

บทที่ 2 กราฟแบบต่าง ๆ

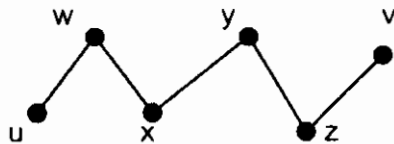
2.1 บทนิยาม

ทฤษฎีกราฟได้รับการนำไปประยุกต์ในหลายด้านและส่วนมากเกี่ยวข้องกับการเริ่มจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง เช่น ให้หาระยะทางซึ่งสั้นที่สุดในการเดินทางจากสถานที่หนึ่งไปยังอีกสถานที่หนึ่ง ให้กระแสไฟฟ้าระหว่างจุดสองจุดหรือให้หาเวลาซึ่งสั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุด เพื่อให้มีความชัดเจนเกี่ยวกับแนวความคิดดังกล่าว จำเป็นต้องมีบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1.1

แนวเดินในกราฟ G ระหว่างจุดยอด u กับจุดยอด v คือลำดับของจุดและเส้นใน G ที่สลับกัน โดยเริ่มต้นที่จุดยอด u และสิ้นสุดที่จุดยอด v

ตัวอย่างที่ 1 แนวเดิน $u, uw, w, wx, x, xy, y, yz, z, zv, v$



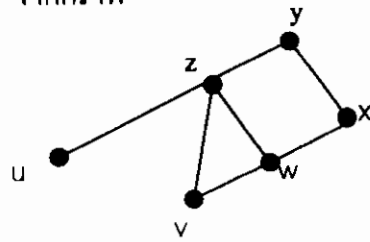
เรียกว่าแนวเดินระหว่างจุดยอด u กับจุดยอด v ในการเขียนแนวเดินอาจใช้เฉพาะจุดได้ เช่น แนวเดินระหว่างจุดยอด u กับจุดยอด v เขียนเฉพาะจุดได้ คือ

u, w, x, y, z, v

บทนิยาม 2.1.2

ความยาวของแนวเดินระหว่างจุดยอดสองจุด คือ จำนวนเส้นระหว่างจุดยอดทั้งสองนั้น

ตัวอย่างที่ 2 จากกราฟ



จะเห็นว่าแนวเดิน u, z, v, w, z, y, x มีความยาวเท่ากับ 6 ถ้าให้ $n =$ ความยาวของแนวเดินทางเดิน $v, w, x, y, z, w, v, z, u$ มีความยาว $n = 8$ ถ้า $n = 0$ แสดงว่าไม่มีแนวเดิน

2.2 รอยเดิน

บทนิยาม 2.2.1

รอยเดินระหว่างจุดยอดสองจุด คือ แนวเดินระหว่างจุดยอดทั้งสอง ซึ่งไม่ซ้ำเส้นเชื่อม

ตัวอย่างที่ 3 จากกราฟในตัวอย่างที่ 2 แนวเดิน u, z, v, w, x, y เป็นรอยเดินจาก u ถึง y แต่แนวเดิน u, z, v, w, x, w, z ไม่เป็นรอยเดินจาก u ถึง z เพราะซ้ำที่เส้นเชื่อม wx

2.3 วิถี

บทนิยาม 2.3.1

วิถีระหว่างจุดยอดสองจุดคือแนวเดินระหว่างจุดทั้งสองซึ่งไม่ซ้ำจุด

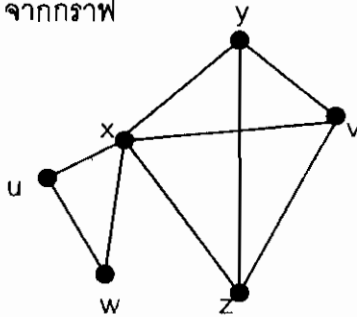
ตัวอย่างที่ 4 จากกราฟในตัวอย่างที่ 2 แนวเดิน u, z, v, w, x, y เป็นวิถีจาก u ถึง y แต่แนวเดิน u, z, v, w, x, w ไม่เป็นวิถีเพราะซ้ำที่จุดยอด w

