

บทที่ 11

ประยุกต์ของกราฟ

ในบทนี้จะอธิบายถึงประยุกต์ในด้านต่าง ๆ ของกราฟที่พบว่าเป็นประโยชน์ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และสังคมศาสตร์ เนื่องจากเนื้อหาด้านการประยุกต์ครอบคลุมสาขาวิชาการต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก ดังนั้น การนำเสนอในที่นี้จึงเป็นรูปแบบกว้าง ๆ ของกราฟที่ได้รับการนำไปใช้สำหรับรายละเอียดที่ลึกซึ้ง จะสามารถหาได้จากหนังสืออ่านเพิ่มเติมท้ายเล่ม

11.1 ประยุกต์ของกราฟในด้านต่าง ๆ

1. ด้านความสัมพันธ์ระหว่างบุคคล

ทางด้านสังคมศาสตร์ได้ใช้กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลด้วยการกำหนดให้จุดยอดแทนบุคคลในกลุ่มหรือชุมชน และให้เส้นเชื่อมแทน ความสัมพันธ์ระหว่างบุคคล เช่น มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด x กับ y ถ้า x ชอบ y หรือ x มีความเห็นเหมือน y หรือ x หลีกเลี่ยงการพบปะกับ y หรือ x มีการสื่อสารกับ y เป็นต้น ในตอนแรกนี้ จะกำหนดให้ความสัมพันธ์เป็นแบบสมมาตร นั่นคือ x ชอบ y ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ y ชอบ x ความสัมพันธ์เช่นนี้สามารถใช้กราฟได้กับความสัมพันธ์เชิงเครือญาติ ความสัมพันธ์ทางวัฒนธรรม ความสัมพันธ์ระหว่างพรรคการเมือง และ ความสัมพันธ์ระหว่างประเทศซึ่งเป็นพันธมิตรมีความสัมพันธ์ทางการทูต หรือเห็นด้วยกับยุทธวิธีทางการเมือง

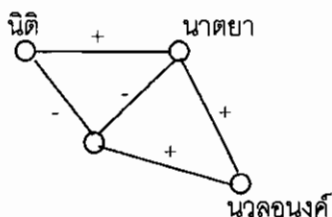
ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์สามารถใช้กราฟเครื่องหมาย (signed graphs) ซึ่งเป็นกราฟที่มีเครื่องหมายบวกหรือลบกำกับที่เส้นเชื่อม เพื่อแสดงความสัมพันธ์ที่ติดต่อกัน เช่น ชอบ รัก เห็นด้วย พุดด้วย ฯลฯ หรือแสดงความสัมพันธ์เชิงลบเช่นเกลียด ไม่ชอบ ไม่เห็นด้วย หลีกเลี่ยง ฯลฯ

ตัวอย่างที่ 1

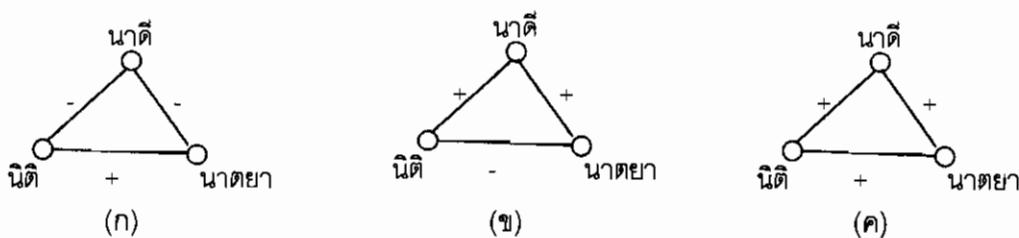
นักศึกษา 4 คน คือ นิติ นาทยา นาดิ และนวนลนงค์ อยู่ห้องเดียวกัน นิติชอบ นาทยา แต่ไม่ชอบนาดิ ส่วนนาทยาชอบนิติและนวนลนงค์ แต่ไม่ชอบนาดิ นवलนงค์ชอบนาทยาและนาดิ ส่วนนาดิชอบนวนลนงค์แต่ไม่ชอบนิติกับนาทยา ให้เขียนกราฟแสดงความรู้สึกของนักศึกษาทั้ง 4 คน

วิธีทำ

เพราะว่าไม่มีข้อมูลเกี่ยวกับความรู้สึกของนิติกับนวนลนงค์ ดังนั้น เมื่อเขียนกราฟจะไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างคนทั้งสอง (ดังรูป)



ในกรณีของสถานะการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการทำงานของนักศึกษา 3 คน คือ นิติ นาทยา และนาดิ ถ้าใช้กราฟเครื่องหมายแสดงความรู้สึกของคนทั้ง 3 ได้เป็น 3 แบบ ต่อไปนี้



จะเห็นได้ว่าตามแบบ (ก) ทั้งนิติและนวดิไม่ชอบนาดิ ดังนั้น นาดิทำงานร่วมกับนิติหรือนวดิไม่ได้ นาดิต้องทำงานตามลำพังแต่นวดิกับนิติสามารถร่วมกันทำงานได้ ส่วนแบบ (ข) นาดิชอบกับทั้งนิติและนวดิ แต่เนื่องจากนิติกับนวดิมีความรู้สึกไม่ดีต่อกัน ดังนั้น ถ้าทั้งสามคนทำงานร่วมกันจะทำให้เกิดความขัดแย้งหรือความเครียดส่วนแบบ (ค) เป็นแบบที่ทั้งสามคนทำงานร่วมกันได้

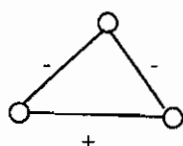
สถานะการณ์แบบ (ก) และ (ค) ถือเป็นแบบที่สมดุลย์ (balanced) ส่วนแบบ (ข) เป็นแบบไม่สมดุลย์ ซึ่งจากการกำหนดเช่นนี้ทำให้มีบทนิยามของกราฟเครื่องหมายแบบสมดุลย์ดังนี้ คือ

บทนิยาม

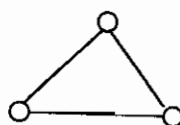
กราฟเครื่องหมายเรียกว่าเป็นแบบสมดุลย์ ถ้าจุดยอดของเส้นเชื่อมซึ่งมีเครื่องหมายบวกมีสีเดียวกัน ส่วนจุดยอดของเส้นเชื่อมซึ่งมีเครื่องหมายลบมีสีแตกต่างกัน

ตัวอย่างที่ 2

จากตัวอย่างที่ 1 เมื่อจำลองสถานะการณแบบ (ก) และแบบ (ค) ด้วยการให้สีจุดยอด (สีดำ - สีขาว) ตามบทนิยาม จะได้กราฟแบบสมดุลย์ ดังนี้



แบบ (ก)

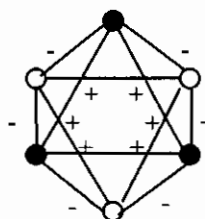


แบบ (ค)

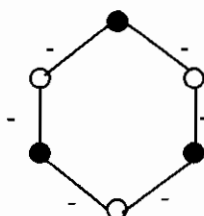
ส่วนสถานะการณแบบ (ข) ไม่สามารถจะเขียนกราฟแบบสมดุลย์ได้

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดกราฟแบบสมดุลย์อันดับ 6 ดังนี้



ถ้าลบเส้นเชื่อมที่เป็นบวกออกทั้งหมดจะได้กราฟแบ่งกัน คือ



ซึ่งแสดงให้เห็นว่ากราฟแบบสมดุทธ์ และกราฟแบ่งกันมีความสัมพันธ์กันกล่าวคือในกราฟวงเวียนทุกวงเวียนจะมีเส้นเชื่อมเป็นจำนวนคู่ ส่วนในกราฟแบบสมดุทธ์ทุกวงเวียนจะมีเส้นเชื่อมที่มีเครื่องหมายลบเป็นจำนวนคู่

