทิศทางข้างล่างนี้มีอันดับ 5 ขนาด 8



ดังนั้นตามบทนิยาม 4.1.5

$O < 8 < 20$

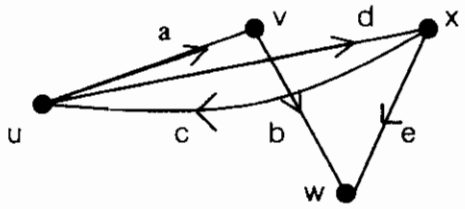
3.3 การประชิด

บทนิยาม 3.3.1

ถ้า a = (u,v) แทนเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด u กับ v ในกราฟระบุทิศทาง D จะเรียกว่า a โยงจุดยอด u กับ v หรือ u ประชิดถึง v (v ไม่ประชิดถึง u) ถ้า b=(v,w) จะเรียกว่าเส้นเชื่อม a ประชิดกับ b หรือ b ถูกประชิดจากเส้นเชื่อม a

ตัวอย่างที่ 8

จากกราฟระบุทิศทางที่กำหนดให้



จะเห็นได้ว่า

a = (u,v) u ประชิดกับ v

b = (v,w) v ประชิดกับ w

c = (x,u x ประชิดกับ u
d = (u,x) u ประชิดกับ x } x กับ u ประชิดกัน

e = (x,w) x ประชิดกับ w

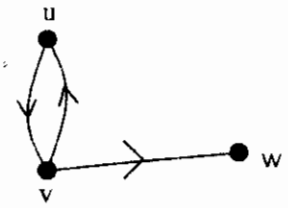
3.4 ระดับขั้น

บทนิยาม 3.4.1

ระดับขั้นออกจากจุดยอด v (out degree) หรือ odv ในกราฟระบุทิศทาง D คือ จำนวนเส้นเชื่อมที่ออกจาก v และระดับขั้นเข้าของจุดยอด v (in degree) หรือ idv คือจำนวนเส้นเชื่อมที่เข้ามาที่จุด v

ตัวอย่างที่ 9

จากกราฟระบุทิศทาง



จะเห็นได้ว่า

odv = 2

idv = idu = odu = 1

odw = 0

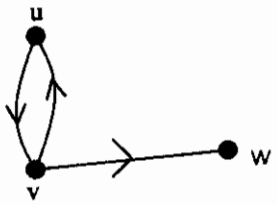
บทนิยาม 3.4.2

ในกราฟระบุทิศทาง D ระดับขั้นของจุดยอด v ใน D หรือ deg v เท่ากับผลบวกระหว่าง idv กับ odv นั่นเคือ

deg v = odv + idv

ตัวอย่างที่ 10

จากกราฟ



จะเห็นได้ว่า

deg u = 2

deg v = 3

deg w = 1

idv = idu = idw = odu = 1

odv = 2

เพราะฉะนั้น deg u + deg v + deg w = idv + idu + idw + odu + odv

$\therefore \quad 2 + 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$

ทฤษฎีบท 3.1

ในกราฟระบุทิศทาง D ซึ่งมีอันดับ p และขนาด q จะมีความสัมพันธ์

$$\sum_{i=1}^{p} \text{advi} = \sum_{i=1}^{p} \text{idv} = q$$

พิสูจน์

เพราะว่าจำนวนเส้นระบุทิศทางที่ออกจากจุดยอดใน D แต่ละเส้นจะถูกนับ 1 ครั้ง และจำนวนเส้นระบุทิศทางที่เข้าหาจุดยอดใน D แต่ละเส้นจะถูกนับ 1 ครั้ง ดังนั้นเมื่อรวมจำนวนเส้นระบุทิศทางจะได้

$$\sum_{i=1}^{p} adv_i = \sum_{i=1}^{p} idv_i$$

ซึ่งเท่ากับจำนวนเส้นระบุทิศทางของกราฟ D นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{p} adv_i = \sum_{i=1}^{p} idv_i = q$$

3.5 วิถี

แนวเดิน รอยเดิน และวิถีในกราฟระบุทิศทางมีแนวคิดเหมือนกับแนวเดิน รอยเดิน และวิถีในเรื่องกราฟ มีความแตกต่างที่มีทิศทางเป็นตัวกำกับด้วย