2.4 วงจร

บทนิยาม 2.4.1

รอยเดินจากจุด u ถึง v ซึ่ง $u = v$ และมีเส้นเชื่อมอย่างน้อยที่สุด 3 เส้น เรียกว่า **วงจร**

ตัวอย่างที่ 5 จากกราฟ



จะเห็นว่ารอยเดิน x, z, v, y, x เป็นวงจร หรือ รอยเดิน v, z, y, x, u, w, x, v เป็นวงจร

2.5 วงเวียน

บทนิยาม 2.5.1

วงเวียน คือ วงจรซึ่งไม่ซ้ำจุด

ตัวอย่างที่ 6 ตามกราฟในตัวอย่างที่ 5

รอยเดิน x, z, v, y, x เป็นวงเวียน

แต่รอยเดิน v, z, y, x, u, w, x, v ไม่เป็นวงเวียน

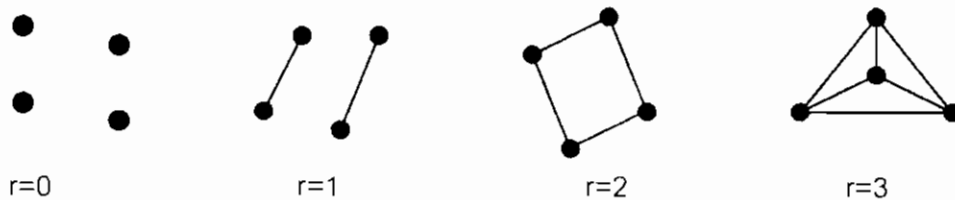
2.5 กราฟแบบต่าง ๆ (Types of Graphs)

ต่อไปนี้เป็นกราฟแบบต่าง ๆ ที่สำคัญซึ่งพบทั้งในแบบทั่วไปและประยุกต์

บทนิยาม 2.6.1

กราฟ G เรียกว่า กราฟปกติดีกรี r ถ้าทุกจุดยอดใน G มีดีกรีเท่ากับ r

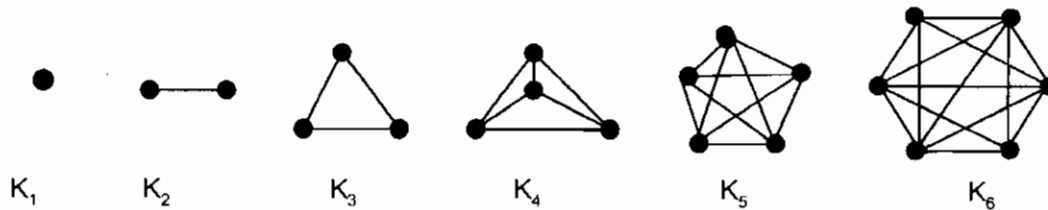
ตัวอย่างที่ 7 กราฟต่อไปนี้เป็นกราฟปกติอันดับ 4 ซึ่งมีดีกรี r ต่าง ๆ กัน



บทนิยาม 2.6.2

กราฟ G เรียกว่า เป็นกราฟสมบูรณ์ ถ้าจุดยอดทุก ๆ 2 จุดใน G เป็นจุดประชิด กราฟสมบูรณ์ ซึ่งมีจุดยอด n จุดจะใช้ สัญลักษณ์ K_n

ตัวอย่างที่ 8 กราฟสมบูรณ์อันดับต่าง ๆ

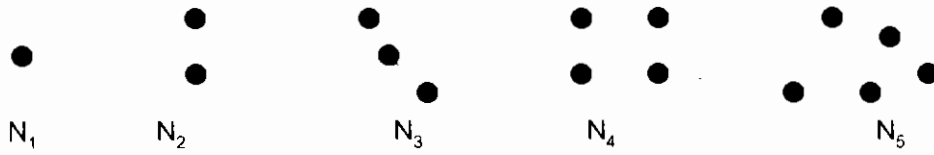


จะเห็นได้ว่ากราฟสมบูรณ์ K_n คือกราฟปกติดีกรี $n-1$ และเมื่อใช้ผลลัพธ์ข้อ 8 ของทฤษฎีบทความสัมพันธ์ระหว่างดีกรีจุดยอดกับเส้นเชื่อมจะได้ว่า กราฟ K_n มีจำนวนเส้นเชื่อม $\frac{n(n-1)}{2}$ เส้น