2. ด้านภาษา

แนวความคิดเรื่องกราฟต้นไม้สัมพันธ์กับงานของเคอร์ชอฟทางด้านวงจรไฟฟ้าและงานของอาร์เธอร์ เคย์เลย์ ทางด้านการนับจำนวนโมเลกุลทางเคมี กราฟต้นไม้ ในปัจจุบันได้รับการนำไปใช้ในหลายสาขาวิชาทั้งทางด้านสังคมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาศาสตร์ และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ในระยะเวลาประมาณ 40 ปี ที่ผ่านมามีผลงานของศาสตราจารย์ ในมหาวิทยาลัยที่แสดงวิถีทางใหม่ ๆ ในการอธิบายโครงสร้างทางภาษาที่เป็นแบบธรรมชาติ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการสร้างเครื่องรวบรวมข้อมูลสำหรับภาษาคอมพิวเตอร์ระดับสูง ในการศึกษาได้ใช้กราฟต้นไม้แสดงการหาประโยคที่ถูกต้องตามหลักไวยากรณ์ จากหลักเกณฑ์พื้นฐาน เช่นในภาษาอังกฤษ ซึ่งตามหลักไวยากรณ์ มีหลักเกณฑ์ส่วนหนึ่งที่กำหนดว่า

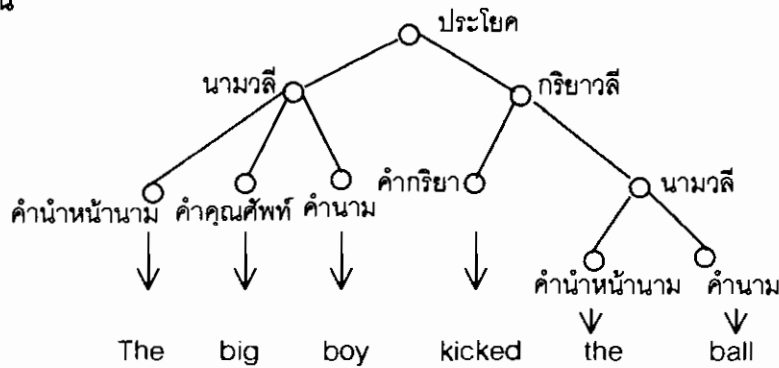
1. ประโยคเกิดจากการเขียนนามวลีก่อนแล้วตามด้วยกริยาวลี
2. นามวลีเกิดจากการเขียนคำนำหน้านามก่อนแล้วตามด้วยคำนาม หรือ
3. นามวลีเกิดจากการเขียนคำนำหน้านามก่อน แล้วเขียนคำคุณศัพท์ และตามด้วยคำนาม
4. กริยาวลีเกิดจากการเขียนคำกริยาก่อนแล้วตามด้วยนามวลี

ถ้าคำนำหน้านามคือ the คำคุณศัพท์คือ big คำกริยา คือ kick คำนามคือ boy และคำนามอีกคำหนึ่งคือ ball นำมาเขียนอธิบายตามสัญกรณ์ ซึ่งมีสัญลักษณ์ 1 แทนคำว่า หรือและใช้วงเล็บ < > กับพจน์ต่าง ๆ เช่น ประโยคหรือนามวลี ดังนี้

- 1 < ประโยค > < นามวลี > < กริยาวลี >
- 2,3 < นามวลี > < คำนำหน้านาม > < นาม > / < คำนำหน้านาม >
< คำคุณศัพท์ > < คำนาม >

- 4 < กริยาวลี > < คำกริยา > < นามวลี >
 < คำนำหน้านาม > the
 < คำคุณศัพท์ > big
 < คำกริยา > kicked
 < คำนาม > boy / ball

ดังนั้น ตามเกณฑ์ดังกล่าว ประโยค " the big boy caught the ball" จะเขียนอธิบายด้วยกราฟ ต้นไม้ไม่ได้ดังนี้

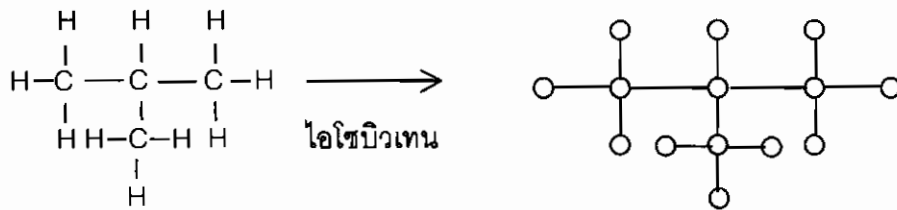
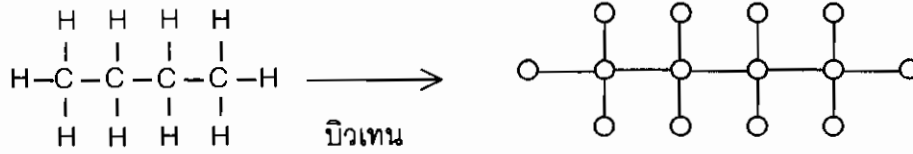


ในภาษาศาสตร์มีศัพท์ 2 คำ คือ semantics ซึ่งหมายถึงความหมายของคำและความสัมพันธ์ระหว่างคำ กับ syntax ซึ่งหมายถึง โครงสร้างไวยากรณ์ของประโยค ประโยคอาจเขียนได้ถูกต้องตามหลักของโครงสร้างไวยากรณ์ แต่ขาดความหมายในแง่ของคำและความสัมพันธ์ระหว่างคำ เช่น ประโยค "the big ball caught the boy" หรือประโยคที่ให้ความหมายในแง่ของคำและความสัมพันธ์ระหว่างคำ แต่ไม่ถูกต้องตามหลักของโครงสร้างไวยากรณ์ เช่น "Me angry"

3. ด้านวิทยาศาสตร์

นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน ชื่อ กุสตาฟ เคอร์ชอฟ (2367 - 2430) เป็นบุคคลแรกที่โยงความสัมพันธ์ระหว่างกราฟต้นไม้กับวงจรไฟฟ้า และต่อมานักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ชื่อ อาร์เทอร์ เคย์เลย์ ได้ใช้กราฟต้นไม้หาสารประกอบที่มีจำนวนอะตอมในหนึ่งโมเลกุลเหมือนกันแต่มีสมบัติต่างกัน ของไฮโดรคาร์บอนบางชนิด โมเลกุลไฮโดรคาร์บอนประกอบด้วยคาร์บอนกับไฮโดรเจนซึ่งอะตอมคาร์บอนแต่ละตัวสามารถเชื่อมต่อกับไฮโดรเจน 4 อะตอม ส่วนไฮโดรเจน 1 อะตอม เชื่อม

ได้กับคาร์บอน 1 อะตอม ดังนั้นโครงสร้างของโมเลกุลไฮโดรคาร์บอน สามารถเขียนแสดงให้เห็นได้
 ในรูปของกราฟต้นไม้

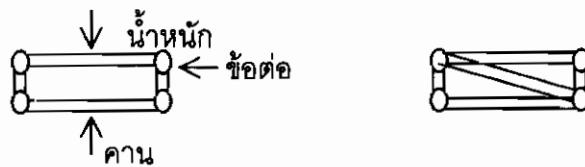


จะเห็นได้ว่ากราฟทั้งสองมีคาร์บอน 4 อะตอม และไฮโดรเจน 10 อะตอม เท่ากัน แต่มีสมบัติทางเคมีแตกต่างกัน โมเลกุลทั้งสองชนิดนี้เรียกว่าบิวเทน และไอโซบิวเทน ซึ่งมีสูตรทางเคมีเหมือนกันเป็น C_4H_{10} แต่การจัดเรียงตัวของอะตอมในโมเลกุลแตกต่างกัน

