บทที่ 10
การให้สีกราฟ

10.1 นำเรื่อง

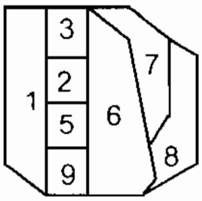
ในพุทธศตวรรษที่ 25 มีพัฒนาการทางคณิตศาสตร์ เรื่องหนึ่งที่น่าสนใจมาก คือเรื่องของการกำหนดสีกราฟ หรือทฤษฎีการให้สี 4 สีในกราฟ เป็นปัญหาซึ่งทำความเข้าใจได้ง่าย แต่ไม่มีใครสามารถแก้ปัญหาได้ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2395 ซึ่งเป็นปีที่นักศึกษาชาวไอร์แลนด์ชื่อฟรานซิส คูทรี ได้ค้นพบว่า แผนที่ประเทศอังกฤษใช้สีระบายเพียง 4 สี ภายใต้เงื่อนไขว่าแต่ละเมืองใช้สี 1 สี และเมืองที่มีขอบเขตติดกันต้องให้สีต่างกัน คูทรีจึงเกิดความคิดว่าแผนที่ประเทศต่าง ๆ ในโลกนี้สามารถจะใช้สีระบายเพียง 4 สีได้หรือไม่ภายใต้เงื่อนไขว่าประเทศที่มีพรมแดนติดกันต้องใช้สีต่างกัน คูทรีเสนอปัญหานี้ให้ศาสตราจารย์ออกุสตุส เดอ มอร์แกน นักคณิตศาสตร์ผู้มีชื่อเสียงคนหนึ่งในขณะนั้นซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่าในแผนที่โลกประเทศต่างๆ จำนวน 5 ประเทศ จะไม่มีประเทศหนึ่งประเทศใด ที่มีพรมแดนติดกับอีก 4 ประเทศ การพิสูจน์นี้แม้จะสนับสนุนข้อคาดคะเนของคูทรีแต่ไม่ได้แก้ปัญหาที่นำเสนอไว้

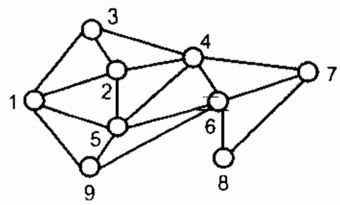
อันที่จริงก็รู้กันมานานแล้วว่าการระบายสีแผนที่ประเทศต่าง ๆ ใช้สีเพียง 5 สี แต่นับเป็นเวลานานมากว่า 100 ปี ที่ไม่มีใครจะสามารถพิสูจน์ได้ว่าใช้สีระบายเพียง 4 สีก็พอ จนถึง พ.ศ. 2422 วารสารคณิตศาสตร์ ซึ่งมีชื่อเสียงในอเมริกา ชื่อ American Journal of Mathematics ได้ลงผลงานการพิสูจน์เรื่องกราฟ 4 สี ของอัลเฟรด บี เคมป์ ทนายความชาวลอนดอน แต่ 11 ปีต่อมาก็มีผู้ค้นพบว่า ผลการพิสูจน์มีข้อผิดพลาดอันสำคัญ ดังที่เปอร์ซี เฮย์วูด ชี้ว่าข้อโต้แย้งของเคมป์เป็นจริงในกรณีใช้ 5 สี แต่ถ้าใช้ 4 สี ข้ออ้างใช้ไม่ได้ ต่อมาใน ปีพ.ศ. 2519 ศาสตราจารย์เคนเนธ แอปเปล ร่วมกับศาสตราจารย์ วุล์ฟแกง ฮาเกน พิสูจน์ทฤษฎีการใช้สีเพียง 4 สีว่าเป็นจริงและแสดงผลงานในวารสารคณิตศาสตร์แห่งอิลลินอยส์ และมีความยาวถึง 140 หน้า การพิสูจน์ชี้ให้เห็นว่ากราฟระนาบใด ๆ จะต้องมีกราฟย่อยบางชนิดอยู่ด้วย และเมื่อลบกราฟย่อยนี้ออกไปกราฟที่ลดรูปนี้จะใช้สีระบายเพียง 4 สี แอปเปล กับ ฮาเกน ใช้เวลาของเครื่องคอมพิวเตอร์ 1,200 ชั่วโมง วิเคราะห์กราฟจำนวนเกือบ 2,000 กราฟ และแยกกรณีศึกษากราฟต่าง ๆ เป็นจำนวนนับมาก