บทนิยาม 2.6.3

กราฟซัด (trivial graph) คือ กราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อม กราฟซัดอันดับ n ใช้สัญลักษณ์ N_n

ตัวอย่างที่ 9 กราฟในตัวอย่างต่อไปนี้เป็นกราฟซัดอันดับ 1 ถึง 5



ข้อสังเกต กราฟซัดเป็นกราฟปกติระดับขั้นศูนย์

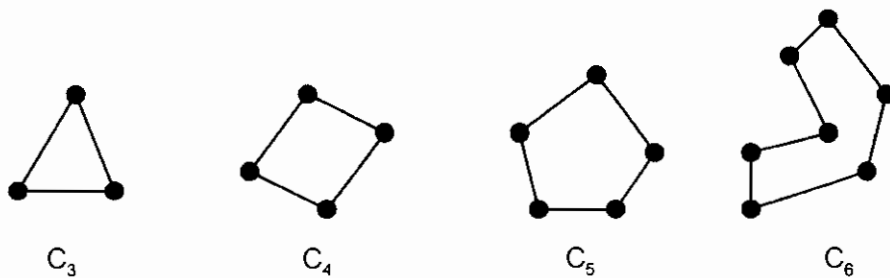
บทนิยาม 2.6.4

กราฟศูนย์ (empty graph) คือ กราฟที่ไม่มีจุดยอดและไม่มีเส้นเชื่อม

บทนิยาม 2.2.5

กราฟวงเวียน คือ กราฟที่มีวงเวียนเพียง 1 วงเวียน กราฟวงเวียนอันดับ n ใช้สัญลักษณ์ C_n

ตัวอย่างที่ 10 กราฟในตัวอย่างต่อไปนี้เป็นกราฟวงเวียนอันดับ 3 ถึง 6

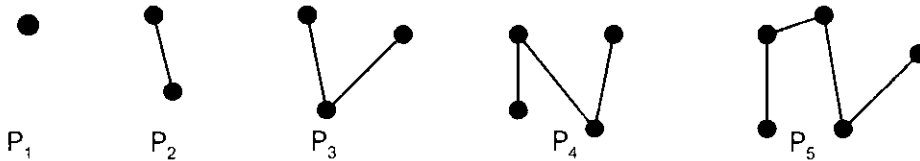


บทนิยาม 2.6.6

กราฟวิถี คือ กราฟที่มีวิถีเพียง 1 วิถี กราฟวิถีอันดับ n ใช้สัญลักษณ์ P_n

ตัวอย่างที่ 11

กราฟในตัวอย่างต่อไปนี้เป็นกราฟวิถีอันดับ 1 ถึง 5



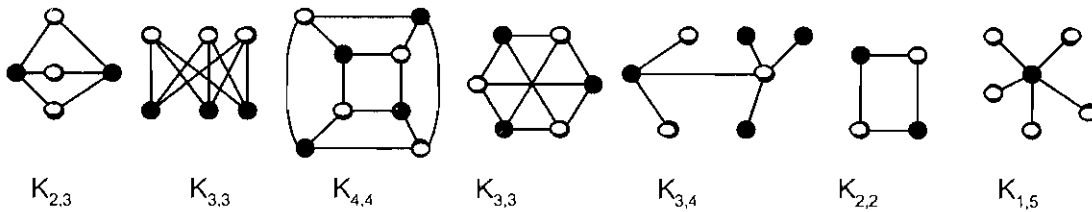
ข้อสังเกต กราฟวิถี P_n มีเส้นเชื่อม $n - 1$ เส้น และจะได้จากกราฟ C_n เมื่อลบเส้นเชื่อมออก 1 เส้น