เมื่อรู้จำนวนของคาร์บอนในโมเลกุลไฮโดรคาร์บอนอิ่มตัวบางชนิดจะหาจำนวนสูงสุดของไฮโดรเจนได้ ศาสตราจารย์เคย์เลย์ ได้แสดงให้เห็นไว้แล้วว่าถ้าโมเลกุลไฮโดรคาร์บอนอิ่มตัวมีจำนวนคาร์บอน k อะตอม จะมีจำนวนไฮโดรเจน $2k + 2$ อะตอม

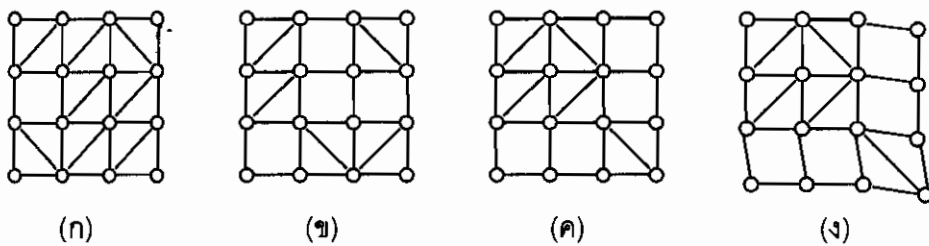
4. ด้านการก่อสร้าง

ในการก่อสร้างอาคารส่วนมากใช้คานรองรับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และมีโครงสร้างในลักษณะของระนาบซึ่งใช้ตัวยึดเชื่อมกรอบเข้าด้วยกัน และแบบง่ายที่สุดคือ แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีคานและข้อต่ออย่างละสี่ส่วน (ดังรูป)



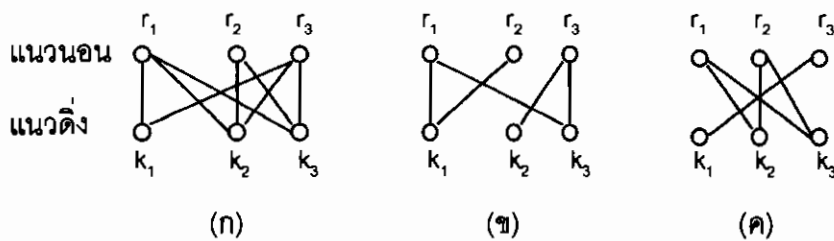
แต่มีข้อเสียที่อาจเกิดจากน้ำหนักที่ต้องรองรับ ถ้ามากเกินไปจะทำให้เกิดการเบี่ยงเบนไปจากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้น ต้องทำให้โครงสร้างแข็งแรงด้วยการใส่คานในแนวทแยงซึ่งช่วยแก้แรงดึงตัวและแรงบีบได้ อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่อาคารที่ก่อสร้างต้องใช้คานรองรับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจำนวนมากก็ไม่จำเป็นต้องใช้คานในแนวทแยงกับทุกคานสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพียงแต่หาจำนวนต่ำสุดของคานทแยงที่ต้องใช้ให้ได้แรงรองรับด้านทานเพียงพอไม่ให้เกิดพังทลายของอาคาร และในทางปฏิบัติอาจเพิ่มคานทแยงให้มีจำนวนสูงกว่าจำนวนต่ำสุด เล็กน้อย เพื่อความปลอดภัยยิ่งขึ้น แต่นั่นหมายถึงต้องเพิ่มค่าใช้จ่ายมากขึ้นซึ่งอาจไม่จำเป็น

จากโครงสร้างตัวอย่างต่อไปนี้



จะเห็นได้ว่า แบบ (ก) ใช้คานทแยงมากเกินไป แบบ (ข) ใช้คานทแยงตามสมควร แต่มันคงดีหรือไม่จะต้องพิจารณา ส่วนแบบ (ค) ใช้คานทแยงไม่มั่นคงตามสมควร อาจเกิดการเสียรูปของโครงสร้างไปเป็นแบบ (ง)

วิธีการพิจารณาโครงสร้างว่าใช้คานทแยงมากหรือน้อยเกินไป จะเสริมหรือเอาคานทแยงออกที่ใด สามารถใช้เรื่องของกราฟสองส่วนได้ โดยกำหนดให้เซตของจุดยอดชุดหนึ่งสมนัยกับจุดยอดในแนวนอนของโครงสร้าง และเซตของจุดยอดอีกชุดหนึ่งสมนัยกับจุดยอดในแนวตั้งของโครงสร้าง เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดของต่างเซตเกิดขึ้นเมื่อช่องสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีคานทแยงตามข้อกำหนดเช่นนี้จะได้กราฟสองส่วนในรูป



กราฟสองส่วนแบบ (ก) ซึ่งได้จากโครงสร้างแบบ (ก) ที่มีคานทแยงมากไปเป็นกราฟเชื่อมโยง ในทำนองเดียวกันกราฟสองส่วนแบบ (ข) ซึ่งมาจากโครงสร้างแบบ (ข) ก็เป็นกราฟเชื่อมสองส่วนกราฟสองส่วนแบบ (ค) ซึ่งได้จากโครงสร้างแบบ (ค) เป็นกราฟแบบไม่เชื่อมโยง ตามหลักการทั่วไปกำหนดไว้ว่า โครงสร้างที่มีคานรองรับแน่นอนจะสมนัยกับกราฟสองส่วนซึ่งมีความเชื่อมโยง ส่วนโครงสร้างที่มีคานรองรับไม่แน่นอนจะสมนัยกับกราฟสองส่วน ซึ่งขาดความเชื่อมโยง

หลักการนี้อธิบายได้ว่าแต่ละคานที่รองรับในโครงสร้างจะบังคับให้โครงสร้างในแนวนอนและแนวตั้งอยู่ในสภาพที่ตั้งฉากกัน เช่นในกราฟของโครงสร้าง (ก) วิธี $r_1, k_2, r_2, k_3, r_3, k_1$ โยงจุดยอดทั้ง 6 จุด แสดงว่าแถวที่(แนวนอน) 1 ตั้งฉากกับหลักที่(แนวตั้ง) 2 หลักที่ 2 ตั้งฉากกับแถวที่ 2 และแนวที่ 2 ตั้งฉากกับหลักที่ 3 ฯลฯ การที่โครงสร้างในทุกแถวตั้งฉากกับทุกหลักมีผลทำให้โครงสร้างมีความแน่นอน แต่ในกราฟของโครงสร้าง (ค) ไม่มีวิธีเชื่อมโยงจุดยอด r_3 และ k_1 กับจุดยอด r_1, r_2, k_2 หรือ k_3 ดังนั้น แถวที่ 3 กับหลักที่ 1 จึงไม่ตั้งฉากกับแถวที่ 1 แถวที่ 2 หลักที่ 2 หรือหลักที่ 3 ดังนั้น โครงสร้างจึงไม่แน่นอนและอาจเอนเอียงไปได้ดังภาพ (ค)