กว่าสิบพันล้านกราฟ การวิเคราะห์สามารถขยายผลถึงการใช้สี 4 สีในกราฟย่อย และทำให้ได้ทฤษฎีว่ากราฟระนาบใด ๆ จะใช้สีเพียง 4 สี นั่นคือ การระบายสีแผนที่บนระนาบใช้ 4 สีได้

10.2 <u>การให้สีกราฟ</u>

จุดมุ่งหมายในหัวข้อนี้คือ การแสดงวิธีที่ทฤษฎีกราฟสามารถใช้แก้ปัญหาการกำหนดจำนวนสีและพิสูจน์ให้เห็นว่าการระบายสีแผนที่ใด ๆ จะใช้สีไม่เกิน 5 สี





ในตอนแรกนี้ขอให้สังเกตว่าในแผนที่ใด ๆ จะมีกราฟระนาบซึ่งเป็นแบบที่เรียกว่า <u>กราฟคู่กัน</u> (dual graph) ที่มีจุดยอดแทนประเทศ และเส้นเชื่อมแทนพรมแดนระหว่างประเทศที่ติดกัน ดังเช่นแผนที่ข้างบนมีประเทศ 9 ประเทศ ดังนั้นในกราฟคู่กันจะมีจุดยอด 9 จุด และเนื่องจากประเทศที่ 5 และประเทศที่ 6 มีพรมแดนติดกัน ดังนั้น ในกราฟคู่กันจุดยอดที่ 5 กับจุดยอดที่ 6 จะมีเส้นเชื่อมกัน จุดสำคัญในการระบายสีแผนที่หรือการให้สีกราฟ คือ ประเทศที่มีพรมแดนติดกันหรือจุดยอดที่ประชิดกันต้องให้สีต่างกัน ดังนั้น ในตัวอย่างแผนที่ที่กำหนดให้และกราฟคู่กันสามารถใช้สีได้ดังนี้

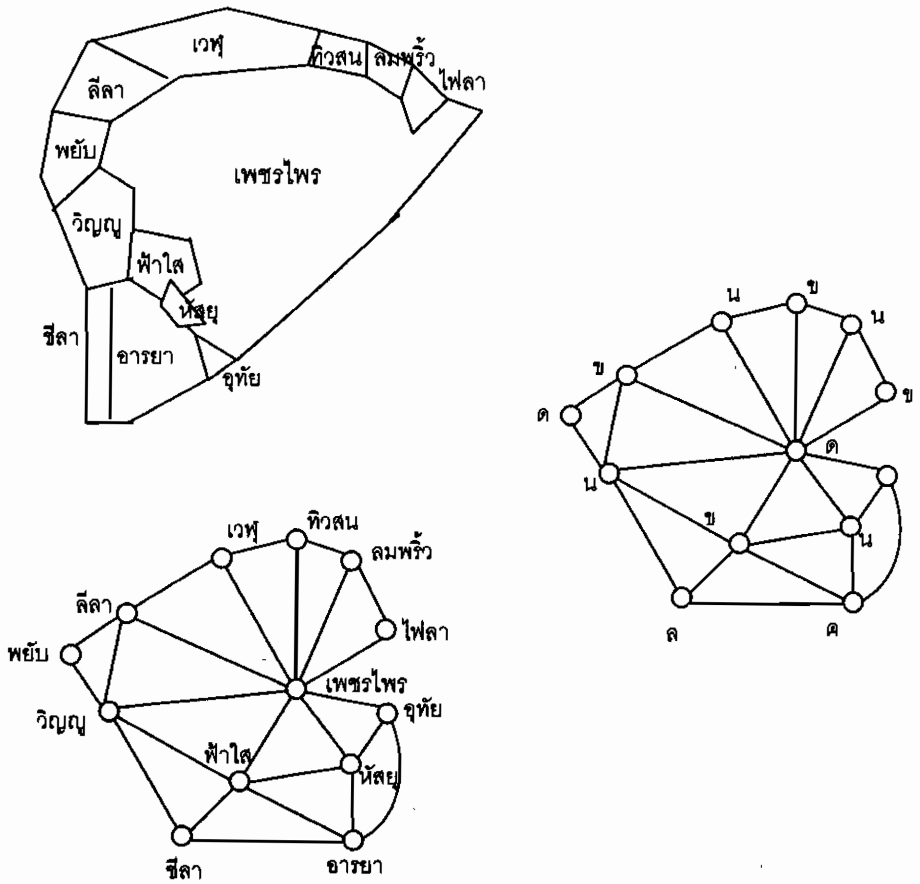
1 สีแดง	2 สีน้ำเงิน
3 สีเขียว	4 สีแดง
5 สีเขียว	6 สีน้ำเงิน
7 สีเขียว	8 สีแดง
9 สีเหลือง	