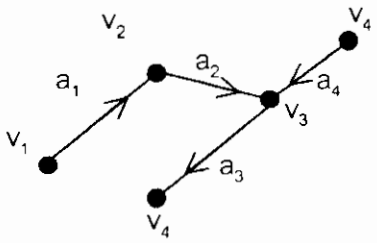
บทนิยาม 3.5.1

แนวเดินของกราฟระบุทิศทาง D คือ ลำดับของจุดยอดกับเส้นระบุทิศทาง v_1, a_1, v_2, a_2, ..., v_{n-1}, a_{n-1}, v_n

ซึ่งเส้น $a_i = (v_i, v_{i+1})$ $i = 1, 2, ..., n$

ตัวอย่างที่ 11

กราฟระบุทิศทาง D :



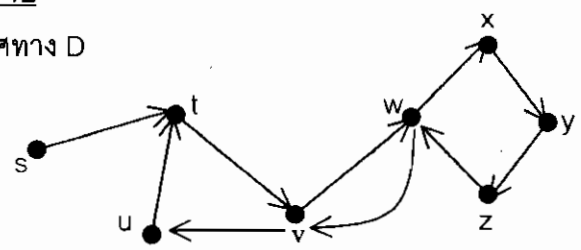
มีวิถี $v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_3, v_4$

บทนิยาม 3.5.2

รอยเดินจากจุดยอด u ถึง v ในกราฟระบุทิศทาง D คือ แนวเดินที่ไม่ซ้ำเส้นเชื่อม และถ้ารอยเดินไม่ซ้ำจุดยอดใน D เรียกรอยเดินนั้นว่าวิถี

ตัวอย่างที่ 12

กราฟระบุทิศทาง D



มีแนวเดิน s, t, v, u, t

รอยเดิน t, v, w, x, y, z

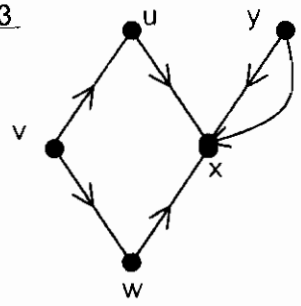
วิถี w, x, y, z

ส่วนรอยเดิน t, v, w, v, u ไม่เป็นวิถี เพราะซ้ำที่จุดยอด v

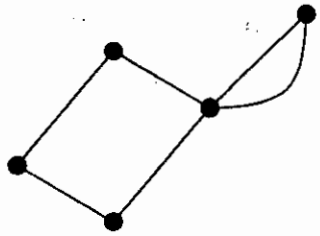
บทนิยาม 3.5.3

กำหนดให้ D เป็นกราฟระบุทิศทาง กราฟรองรับของ D คือกราฟที่ได้จากการแทนเส้นเชื่อมระบุทิศทาง ด้วยเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทาง

ตัวอย่างที่ 13



กราฟระบุทิศทาง D

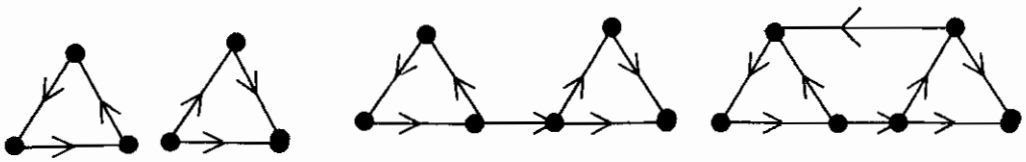


กราฟรองรับของ D

บทนิยาม 3.5.4

กราฟระบุทิศทาง D มีความเชื่อมโยง ถ้ากราฟรองรับของ D เป็นกราฟเชื่อมโยง และ D มีความเชื่อมโยงแบบเข้ม ถ้ามีวิถีจาก u ถึง v และมีวิถีจาก v ถึง u ใน D สำหรับจุดยอด u และจุดยอด v ใด ๆ ใน D