กราฟสองส่วนสามารถช่วยในการพิจารณาว่าจะเอาคานทแยงออกจากส่วนใดของโครงสร้างได้โดยที่โครงสร้างยังแข็งแรงแน่นอนและใช้จำนวนคานทแยงน้อยที่สุด เริ่มจากกราฟสองส่วนแบบ (ข) จะเห็นได้ว่าเป็นกราฟที่ไม่มีวงเวียน ดังนั้นถ้าเอาเส้นเชื่อมออกเพียงเส้นใดเส้นหนึ่งจะทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง ซึ่งหมายถึงโครงสร้างจะขาดความแข็งแรงจึงกำหนดได้ว่าโครงสร้างพร้อมคานทแยงรองรับแบบ (ข) เป็นแบบที่ใช้จำนวนคานทแยงต่ำสุด สำหรับกราฟสองส่วนแบบ (ก) จะพบว่ามีหลายวงเวียนดังนั้น สามารถเอาคานทแยงออกได้หลายคานโดยไม่กระทบกระเทือนความมั่นคงของโครงสร้าง เช่น $r_1, k_1, r_3, k_3, k_3, r_1$ เป็นวงเวียน จะเอาเส้นเชื่อม $r_1, k_1, r_1, k_3, r_3, k_1$ หรือ r_3, k_3 ออกได้โดยไม่กระทบความมั่นคงของโครงสร้าง ตามตัวอย่างนี้จะเอาเส้นเชื่อมออกได้ถึง 3 เส้น โดยโครงสร้างยังแข็งแรง (เช่น r_1, k_1, r_1, k_3 และ r_3, k_3) โดยแต่ละชั้นจุดสำคัญคือตัดเส้นเชื่อมออกจากวงเวียนของกราฟจนได้กราฟสองส่วนที่ไม่มีวงเวียน หรือกราฟต้นไม้แบบทอดข้าม

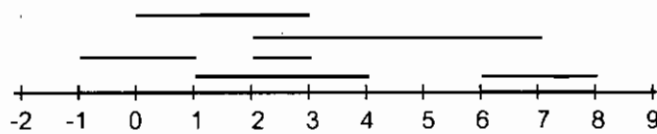
ประยุกต์ของกราฟแบบช่องและกราฟแบบเข้ากันได้

กราฟสามารถใช้แทนปัญหาของสถานะการณ์ซึ่งเกี่ยวกับการจัดอันดับสิ่งของหรือการจัดเรียงข้อมูล กราฟแบบนี้ได้รับการนำไปใช้อย่างกว้างขวาง ลักษณะของกราฟแบบนี้จะมีจุดยอด

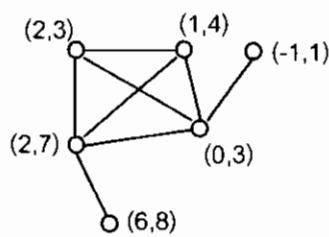
แทนสิ่งของหรือข้อมูล มีเส้นเชื่อมแทนสิ่งของเป็นคู่ที่ลักษณะบางอย่างเข้ากันได้ การใช้กราฟแบบนี้เริ่มแรกในเรื่องของพันธุกรรมต่อมาได้นำไปใช้ทางด้านสิ่งแวดล้อม โบราณคดี จิตวิทยา และการจับคู่ของต้นฉบับเอกสารที่เก่าแก่ ในการประยุกต์ด้านสัญญาณไฟ ใช้กราฟแบบช่วงซึ่งกำหนดดังต่อไปนี้

กราฟแบบช่วง

ถ้ากำหนดให้มีช่วงจำนวนซ้อนเหลื่อมกันเป็น $(-1,1)$, $(0,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,7)$ และ $(6,8)$ ซึ่งแต่ละช่วงเขียนแสดงดังนี้คือ



เมื่อนำกราฟมาสัมพันธ์กับช่วงจำนวนเหล่านี้โดยมีจุดยอดแทนแต่ละช่วงและมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดถ้ามีจำนวนอย่างน้อยที่สุด 1 ตัวร่วมกันในแต่ละช่วง เช่น ช่วง $(1,4)$ กับ $(2,3)$ ช่วง $(2,3)$ กับ $(2,7)$ และ $(2,7)$ กับ $(6,8)$ ต่างมีจำนวนในช่วงร่วมกันดังนั้นจะมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดเหล่านี้ ส่วนช่วง $(-1,1)$ กับ $(1,4)$ (ต่างเป็นช่วงเปิด) ไม่มีจำนวนร่วมกัน ดังนั้นไม่มีเส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดนี้

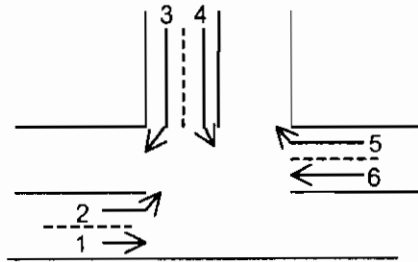


กราฟแบบช่วง

กราฟใด ๆ ที่เกิดขึ้นจากเซตของข้อมูลตามลักษณะเช่นนี้เรียกว่า กราฟแบบช่วง

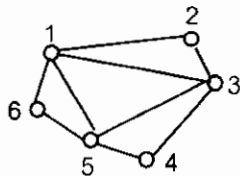
5 ด้านการกำหนดสัญญาณไฟ

ถ้ากำหนดให้สามแยกแห่งหนึ่งมีไฟสัญญาณจราจรให้รถวิ่งในทิศทางตามแผนภาพต่อไปนี



จะเห็นได้ว่าบางส่วนของรถที่ใช้เส้นทางนี้สามารถแล่นไปในเวลาเดียวกันโดยปราศจากอันตราย เช่นรถจากช่องทางที่ 1 แล่นไปด้วยกันได้กับรถที่แล่นในช่องทาง 2 ช่องทาง 3 ช่องทาง 5 และช่องทาง 6 แต่รถในช่องทาง 1 กับช่องทาง 4 จะแล่นไปในเวลาเดียวกันไม่ได้ ในลักษณะเดียวกันรถในช่องทาง 6 แล่นได้พร้อมกับรถในช่องทาง 1 และช่องทาง 5 แต่จะต้องแล่นเวลาต่างกับกับรถในช่องทาง 2 ช่องทาง 3 และช่องทาง 4 สถานการณ์ของการจัดอันดับเหล่านี้สามารถใช้กราฟแบบเข้ากันได้ โดยให้จุดแทน

ช่องทางที่รถแล่นและเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุดแทนช่องทางที่รถวิ่งพร้อมกัน จากแผนภาพการจราจรในทางแยกข้างต้น สามารถเขียนเป็นกราฟ ได้ดังนี้

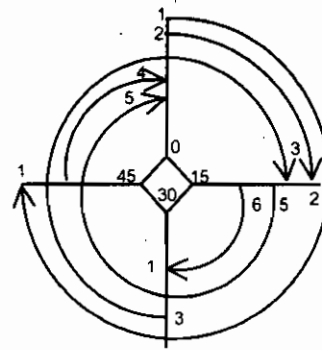


กราฟแบบเข้าได้

ในกรณีที่เจ้าหน้าที่ต้องการใช้สัญญาณไฟเพื่อควบคุมการจราจรบริเวณสามแยกนี้ เจ้าหน้าที่จะกำหนดสัญญาณไฟอย่างไรเพื่อไม่ให้เกิดอุบัติเหตุขึ้นได้

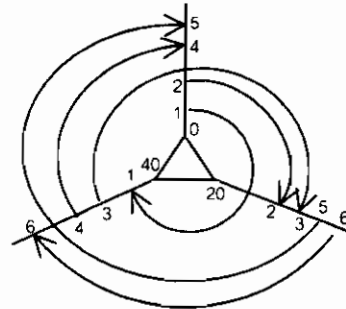
ถ้าสัญญาณไฟมีจังหวะหมุนเวียน 60 วินาที วิธีการแก้ปัญหาคือ ให้รถแต่ละช่องทางมีระยะเวลาแล่นผ่านสามแยก 10 วินาที โดยมีรถซึ่งแล่นไปพร้อมกันในช่องทางที่ไม่เกิดขวางกันได้ด้วย จะได้ลดเวลาของรถแต่ละช่องทางที่ต้องรอสัญญาณ ซึ่งจะได้แผนภาพและคำอธิบายดังนี้คือ ในช่วงเริ่มแรกจนถึง 15 วินาทีรถในช่องทาง 1 กับ 3 และ 5