<u>บทนิยาม 10.2.1</u>

การให้สีกราฟ G หมายถึงการกำหนดสีให้แก่จุดยอดในกราฟ G จำนวน 1 สีต่อ 1 จุด และ 2 จุดที่ประชิดกันต้องให้สีต่างกัน

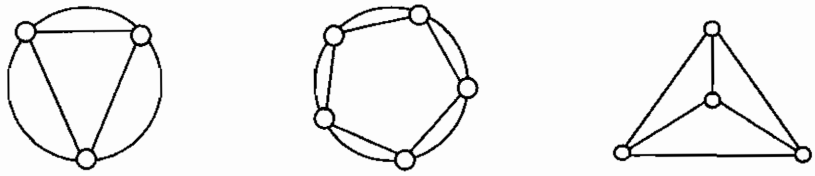
<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

แสดงวิธีการเขียนกราฟคู่กัน และการให้สีกราฟของแผนที่ทวีป Atlantis



จะเห็นได้ว่าบริเวณทั้ง 13 แห่ง ในทวีปแอตแลนติส เขียนเป็นกราฟคู่กันได้จุดยอด 13 จุด และจุดประชิด หรือบริเวณที่มีเขตติดต่อกันจะใช้สีต่างกัน สีที่ใช้ทั้งหมด คือ สีเขียว (ข) สีเหลือง (ล) สีแดง (ด) และสีน้ำเงิน (น) เป็นจำนวน 4 สี

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ให้แสดงวิธีการเขียนกราฟคู่กันจากกราฟที่กำหนดให้ ต่อไปนี้

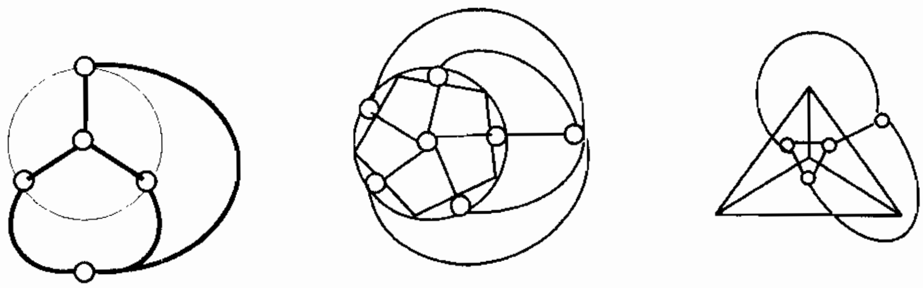


(1) (2) (3)

<u>วิธีทำ</u>

ขั้นแรก กำหนดจุดยอด 1 จุดสำหรับ 1 เขตของกราฟที่กำหนดให้

ขั้นสอง ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุด ซึ่งเกิดจากเขต 2 เขต ที่มีเส้นเชื่อมร่วมกันจะได้กราฟคู่กัน ดังนี้

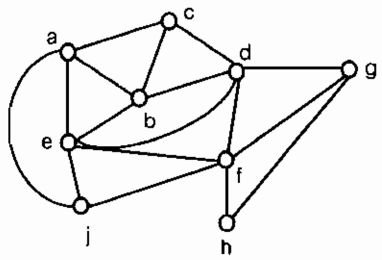


<u>ข้อสังเกต</u> กราฟที่กำหนดให้และกราฟคู่กันต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากัน นอกจากนั้น จำนวนจุดยอดในกราฟคู่กันต้องเท่ากับจำนวนเขตของกราฟที่กำหนดให้

การให้สีกราฟสามารถให้สีต่าง ๆ กันที่แต่ละจุดยอด แต่กราฟส่วนมากจะมีจำนวนสีที่ใช้น้อยกว่าจำนวนจุดยอด จึงมีคำถามว่าจำนวนสีที่ใช้ให้น้อยที่สุดตามความจำเป็นเท่ากับเท่าใด