ตัวอย่างที่ 14



D1 ไม่เชื่อมโยง

D2 เชื่อมโยง

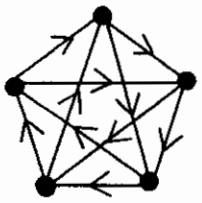
D3 เชื่อมโยงแบบเข้ม

บทนิยาม 3.5.5

กราฟ G เรียกว่าวางทิศทางได้ถ้า G เป็นกราฟรองรับของกราฟระบุทิศทาง D ซึ่งมีความเชื่อมโยงแบบเข้ม นั่นคือ สามารถกำหนดทิศทางให้กับเส้นเชื่อมของ G แล้วได้กราฟระบุทิศทางซึ่งมีความเชื่อมโยงแบบเข้ม

ตัวอย่างที่ 15

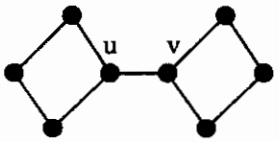
จะเห็นได้ว่าตามบทนิยาม กราฟสมบูรณ์ K_5 สามารถวางทิศทางและได้กราฟระบุทิศทางซึ่งมีความเชื่อมโยงแบบเข้ม



บทนิยาม 3.5.6

เส้นเชื่อมในกราฟเชื่อมโยง เรียกว่า **สะพาน** ถ้าเอาเส้นเชื่อมออกแล้วกราฟขาดความเชื่อมโยง

ตัวอย่างที่ 16



กราฟนี้จะขาดความเชื่อมโยงถ้าเอาเส้นเชื่อม uv ออก

ข้อสังเกต ไม่ว่าจะกำหนดทิศทางกราฟนี้อย่างไร จะไม่ได้กราฟระบุทิศทางแบบเข้ม เพราะการกำหนดทิศทางให้กับ uv จะทำได้เพียงแบบใดแบบหนึ่ง นั่นคือ เป็นกราฟแบบวางทิศทางไม่ได้ ซึ่งมีทฤษฎีกำหนดไว้ดังนี้ คือ

ทฤษฎีบท 3.2
กราฟเชื่อมโยง G เป็นแบบซึ่งวางทิศทางได้ ก็ต่อเมื่อ และต่อเมื่อ กราฟ G ไม่มีสะพาน

พิสูจน์ (โดยใช้ความขัดแย้ง)

⇨ ถ้ากำหนดทิศทางให้ G ได้ G ต้องไม่มีสะพาน

ให้ G เป็นกราฟซึ่งวางทิศทางได้ และให้ G มีสะพาน e = uv เพราะว่ากำหนดทิศทางใน G ได้ จึงให้แต่ละเส้นเชื่อมใน G มีทิศทางและจะได้กราฟระบุทิศทางที่เชื่อมโยงแบบเข้ม นั่นคือ G มีวิถีจาก u ถึง v และวิถีจาก v ถึง u

เนื่องจาก G มีสะพาน uv แสดงว่าใน D ต้องมีเส้น uv หรือ vu เพียงเส้นเดียว ดังนั้นถ้าให้ D มีเส้น uv แสดงว่า D มีวิถีจาก u ถึง v แต่ D ไม่มีวิถีจาก v ถึง u เพราะทุกวิถีจาก v ถึง u ต้องมีเส้น vu แต่มีไม่ได้เพราะ uv เป็นสะพาน ดังนั้นจะวางทิศทางใน G ไม่ได้แสดงว่า G ต้องไม่มีสะพาน

⇦ ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงและไม่มีสะพาน G จะต้องกำหนดทิศทางได้เพราะว่า G ไม่มีสะพาน ดังนั้นทุกเส้นเชื่อมใน G ต้องอยู่ในวงเวียน (ในสะพานไม่มีวงเวียน)

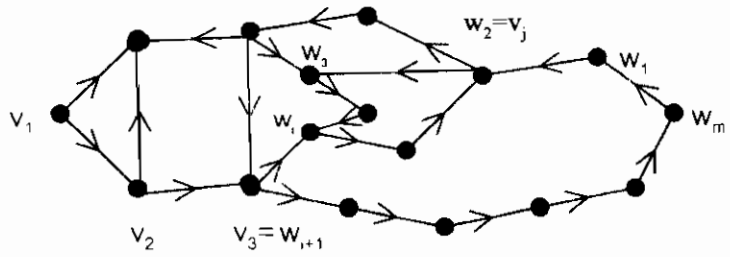
ให้ C เป็นวงเวียนของ G โดยที่วงเวียน C คือ $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n, v_1$ ให้เส้นเชื่อม v_nv_1 มีทิศทางจาก v_n ไป v_1 และเส้นเชื่อม $v_i v_{i+1}$ มีทิศทางจาก v_i ไป v_{i+1}, $i = 1,2,\ldots,n-1$