จะได้สัญญาณไฟเขียวในช่อง 15 - 30 วินาที รถในช่องทาง 1 กับ 5 และ 6 ได้สัญญาณไฟเขียว ในช่วง 30 - 45 วินาทีในช่องทาง 1 กับ 3 และ 5 ได้สัญญาณไฟเขียว และในช่วง 45 - 60 วินาที รถในช่องทาง 3 กับ 4 และ 5 ได้สัญญาณไฟเขียวนั้นคือ ในระยะเวลา 60 วินาที รถในช่องทาง 1 กับ 3 และ 5 ได้สัญญาณไฟเขียว 45 วินาที ส่วนรถในช่องทาง 2 กับ 4 และ 6 ได้สัญญาณไฟเขียว 15 วินาที จึงได้เวลารวมทั้งหมด "ที่ต้องรอ"



ของรถ คือ 3 (15) บวกกับอีก 3 (45) ได้เท่ากับ 180 วินาที จึงเห็นได้ว่าการจัดเช่นนี้ลดเวลาที่ต้องรอ ถึง 40 เปอร์เซ็นต์ ของเวลาที่ต้องรอทั้งหมดคือ 6(50) หรือเท่ากับ 300 วินาที

วิธีแก้ปัญหาก็วิธีหนึ่งซึ่งจัดช่วงเวลาสัญญาณไฟเขียวเป็นช่วงละ 20 นาที ดังนี้คือ ในช่วง 0 - 20 วินาที รถในช่องทาง 1 กับ 2 และ 3 ได้สัญญาณไฟเขียว ในช่วง 20 - 40 วินาที รถในช่องทาง 1 กับ 5 และ 6 ได้สัญญาณไฟเขียว และในช่วง 40 - 60 วินาที รถในช่องทาง 3 กับ 4 และ 5 ได้สัญญาณไฟเขียว



จะเห็นได้ว่าเวลา "ที่ต้องรอ" รวมแล้วเท่ากับ 180 วินาที เช่นเดียวกัน เพียงแต่ตามวิธีนี้ในแต่ละช่วง 60 วินาที รถในช่องทาง 1 กับ 3 และ 5 ได้สัญญาณไฟเขียว 40 วินาที ส่วนรถในช่องทาง 2 กับ 4 และ 6 ได้สัญญาณไฟเขียว 20 วินาที

การเลือกวิธีแก้ปัญหาโดยทั่วไปขึ้นอยู่กับปัจจัยอื่นที่เกี่ยวข้อง เช่น จำนวนรถในแต่ละช่องทาง หรือจำนวนเวลาที่จะกำหนดให้รถในช่องทางใดได้สัญญาณไฟเขียวต่ำสุด เป็นต้น

คำตอบของปัญหาเหล่านี้สามารถใช้กราฟแบบเข้ากันได้มาพิจารณา กล่าวคือ เมื่อต้องการให้จำนวนรถที่แล่นได้ในเวลาเดียวกันมีจำนวนสูงสุด จะต้องหากราฟย่อยแบบที่เข้ากันได้ ซึ่งเป็นไปตามความต้องการนี้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งกราฟย่อยแบบสมบูรณ์ ซึ่งมีจุดยอดเป็น 1 กับ 2

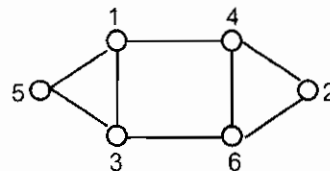
และ 3 หรือ 1 กับ 6 และ 5 หรือ 1 กับ 3 และ 5 หรือ 3 กับ 4 และ 5 ซึ่งก็คือช่องทางเดินรถใน ปัญหาข้างต้น จึงทำให้ได้หลักการทั่วไปในการแก้ปัญหา คือ

1. สร้างกราฟแบบเข้ากันได้
2. สำหรับแต่ละจุดยอดของกราฟแบบเข้ากันได้ ให้นำกราฟย่อยสมบูรณ์ ซึ่งใหญ่ที่สุดที่ รวมแต่ละจุดยอด
3. นหารจำนวนเวลาที่มีด้วยจำนวนกราฟย่อยสมบูรณ์ที่ได้จากข้อ 2 แล้ว จัดกราฟย่อย สมบูรณ์แต่ละอันเข้ากับแต่ละช่วงเวลา

ตามตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่ากราฟย่อยแบบสมบูรณ์ตาม 2 คือ กราฟย่อยที่มีจุดยอด 1 2 3 กราฟย่อย 1 5 6 และกราฟย่อย 3 4 5 ซึ่งรวมจุดยอดทั้ง 6 จุด

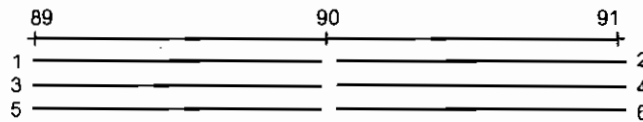
6 ด้านการกำหนดคลื่นความถี่วิทยุ

ตามระบบวิทยุเคลื่อนที่เช่นที่ตำรวจใช้กันอยู่ รถตำรวจแต่ละคันติดต่อกันโดยใช้ วิทยุ 2 ทาง ซึ่งช่องหนึ่งใช้คลื่นความถี่ที่กำหนดล่วงหน้าในท้องถิ่น เพื่อป้องกันไม่ให้มีการใช้ของ ความถี่ซ้ำกันจากเขตท้องถิ่นที่ติดกันใกล้เคียงจะสามารถทำได้โดยสร้างกราฟแบบเข้ากันได้ ซึ่ง จุดยอดแทนท้องถิ่นและเส้นเชื่อมแทนคู่ของท้องถิ่นที่ไม่ได้อยู่ติดกัน



ปัญหานี้คล้ายคลึงกับปัญหาการกำหนดสัญญาณไฟจราจรที่จัดสรรเวลาให้รถวิ่งผ่าน แต่ ในที่นี้เป็นการจัดสรรช่วงความถี่คลื่นวิทยุ (เช่น 95.5 - 100.5 เมกะเฮิร์ต) ให้มีช่วงกว้างเพียงพอ สำหรับแต่ละเขต ซึ่งแก้ปัญหาได้ด้วยการสร้างกราฟแบบเข้ากันได้ เพื่อหาชุดของกราฟย่อยแบบ สมบูรณ์ที่รวมจุดยอดแต่ละจุด จากนั้นจะกำหนดคลื่นวิทยุให้กับแต่ละกราฟย่อยแบบสมบูรณ์ และแทนคลื่นวิทยุเหล่านี้ด้วยเส้นที่มีช่องเปิด เช่น กราฟแบบเข้ากันได้ข้างต้นมีกราฟย่อยแบบ

สมมุติว่ามีจุดยอด 1 กับ 3 และ 5 และจุดยอด 1 กับ 4 และ 6 ตามวิธีนี้คือกำหนดกราฟย่อย 135 กับคลื่นความถี่ 89 - 90 เมกาเฮิร์ต และกราฟย่อย 246 กับคลื่นความถี่ 90 - 91 เมกาเฮิร์ต (ดังรูป)



7 ด้านโบราณคดี

ปลายศตวรรษที่แล้วนักโบราณคดีสนใจเครื่องปั้นดินเผาและศิลปวัตถุโบราณแบบต่าง ๆ ที่พบบริเวณสุสานอียิปต์หลายแห่งในช่วง 4000 - 2500 ปีก่อนคริสตกาลโดยเฉพาะอย่างยิ่งเซอร์ฟลินเดอร์ เบทรี ใช้ข้อมูลจากสุสาน 900 แห่ง เพื่อพยายามจัดเรียงสุสานตามลำดับและกำหนดเวลาของศิลปวัตถุแต่ละชิ้นที่พบในสุสาน วิธีนี้เรียกว่าการกำหนดลำดับเวลา