บทนิยาม 10.2.2
จำนวนสีของกราฟ G (Chromatic number) คือจำนวนสีซึ่งน้อยที่สุดที่ใช้ในการให้สีกราฟ G และใช้สัญลักษณ์ χ (G)

ตัวอย่างที่ 3 จากกราฟ G ที่กำหนดให้



จะเห็นได้ว่าจุดยอด a, b, c มีเส้นเชื่อมถึงกันเป็นรูปสามเหลี่ยมดังนั้น จะต้องให้สีแตกต่างกัน 3 สี เช่นให้เป็นสีแดง น้ำเงิน และเขียว ตามลำดับ จากนั้น ใช้สีแดงกับจุด d สีเขียวกับจุด e และสีฟ้าใช้กับจุด f และเพราะว่าจุด j ประชิดกับจุด a, e, f ซึ่งมีสีแดง เขียว และน้ำเงิน ดังนั้น จึงจำเป็นต้องให้สีต่างจากสีทั้งสามที่ใช้แล้ว นั่นคือ กราฟ G ในที่นี้มี χ (G) $\leq$ 4 = 4

ทฤษฎีบท 10.1
ถ้า $\triangle$ (G) เป็นดีกรีสูงสุดของจุดยอดในกราฟ G แล้ว χ (G) $\leq 1 + \Delta$ (G)

พิสูจน์ (ใช้คณิตศาสตร์อุปนัย)
ให้ V เป็นจำนวนจุดยอดใน G ถ้า V = 1 จะมี Δ (G) = 0 ดังนั้น χ (G) $\leq 1 + \Delta$ (G) ให้ k เป็นจำนวนเต็ม และ k $\geq$ 1 ตามหลักการของคณิตศาสตร์อุปนัย ให้ χ (G) $\leq 1 + \Delta$ (G) เป็นจริง

สำหรับ V = k ถ้า G เป็นกราฟซึ่งมีจุดยอดเป็นจำนวน k + 1 ให้ u เป็นจุดใด ๆ ใน G และให้กราฟ G_0 = G - {u} เป็นกราฟย่อยของ G ที่ไม่มีจุดยอด u (ทุกเส้นใน G โยงกับจุดยอด u) เพราะว่า $\Delta(G_0) \leq \Delta(G)$ ดังนั้นจำนวนสีของ G_0 คือ $X(G_0)$และเนื่องจาก G_0 มีจำนวนจุดยอดใน k เพราะฉะนั้นตามหลักคณิตศาสตร์อุปนัย

$$\chi(G_0) \leq 1 + \Delta(G_0)$$

นั่นคือกราฟ ใช้สีอย่างมากที่สุดจำนวน $1 + \Delta(G)$ และเพราะว่ามีจุดยอดอย่างมากที่สุดจำนวน $\Delta(G)$ ที่ประชิดกับจุด u ดังนั้นจึงมีสีอีก 1 สีใน $1 + \Delta(G)$ สำหรับจุด u นั่นคือ กราฟ G ใช้สีอย่างมากที่สุด $1 + \Delta(G)$

ตัวอย่างที่ 4

จงให้เหตุผลว่าเพราะเหตุใด $\chi(K_n) = n$ และ$\chi(K_{m,n}) = 2$

วิธีทำ

K_n ต้องใช้สีจำนวน n สีเพราะจุดยอด 2 จุดใด ๆ ใน K_n เป็นจุดประชิด ดังนั้น $\chi(K_n) = n$ แต่ $\chi(K_{m,n}) = 2$ เพราะว่าจุดยอดในเซตเดียวกันของกราฟสองส่วนไม่มีเส้นประชิด จึงใช้เพียง 2 สี สำหรับจุดยอดในกราฟ 2 ส่วน

ตัวอย่างที่ 5

ให้ใช้ผลจากทฤษฎีบท $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ แสดงให้เห็นว่า $\chi(K_n) = n$

วิธีทำ

เพราะว่าในกราฟ K_n จำนวนดีกรีสูงสุดของจุดยอด หรือ $\Delta K_n = n - 1$ ดังนั้น $\chi(K_n) \leq 1 + \Delta(K_n) = 1 + n - 1 = n$