จะเห็นได้ว่าจุดในวงเวียน C ถ้าเป็นจุดประชิดกันแม้จะไม่เรียงลำดับก็สามารถกำหนดทิศทางระหว่างจุดเหล่านั้นได้ ดังนั้น ถ้าทุก ๆ จุดของ G อยู่ในวงเวียน C จะเห็นได้ทันทีว่าสามารถกำหนดทิศทางใน G ได้

ในกรณีที่บางจุดของ G ไม่อยู่ในวงเวียน C

เพราะว่า G มีความเชื่อมโยง แสดงว่าต้องมีจุดยอด w_1 ซึ่งไม่อยู่ใน C และ w_1v_j เป็นเส้นเชื่อมใน G, $1 \leq j \leq n$ เนื่องจาก w_1v_j ไม่เป็นสะพานใน G ดังนั้นต้องมีวงเวียน $C_1 : w_1, v_j = w_2, w_3, \ldots\ldots, w_m, w_1$ ใน G

ให้เส้นเชื่อม w_m, w_1 มีทิศทางจาก w_m, ไป w_1 เส้นเชื่อม $w_1 w_2$ มีทิศทางจาก w_1, ไป w_2 และเส้นเชื่อม w_i, w_{i+1}, $i = 2, 3, \ldots.. m - 1$ ที่ยังไม่มีทิศทาง ให้กำหนดทิศทางจาก w_i, w_{i+1} ดังนั้น เส้นเชื่อมซึ่งยังไม่มีทิศทางที่โยงจุดยอดต่าง ๆ ในวงเวียน C_1 จะได้รับการกำหนดทิศทาง

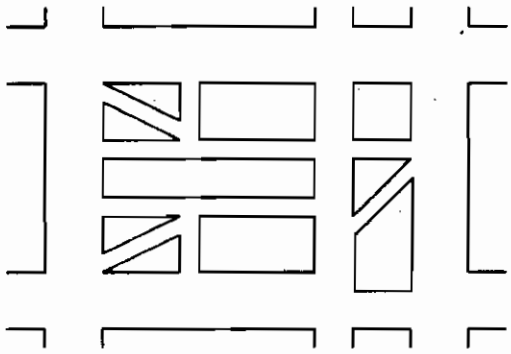


กราฟแสดงวิธีหนึ่งของการกำหนดทิศทาง

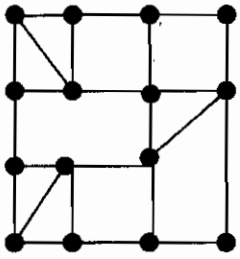
□ กราฟระบุทิศทาง D ซึ่งสร้างตามวิธีการนี้จะมีความเชื่อมโยงแบบเข้ม ถ้ากราฟ D รวมทุกจุดใน G ก็เป็นอันจบขั้นตอนตามวิธีการ แต่ถ้า D ยังไม่รวมทุกจุดใน G จะดำเนินการต่อไปจนทุกจุดใน G อยู่ในกราฟระบุทิศทาง D ซึ่งเชื่อมโยงแบบเข้ม

ตัวอย่างที่ 17

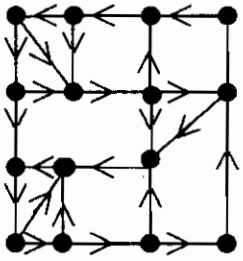
แสดงวิธีการจำลองแผนผังออกมาในรูปของกราฟ G และเพราะว่ากราฟ G ไม่มีสะพาน จึงทำให้ได้กราฟระบุทิศทาง D แบบเข้ม