ตามวิธีการการกำหนดลำดับเวลาสุสานนี้ สมมุติว่าถ้ามีศิลปวัตถุโบราณ 2 ชิ้น แสดงว่าช่วงเวลาของวัตถุโบราณต้องคาบเกี่ยวกัน และเนื่องจากจำนวนสุสานที่พบมีจำนวนมาก ดังนั้นถ้าวัตถุโบราณ 2 ชิ้นคาบเกี่ยวกัน วัตถุโบราณทั้ง 2 ชิ้นนั้นต้องอยู่ในหลุมเดียวกัน

วิธีการกำหนดลำดับเวลาที่วงการโบราณคดีนำมาใช้ คือ การแทนข้อมูลด้วยกราฟแบบเข้ากันได้ โดยให้จุดยอดแทนวัตถุโบราณและเส้นเชื่อมโยงระหว่างวัตถุโบราณ 2 ชิ้นที่พบในสุสานเดียวกัน จากนั้นกำหนดกราฟแบบเข้ากันได้ในรูปแบบของกราฟแบบช่วง นั่นคือ หาชุดของช่วงเวลาทีกราฟแบบช่วงที่สอดคล้องกับกราฟแบบเข้ากันได้ที่กำหนดให้ ช่วงเวลาเหล่านี้ สอดคล้องกับช่วงเวลาทีวัตถุโบราณถูกนำไปใช้ และช่วงเวลาทีคาบเกี่ยวกันสอดคล้องกับวัตถุโบราณซึ่งพบในหลุมฝังศพเดียวกัน

ปัญหาทีพบในการใช้วิธีการแบบนี้คือ จะมีช่วงเวลาทีหลากหลายแตกต่างกันแต่ใช้กราฟแบบเข้ากันได้อย่างเดียวกัน ทำให้ไม่สามารถเลือกกราฟแบบช่วงทีถูกต้องเว้นแต่จะมีข้อมูลอื่นมาช่วย อย่างไรก็ตามการใช้กราฟแบบช่วงก็ประสบผลสำเร็จในหลายกรณี และทำให้ได้คำตอบเกี่ยวกับการกำหนดเวลาของวัตถุโบราณทีพบในทั้งในยุโรป และอเมริกา

8 ด้านจิตวิทยา

สมมุติว่าถ้าต้องการศึกษาลักษณะต่าง ๆ ที่พบในเด็กขณะกำลังเจริญเติบโตลักษณะเหล่านี้อาจปรากฏในช่วงระยะเวลาหนึ่งแล้วหายไปได้ ปัญหาคือการสร้างตารางเวลาที่ลักษณะต่าง ๆ ที่ปรากฏขึ้นเหล่านี้เรียงตามระยะเวลา ปัญหาแบบนี้สามารถทำได้ด้วยการศึกษาลักษณะเหล่านี้ในเด็กจำนวนหนึ่งและหาข้อสังเกตเมื่อลักษณะ 2 ชนิดแตกต่างกันถูกพบในเด็กคนเดียวกัน สถานะการณ์แบบนี้จะเหมือนกับการศึกษาในตัวอย่างด้านโบราณคดี แต่ในกรณีนี้วัตถุโบราณเปลี่ยนเป็นลักษณะเฉพาะ และสุสานเปลี่ยนเป็นเด็กด้วยการพิจารณาวิธีต่าง ๆ ซึ่งกราฟแบบเข้ากันได้สามารถใช้แทนได้ในรูปของกราฟแบบช่วง จะทำให้สามารถกำหนดลักษณะเฉพาะต่าง ๆ เรียงตามลำดับระยะเวลาได้ ซึ่งเท่ากับได้แก้ปัญหาตามต้องการ

9 ด้านการจับคู่เอกสารเก่าแก่ซึ่งเป็นต้นฉบับ

ได้มีการจัดเรียงลำดับเอกสารเก่าแก่ของกรีกและละตินต่าง ๆ เช่น เอกสารของเพลโต ได้รับการศึกษาโดยละเอียด และวิธีการวิเคราะห์โดยใช้การเปลี่ยนแปลงในสไตล์ ของผู้เขียนด้วยการศึกษาวิธีการใช้ จังหวะด้านร้อยแก้ว ในกรณีของเพลโต การศึกษาเน้นที่ตอนจบของประโยค เพราะเป็นส่วนที่สำคัญที่สุดของประโยค แต่ละตอนจบของประโยคประกอบด้วย 5 พยางค์สุดท้ายจะสั้นหรือยาวก็ได้ และความถี่ขององค์ประกอบคือ 2^5 ของสัญลักษณ์เหล่านี้ได้รับการคำนวณออกมาสำหรับงานของเพลโตแต่ละชิ้น ข้อมูลจะถูกกำหนดในรูปกราฟ โดยตั้งข้อสังเกตจากการปรากฏขึ้นของแต่ละตอนจบของประโยค แล้วเขียนขึ้นในรูปของกราฟแบบเข้ากันได้ที่สอดคล้องกับข้อมูล จากนั้นตรวจหาลำดับที่น่าจะเป็นไปได้ด้วยการพิจารณาจากวิธีต่าง ๆ ที่กราฟสามารถเขียนแทนได้ในรูปของกราฟแบบช่วง วิธีการแบบนี้ได้รับการนำไปใช้ในการหาผู้เขียนของชิ้นงานเก่าแก่ที่มีปัญหาถกเถียงกันในเรื่องของผู้เขียน เช่น คัมภีร์ไบเบิล (ใหม่) และบทละครของเชกสเปียร์ก็ถูกมาวิเคราะห์โดยวิธีการนี้เช่นเดียวกัน

10 พันธุกรรม

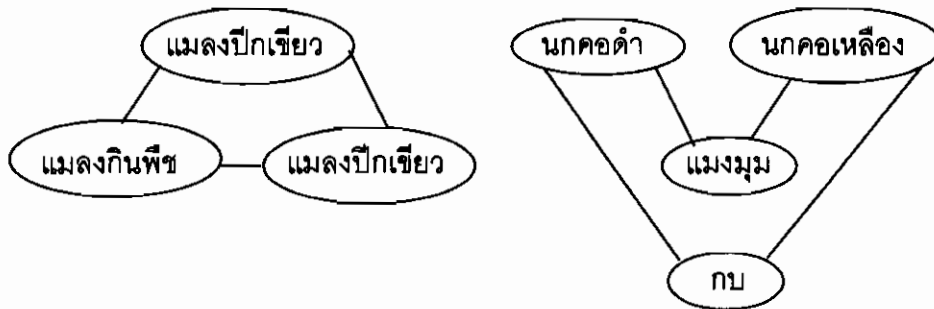
นักพันธุกรรม ถือว่าโครโมโซมเป็นการจัดเรียงแบบเชิงเส้นของหน่วยกรรมพันธุ์ซึ่งที่ต้องการรู้คือโครงสร้างซึ่งละเอียดอ่อนในหน่วยกรรมพันธุ์มีการจัดเรียงเป็นแบบเชิงเส้นด้วยหรือไม่

แต่เพราะหน่วยกรรมพันธุ์มีรายละเอียดที่เกี่ยวข้องมากมายจึงไม่สามารถตรวจสังเกตได้โดยตรง ต้องใช้วิธีศึกษาจากการเปลี่ยนแปลงด้านโครงสร้างของหน่วยกรรมพันธุ์แทน