บทนิยาม 2.6.7

กราฟสองส่วน (bipartite graph) คือ กราฟที่จุดยอด สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 เซต โดยที่จุดยอดในเซตเดียวกันไม่มีเส้นเชื่อม แต่มีเส้นเชื่อมกับจุดยอดที่อยู่ต่างเซตกัน ใช้สัญลักษณ์ $K_{m,n}$

ตัวอย่างที่ 12

กราฟต่อไปนี้เป็นกราฟสองส่วน



แสดงให้เห็นจุดยอดที่ต่างเซตกันด้วยจุดโปร่ง และจุดทึบ

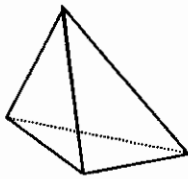
ข้อสังเกต

จะเห็นได้ว่า $K_{m,n}$ มีจุดยอดจำนวน $m + n$ จุด (จุดยอด m จุดซึ่งมีดีกรี และจุดยอด n จุดซึ่งมีดีกรี m)

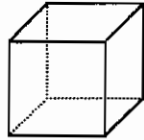
บทนิยาม 2.6.8

กราฟแบบเพลโต (Platonic graph) คือ กราฟที่กำหนดจุดยอดและเส้นเชื่อมแทนจุดและเส้นของรูปทรงตันแบบเพลโต

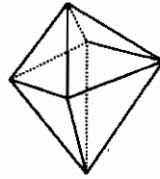
รูปทรงตันแบบเพลโตมี 5 แบบ คือ



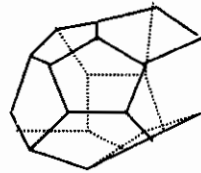
ทรง 4 หน้า



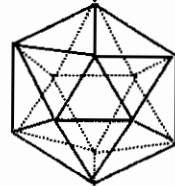
ลูกบาศก์



ทรง 8 หน้า

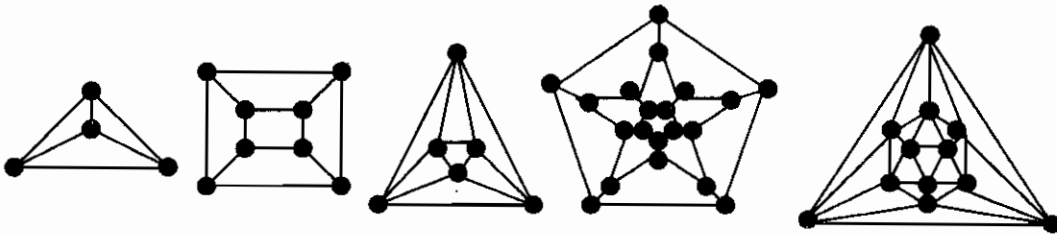


ทรง 12 หน้า



ทรง 20 หน้า

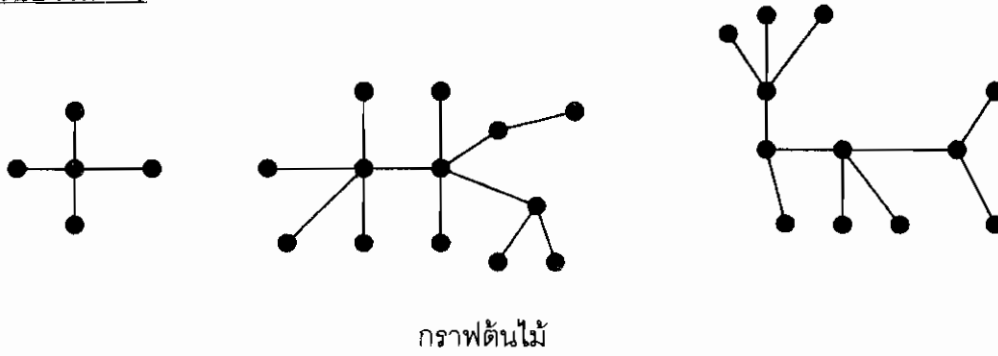
เมื่อกำหนดให้จุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟแทนจุดและเส้นของรูปทรงตัน จะได้กราฟแบบเพลโตทั้ง 5 แบบ ดังนี้