แผนผังบริเวณการจราจร



กราฟเชื่อมโยง G



กราฟระบุทิศทาง D แบบเข้ม

โดยทั่วไปจะสังเกตเห็นได้ว่าถ้าการจราจรเป็นแบบสวนทางและไม่คับคั่งเมื่อจำเป็นต้องมีการซ่อมแซมหรือปรับปรุงถนน การจราจรจะมีลักษณะแบบรถวิ่งทางเดียว ดังนั้น ถ้าผู้รับผิดชอบเกี่ยวกับการจราจรประสงค์จะให้ผู้ขับขี่ยวดยานวิ่งจากทางแยกหนึ่งไปอีกทางแยกหนึ่งได้ในขณะที่มีการซ่อมแซมหรือปรับปรุง อาจจะใช้วิธีการกำหนดทิศทางการจราจรตามกราฟระบุทิศทาง โดยในขั้นแรกต้องจำลองแผนผังบริเวณการจราจรเป็นกราฟ G โดยให้จุดยอดแทนทางแยกและเส้นเชื่อมแทนถนนระหว่างทางแยก จากนั้นการที่ยวดยานจะเดินทางจากทางแยกหนึ่งไปทางแยกอื่นได้ หมายถึงว่ากราฟ G ที่ได้ต้องเป็นกราฟเชื่อมโยง และถ้ากราฟ G ไม่มีสะพาน หมายถึงว่า การซ่อมแซมหรือปรับปรุงถนนจะไม่เป็นอุปสรรคต่อการเดินทางจากทางแยกหนึ่งไปยังอีกทางแยกหนึ่ง อย่างไรก็ดีถ้าการจราจรคับคั่ง การที่จะเดินทางจากทางแยกหนึ่งไปอีกทางแยกหนึ่งอาจจะต้องเปลี่ยนระบบการ

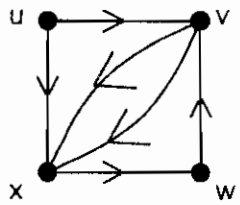
จราจรจากรถวิ่งสวนทางก็ขอได้ให้เป็นรถวิ่งทางเดียว โดยใช้กราฟระบุทิศทาง D ที่ได้จากกราฟเชื่อมโยง G

บทนิยาม 3.5.7

ถ้า D เป็นกราฟระบุทิศทางอันดับ n เมทริกซ์ประชิด M(D) คือ เมทริกซ์ n x n ซึ่งสมาชิก a_{ij} คือ จำนวนเส้นเชื่อมจากจุดยอด u ไปจุดยอด j

ตัวอย่างที่ 18

ถ้ากำหนดกราฟระบุทิศทาง D อันดับ 4 ขนาด 6 ดังนี้



เมทริกซ์ประชิด M(D) ขนาด 4 x 4 คือ

แถว \ หลัก	u	v	w	x
u	0	1	0	1
v	0	0	0	2
w	0	1	0	0
x	0	0	1	0

จำนวนในเมทริกซ์คือจำนวนของเส้นเชื่อมโยงจุดยอดในกราฟ D

เช่น จุดยอด u กับ v มีเส้นเชื่อมโยง 1 เส้น ดังนั้น "1" ปรากฏในแถว 1 หลัก 2

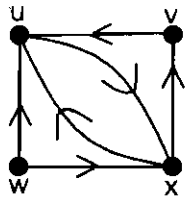
จุดยอด v กับ x มีเส้นเชื่อมโยง 2 เส้น ดังนั้น 2 ปรากฏในแถว 2 หลัก 4 เป็นต้น

Ψ Ψ Ψ Ψ Ψ Ψ Ψ Ψ

แบบฝึกหัด

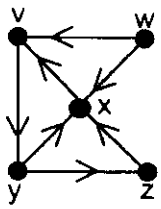
1. ให้หาจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟระบุทิศทาง ต่อไปนี้

1.1

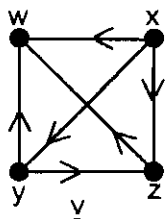


y

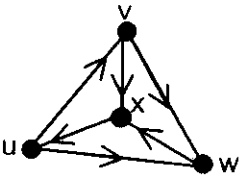
1.2



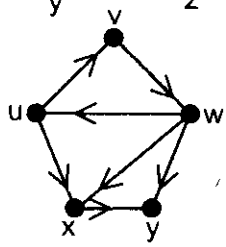
1.3



1.4



1.5



2. ให้สร้างกราฟระบุทิศทางจากเซตของจุดยอดและเซตของเส้นเชื่อมต่อไปนี้

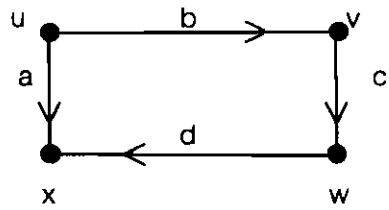
2.1 $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(D) = \{ v_1 v_2, v_1 v_3, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_1, v_4 v_2, v_5 v_3, v_5 v_4\}$