จากการศึกษาโครงสร้างของหน่วยกรรมพันธุ์ของจุนทรีย์ไวรัสชื่อ T₄ ศาสตราจารย์เบนเซอร์ ซีมัวร์ พบว่าโครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นเมื่อบางส่วนของหน่วยกรรมพันธุ์ขาดหายไป โดยเฉพาะถ้าบางส่วนของหน่วยกรรมพันธุ์เกิดการซ้อนเหลื่อมกัน จากการวิเคราะห์โดยใช้กราฟแบบเข้ากันได้กับการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างไม่ต่ำกว่า 145 หน่วยได้พบว่าเชื้อไวรัสชนิดนี้มีการจัดเรียงตัวในแบบเชิงเส้น

11 สิ่งแวดล้อม

โดยหลักธรรมชาติ นกกินปลาและแมลง งูกินกบ กบกินหอยทาก แมงมุม และแมลง ฯลฯ ลักษณะความสัมพันธ์ในเชิงของผู้ล่าและผู้ถูกล่าเป็นอาหาร ถ้านักนิเวศวิทยา จะวิเคราะห์พฤติกรรมของสัตว์ในเชิงการล่าเหยื่อจะใช้วิธีการอย่างไร เนื่องจากสัตว์หลายชนิดกินอาหารชนิดเดียวกัน นักนิเวศวิทยาจะใช้กราฟแสดงการแข่งกันล่าเหยื่อของผู้ล่า เช่น กราฟต่อไปนี้



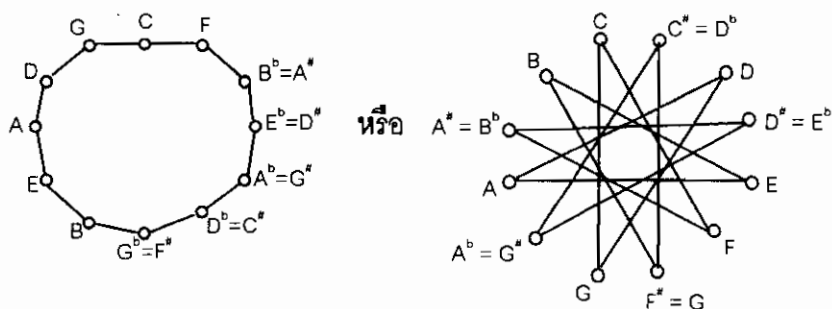
ในทางปฏิบัติสามารถใช้กราฟแบบช่วงแสดงชนิดของสัตว์ต่อปัจจัยเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อม เช่น อุณหภูมิ ความชื้น หรือความสูง เช่นกราฟแบบช่วงต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่าแมลงปีกเขียว แมลงปีกแข็งและแมลงกินพืช มีพฤติกรรมการหาอาหารเหมือนกัน และนก กบ กับแมงมุมมีพฤติกรรมการหาอาหารแบบเดียวกัน

| | | |
|--|---------------------|---------------|
| | <u>แมลงปีกเขียว</u> | <u>นก</u> |
| | <u>แมลงปีกแข็ง</u> | <u>กบ</u> |
| <u>ดอกหญ้า</u> <u>หอยทาก</u> <u>งู</u> | <u>แมลงกินพืช</u> | <u>แมงมุม</u> |

12 ด้านดนตรี

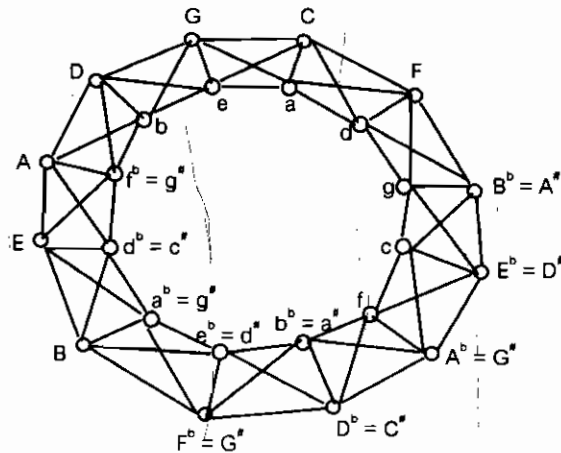
ทางด้านดนตรี เมื่อมีการเปลี่ยนระดับเสียงของดนตรีเฉพาะแบบ จะได้ท่วงทำนองที่เป็นธรรมชาติ เช่น การเปลี่ยนระดับเสียงจาก C เมเจอร์ ไปที่ F เมเจอร์ จะมีลักษณะที่เป็นธรรมชาติมาก เพราะมีการเปลี่ยนโน้ตเพียงตัวเดียว (B เป็น B^b)

การได้มาของระดับเสียงระหว่าง C กับ F ด้วยการเปลี่ยนโน้ตเพียงตัวเดียวในแบบนี้ ถือเป็นความสัมพันธ์ที่สามารถแสดงให้เห็นด้วยกราฟได้ นั่นคือ ให้จุดแทนระดับเสียง และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ระหว่างระดับเสียงที่เปลี่ยนไปมาถึงกันด้วย การเปลี่ยนตัวโน้ตเพียง 1 ตัว และให้เสียงที่เป็นธรรมชาติ โดยวิธีนี้จะได้กราฟ 12 จุด หรือ C₁₂ ดังนี้



ในกรณีของระดับเสียงไมเนอร์มีปัญหาบ้าง เพราะว่ามีระดับเสียงไมเนอร์มากมายที่ ให้เสียงที่เป็นธรรมชาติเมื่อเปลี่ยนตัวโน้ต ในกรณีนี้ถือว่าเป็นปกติที่จะกำหนดว่าระดับเสียงหนึ่งมีระดับเสียงอีก 5 ระดับที่สัมพันธ์กัน เช่น C เมเจอร์ สัมพันธ์กับ G เมเจอร์ และ F เมเจอร์ และรวมถึง A ไมเนอร์ E ไมเนอร์ และ D ไมเนอร์ เมื่อโยงระดับเสียงเหล่านี้เข้าด้วยกัน

จะได้กราฟที่มี 24 จุดยอด และเป็นกราฟปกติที่มีดีกรี 5 ดังนี้



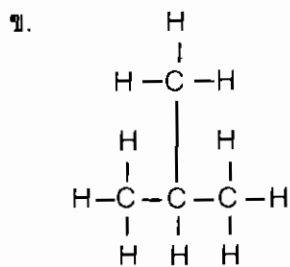
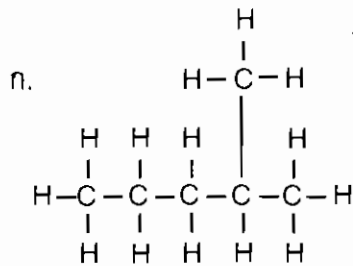
กราฟนี้มีประโยชน์ในการวิเคราะห์ให้เห็นลำดับการเปลี่ยนระดับเสียง ทั้งนี้เพราะว่า ทำนองเสียงดนตรีเกิดจากการเปลี่ยนระดับเสียงที่เป็นพื้นฐานตามทีเห็นในกราฟ เช่น ทำนอง C[#] ไมเนอร์ ถึง G เมเจอร์ คือการเปลี่ยนระดับเสียงพื้นฐาน 3 ส่วนประกอบ (C[#] ไมเนอร์ไป F[#] ไมเนอร์ และ F[#] ไมเนอร์ ไป B ไมเนอร์ และ B ไมเนอร์ ไป G เมเจอร์) ซึ่งแสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟความยาว 3 กล่าวโดยสรุป คือ ทำนองเสียงดนตรีสมนัยกับวิถีในกราฟ และใช้ความยาวของวิถีซึ่งสั้นที่สุด ระหว่าง 2 ระดับเสียงว่าเป็นตัวชี้ของความห่างไกลระหว่างระดับเสียง 2 ระดับนั้น เช่น ทำนอง C เมเจอร์ถึง F[#] เมเจอร์ (วิถียาว 6) มีความห่างไกลมากกว่า ทำนอง D[#] เมเจอร์ ถึง A^b ไมเนอร์ (วิถียาว 4) ซึ่งห่างไกลมากกว่าทำนอง B^b เมเจอร์ถึง C ไมเนอร์ (วิถียาว 1) และตามกฎทั่วไปวิถีในกราฟยาวมากเท่าใดการเปลี่ยนระดับเสียงยิ่งแปร่งมากเท่านั้น