บทนิยาม 2.6.9

กราฟต้นไม้ (tree) คือ กราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวงเวียน

ตัวอย่างที่ 13

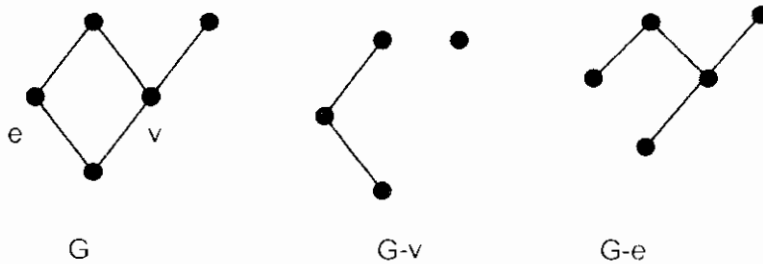


บทนิยาม 2.6.10

กราฟย่อย คือ กราฟซึ่งเกิดจากเซตย่อยของจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟใหญ่ ดังนั้น ถ้า H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G จะได้ $V(H) \leq V(G)$ และ $E(H) \leq E(G)$

กราฟย่อยแบบง่ายที่สุด คือ กราฟย่อยซึ่งได้จากการลบจุดยอดหรือเส้นเชื่อมออกจากกราฟ เช่น ถ้า v เป็นจุดยอดในกราฟ G และ ขนาดของกราฟ G มากกว่า หรือเท่ากับ 2 จุด แล้ว $G - v$ คือ กราฟย่อยของ G ซึ่งมีเซตของจุดเป็น $V(G) - \{v\}$ และเซตของเส้นเชื่อมคือเซตของเส้นเชื่อมในกราฟ G ทั้งหมดยกเว้นเส้นที่โยงกับจุด v ในทำนองเดียวกัน ถ้า e เป็นเส้นในกราฟ G กราฟ $G - e$ คือ กราฟย่อยที่มีเซตของจุดเป็น $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อมเป็น $E(G) - \{e\}$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

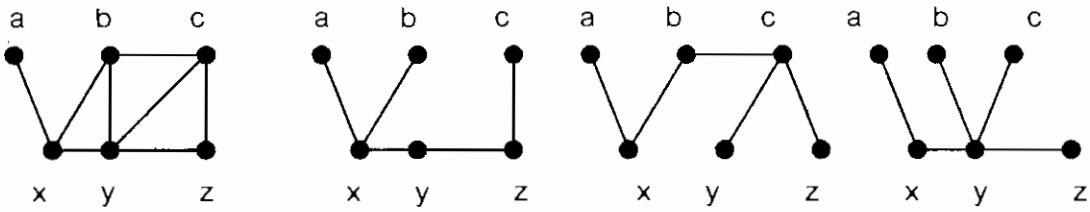
ตัวอย่างที่ 14



บทนิยาม 2.6.11

กราฟต้นไม้แบบทอดข้าม (spanning tree) คือ กราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง G ซึ่งรวมจุดยอดทุกจุดใน G และไม่มีวงเวียน