2.2 $V(D) = \{a, b, c, d, e, f\}$

$E(D) = \{ab, ac, ad, bc, bd, be, bf, ce, cf, de\}$

3. จากกราฟระบุทิศทางข้างล่างนี้ ให้อธิบายว่าข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกหรือผิด



3.1 u กับ x ประชิดกัน

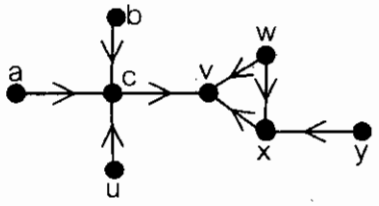
3.2 v กับ x ประชิดกัน

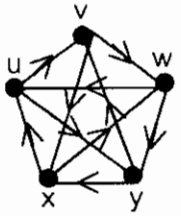
3.3 b เป็นเส้นเชื่อมโยงจาก x

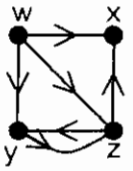
3.4 a เป็นเส้นเชื่อมโยงเข้าหา u

3.5 d เป็นเส้นเชื่อมโยงจาก x

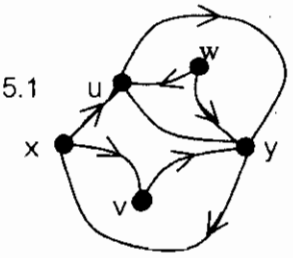
4. ให้หาระดับชั้นเข้า และระดับชั้นออก ของกราฟระบุทิศทางต่อไปนี้

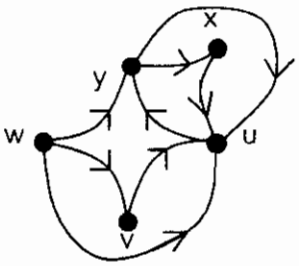
4.1 

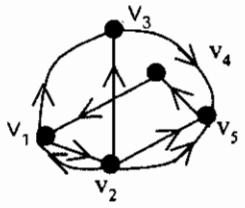
4.2 

4.3 

5. ให้หาเมทริกซ์ประชิดของกราฟระบุทิศทางต่อไปนี้

5.1 

5.2 

5.3 

6. ให้สร้างกราฟระบุทิศทางจากเมทริกซ์ประชิดต่อไปนี้

6.1
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

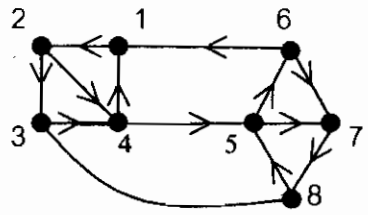
6.2
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. จากกราฟระบุทิศทางที่เป็นผลลัพธ์ในข้อ 6 จงแสดงให้เห็นว่า

7.1 ผลบวกของจำนวนในแถวใด ๆ ของเมทริกซ์ประชิดเท่ากับจำนวนระดับชั้นออกของจุดยอดที่สมนัยกับแถวนั้น

7.2 ผลบวกของจำนวนในหลักใด ๆ ของเมทริกซ์ประชิดเท่ากับจำนวนระดับชั้นเข้าของจุดยอดที่สมนัยกับหลักนั้น

8. จากกราฟระบุทิศทางที่กำหนดให้



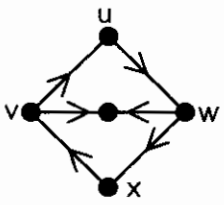
8.1 ให้หาวิถีความยาว 5 ความยาว 6 และความยาว 7 จากจุดยอด 1 ถึง 8

8.2 ให้หาวิถีความยาว 3 และความยาว 5 จากจุดยอด 8 ถึง 1

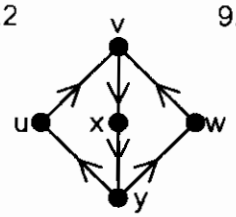
8.3 ให้หาวิถีปิดความยาว 8 ที่รวมจุดยอด 1 และ 8