กราฟในตัวอย่างนี้เป็นเพียงกราฟหนึ่งในหลาย ๆ กราฟที่นักแต่งเพลงหลายคนใช้ เช่น มาคซ์ มิลตัน เป็นต้น

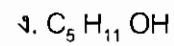
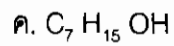
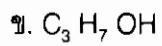
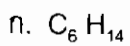


แบบฝึกหัด

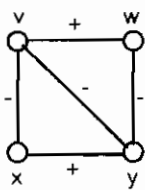
1. ให้เขียนกราฟของโมเลกุลคาร์บอนต่อไปนี้



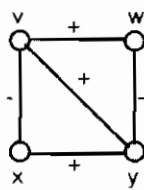
2. ให้เขียนกราฟของสูตรเคมีต่อไปนี้



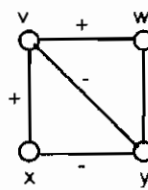
3. ให้หาว่ากราฟเครื่องหมายแบบใดต่อไปนี้มีความสมมูลย์ และให้หากราฟแบ่งกันที่สมนัยกับกราฟเครื่องหมาย



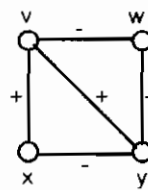
ก



ข

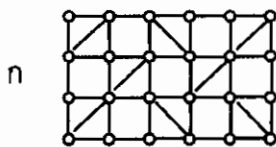


ค

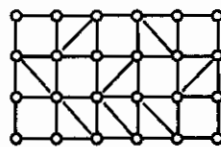


ง

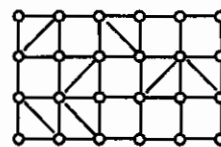
4. จอห์น ชอบ โจแอน จิน และเจน แต่จอห์น ไม่ชอบใจ กับ วิลล์ จิลชอบใจ แต่ใจ ไม่ชอบใจแอน จินและเจน โจแอน จิน และเจนชอบซึ่งกันและกัน แต่ต่างคนต่างไม่ชอบวิลล์ ให้เขียนกราฟ เครื่องหมาย แทนความสัมพันธ์และให้อธิบายว่ากราฟนี้สมดุลงหรือไม
5. ให้จำลองสถานการณ์ต่อไปนี้ด้วยกราฟเครื่องหมาย และให้อธิบายว่าความสัมพันธ์เป็นแบบ สมดุลงหรือไม (ให้ความสัมพันธ์เป็นแบบสมมาตรได้นั้นคือ ถ้า x ชอบ y y ชอบ x)
 - ก. A ชอบ C และ E แต่ A ไม่ชอบ B กับ D B ชอบ D แต่ไม่ชอบ C D ไม่ชอบ C และ E
 - ข. A ชอบ Bกับ D แต่ไม่ชอบ E Bไม่ชอบ C D และ E D ไม่ชอบ C กับ E
 - ค. แจ็ค ชอบ ลิน และ มิก แต่ไม่ชอบ แคท มิก ไม่ชอบ อีว กับ แคท ลิน ไม่ชอบ อีว แคท และ มิก
 - ง. มาร์ค ชอบ แอนกับลิซ แต่ไม่ชอบจิว กับ แกละ แกละไม่ชอบแอนกับลิซ จิวชอบแกละ แต่ไม่ ชอบลิซ
6. จงอธิบายให้เห็นว่าทุกวงเวียนในกราฟเครื่องหมายแบบสมดุลงมีเส้นเชื่อมลบเป็นจำนวนคู่ (0 เป็นจำนวนคู่)
7. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟเครื่องหมายในข้อ 3 ที่เป็นแบบสมดุลงมีเส้นเชื่อมลบเป็นจำนวนคู่
8. ให้เขียนกราฟต้นไม้แสดงโครงสร้างประโยคภาษาอังกฤษ "Good pupils read books"
9. ให้ใช้กราฟแบ่งกันพิจารณาว่าโครงสร้างต่อไปนี้ใช้คานเสริมมากน้อยเกินไป หรือพอดี



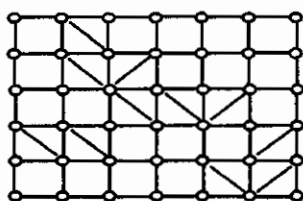
ข



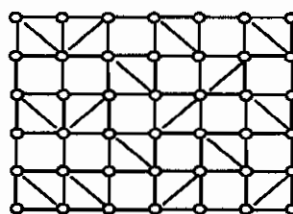
ค



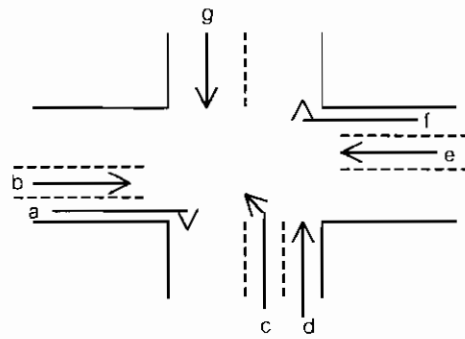
ง



จ



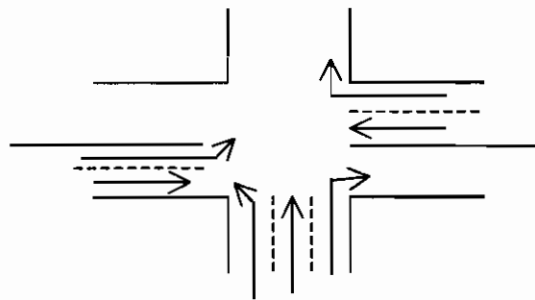
10. แผนผังเส้นทางเดินรถบริเวณสี่แยกแห่งหนึ่ง



ซึ่งในการแก้ไขปัญหาการให้สัญญาณไฟจราจร จะต้องหาชุดของกราฟย่อยแบบสมบูรณ์ของกราฟ G แบบเข้ากันได้ที่รวมทุกจุดของกราฟ G ชุดของกราฟย่อยต่อไปนี้เป็นแบบสมบูรณ์หรือไม่

- ก. $\{abc, cdg, ef\}$ ข. $\{abcf, acd, fg\}$

11. จากแผนผังเส้นทางเดินรถต่อไปนี้



- ก. ให้เขียนแบบเข้ากันได้ G
 ข. ให้หาชุดของกราฟย่อยแบบสมบูรณ์ที่รวมแต่ละจุดของ G
 ค. ให้ใช้ผลจากข้อ ข. หาลำดับการเปิดสัญญาณไฟจราจรที่เหมาะสมและหาเวลาที่ต้องรอทั้งหมด ถ้ากำหนดว่าสัญญาณไฟมีจังหวะหมุนเวียน 60 วินาที

12. การเปลี่ยนลำดับเสียงดนตรีในข้อใดมีระยะห่างน้อยที่สุด

- ก. A^b ไมเนอร์ ไป $G^\#$ เมเจอร์ ข. D ไมเนอร์ ไป B^b ไมเนอร์

- ค. A เมเจอร์ไป D[#] ไมเนอร์
- จ. D เมเจอร์ไป E^b ไมเนอร์
- ช. F[#] ไมเนอร์ไป F[#] เมเจอร์

- ง. G[#] ไมเนอร์ไป D^b เมเจอร์
- ฉ. A[#] ไมเนอร์ไป F เมเจอร์
- ข. D[#] เมเจอร์ไป C[#] ไมเนอร์