ตัวอย่างที่ 15

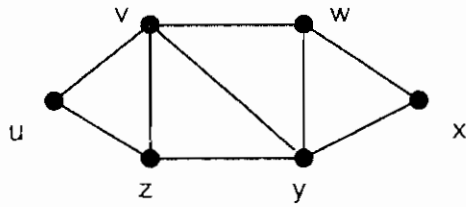


กราฟต้นไม้แบบต่าง ๆ



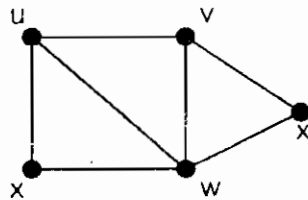
แบบฝึกหัด

1. จากกราฟ



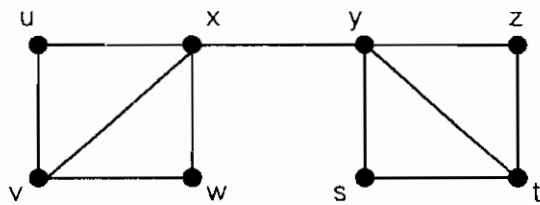
- 1.1 $xyzvy$ เป็น..... ซึ่งมีความยาวหน่วย จากจุดยอด ถึงจุดยอด.....
- 1.2 $vuzvw$ เป็น..... ซึ่งมีความยาวหน่วย จากจุดยอด ถึงจุดยอด.....
- 1.3 $vywxvy$ เป็น..... ซึ่งมีความยาวหน่วย จากจุดยอด ถึงจุดยอด.....
- 1.4 $uvwxyzu$ เป็น..... ซึ่งมีความยาวหน่วย จากจุดยอด ถึงจุดยอด.....

2. จากกราฟ



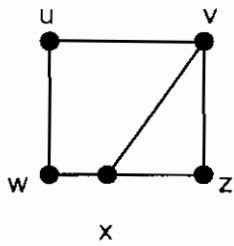
- 2.1 ให้หาทางเดินความยาว 6 หน่วย จาก u ถึง x
- 2.2 ให้หาวงจรซึ่งมีความยาว 5 หน่วย และ 6 หน่วย
- 2.3 ให้หาวงเวียนซึ่งมีความยาว 3 หน่วย 4 หน่วย และ 5 หน่วย
- 2.4 ให้หาวิถีซึ่งมีความยาวสูงสุด

3. จากกราฟ



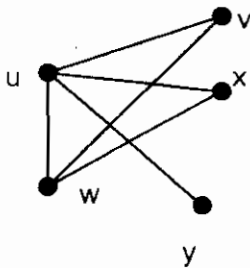
ให้หาวิถีทั้งหลายระหว่างจุดยอด u กับจุดยอด z

4. จากกราฟ



ให้หาวิถีทั้งหมดจาก u ถึง y

5. จากกราฟ G ที่กำหนดให้



ให้หา

5.1 รอยเดิน

5.2 วงเวียน

5.3 วิถีเปิด และวิถีปิด ที่ไม่ใช่วงเวียน

6. ให้เขียนกราฟต่อไปนี้

6.1 K_8

6.2 C_8

6.3 $K_{4,4}$

6.4 N_8

6.5 P_8

7. ให้หาอันดับ ขนาด และดีกรีของจุดยอด ของกราฟต่าง ๆ ดังตาราง

กราฟแบบต่าง ๆ

จำนวน	K_9	N_9	C_9	$K_{9,9}$	ทรง 4 หน้า	ลูก บาศก์	ทรง 12 หน้า	ทรง 20 หน้า
อันดับ ขนาด ดีกรีของจุด								

8. จงแสดงให้เห็นว่าในกราฟสองส่วนใด ๆ ทุกวงเวียนมีความยาวเป็นจำนวนคู่
9. ความยาวของวงเวียนซึ่งสั้นที่สุดของกราฟเรียกว่า เกอริธ (girth) ให้หาเกอริธ ของกราฟต่อไปนี้
 - 9.1 K_9 9.2 $K_{5,8}$ 9.3 กราฟแบบของเพลโต
10. ความยาวของวงเวียนซึ่งยาวที่สุดของกราฟเรียกว่า เส้นรอบวง ให้หาเส้นรอบวงของกราฟต่อไปนี้
 - 10.1 K_9 10.2 $K_{5,8}$ 10.3 กราฟทรง 20 หน้า
11. ให้เขียนกราฟต้นไม้อันดับ 7 จำนวน 11 แบบ
12. จงอธิบายให้เห็นว่ากราฟต้นไม้อันดับ n จะมีขนาด (เส้นเชื่อม) เท่ากับ $n - 1$
13. ให้นำกราฟต้นไม้แบบบทยอดข้ามทั้งหมดของกราฟเชื่อมโยงต่อไปนี้