9. จงอธิบายให้เห็นว่ากราฟระบุทิศทางต่อไปนี้ กราฟใดบ้างที่ขาดความเชื่อมโยงหรือมีความเชื่อมโยงแต่ไม่เป็นแบบเข้ม หรือมีความเชื่อมโยงและเป็นแบบเข้ม

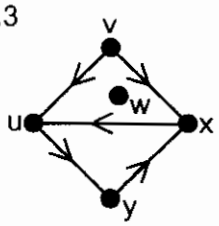
9.1



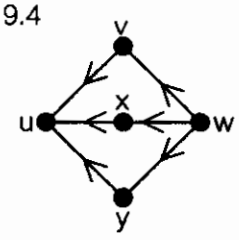
9.2



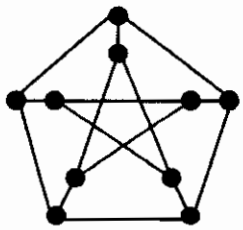
9.3



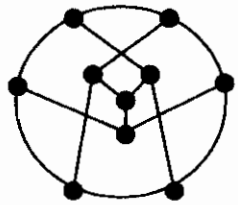
9.4



10. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟแบบปีเตอร์เสน



หรือ

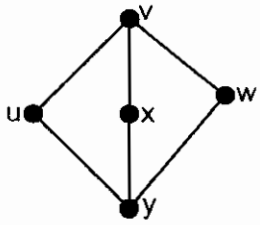


สามารถวางทิศทางได้ และกราฟระบุทิศทางที่ได้จากการวางทิศทางเป็นกราฟเชื่อมโยงแบบเข้ม

11. ถ้า M เป็นเมทริกซ์ของกราฟระบุทิศทาง D จงพิสูจน์ให้เห็นว่า สมาชิก ij ของเมทริกซ์ M^n จะบอกจำนวนวิถีของความยาว n จากจุดยอด u_i ถึง u_j

(<u>ข้อแนะนำ</u> ให้ใช้คณิตศาสตร์อุปนัยที่ความยาว n)

12. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟ G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

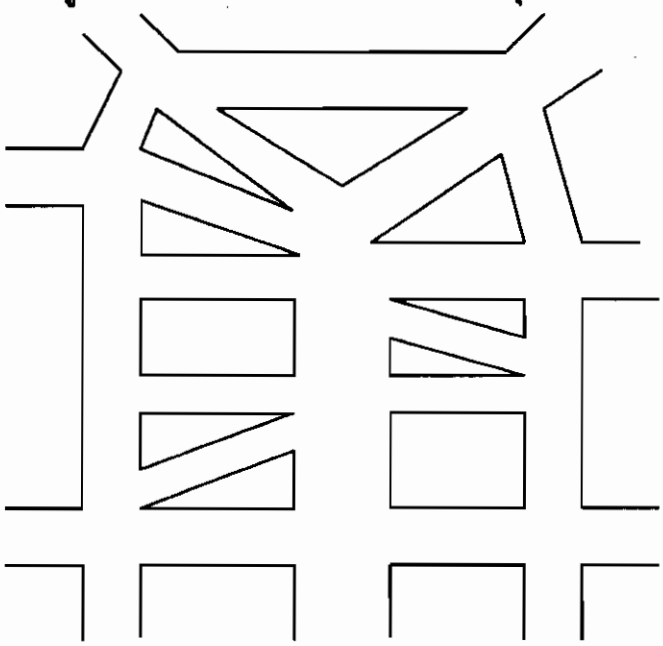


12.1 เป็นกราฟที่วางทิศทางได้

12.2 ให้วางทิศทางของกราฟ G เพื่อให้ได้กราฟระบุทิศทาง D ซึ่งเชื่อมโยงแบบเข้ม

13. ให้อธิบายว่ากราฟซึ่งมีจุดตัดจะสามารถกำหนดทิศทางได้หรือไม่

14. จากแผนที่ตามรูป จงจำลองด้วยกราฟ G และกราฟระบุทิศทาง D



15. ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงซึ่งมีอันดับอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ 3 และ G ไม่มีสะพาน จงแสดงให้เห็นว่า

15.1 สามารถวางทิศทางให้กราฟ G ได้

15.2 กราฟ D ที่ได้มีความเชื่อมโยงแบบไม่เข้ม