ตัวอย่างที่ 6

ให้ใช้ผลจากทฤษฎีบท χ (G) $\leq$ 1 + Δ (G) แสดงให้เห็นว่ากราฟแบบวงเวียน G ที่มีจำนวนเส้นเชื่อม n เส้นจะมี χ (G) = 2 หรือ χ (G) = 3

วิธีทำ

เนื่องจากกราฟ G เป็นกราฟวงเวียน จะมี Δ (G) = 2 จึงเห็นได้ง่ายว่าถ้ากราฟ G มีจุดยอดเป็นจำนวนคู่ จะได้ χ (G) $\leq$ Δ (G)

นั่นคือ χ (G)= 2

แต่ถ้ามีจุดยอดเป็นจำนวนคี่

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G) = 1 + 2 = 3$$

หมายเหตุ

ทฤษฎีของ อาร์. แอล. บรูกส์ ในเรื่องการให้สีจุดยอดของกราฟข่ายงานชี้ให้เห็นว่ากราฟเชื่อมโยง G ซึ่ง χ (G) = 1 + Δ (G) จะมีเฉพาะในกราฟ K_n กับกราฟวงเวียนที่มีจุดยอดเป็นจำนวนคี่เท่านั้น สำหรับกราฟเชื่อมโยงอื่น ๆ χ (G) $\leq$ Δ (G)

นอกจากทฤษฎีเกี่ยวกับการให้สีกราฟยังมีขั้นตอนวิธีตามหลักของเวลช์ และเพาเวลล์ ในการให้สีกราฟ G ซึ่งช่วยให้รู้จำนวนเลขสีว่าสูงสุดไม่เกินเท่าใดด้วย ในบางกรณีการใช้ขั้นตอนวิธีนี้ง่าย แต่ในบางครั้งอาจจะซับซ้อนและใช้เวลานาน

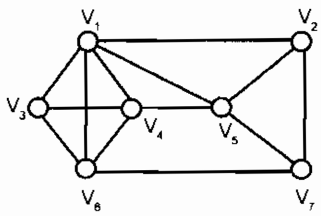
10.3 ขั้นตอนวิธีของเวลช์และเพาเวลล์

ในการกำหนดสีของกราฟ G มีวิธีการเรียงตามลำดับดังนี้คือ

1. เรียงลำดับจุดยอดของกราฟ G ตามจำนวนดีกรีจุดยอดซึ่งมีดีกรีเท่ากันให้เรียงติดกัน
2. เริ่มใช้สีแรก หรือสีที่หนึ่งกับจุดยอดซึ่งมีจำนวนดีกรีสูงสุด และจุดยอดที่มีจำนวนดีกรีสูงสุดรองลงมา ซึ่งไม่ได้เป็นจุดประชิดของจุดยอดที่มีดีกรีสูงสุด

3. ใช้สีที่สองกับจุดยอดที่มีดีกรีรองลงมาซึ่งยังไม่ได้ให้สี และจุดยอดที่ไม่ประชิดกับจุดยอดในข้อ 2
4. ทำตามขั้นตอนซ้ำจนกระทั่งทุกจุดมีสีครบ

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> ให้ใช้ขั้นตอนวิธีของเวลช์และเพาเวลล์ กำหนดสีกราฟ ต่อไปนี้



<u>วิธีทำ</u>

ใช้ขั้นตอนวิธีของเวลช์และเพาเวลล์ตามลำดับโดยใช้ตารางเพื่อให้เห็นชัดเจนได้ดังนี้

จุด	V_1	V_4	V_3	V_6	V_2	V_5	V_7
ดีกรี	5	4	4	4	3	3	3
สี	1	2	3	3	2	4	1

จำนวนสีที่ใช้น้อยที่สุด คือ 4 สี

<u>ทฤษฎีบท</u> 10.2

ถ้า G เป็นกราฟระนาบแล้ว $\chi(G) \leq 5$

<u>พิสูจน์</u> (ใช้คณิตศาสตร์อุปนัย)

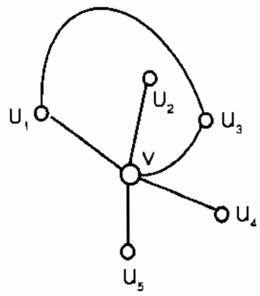
ในการพิสูจน์จะต้องแสดงว่ากราฟระนาบใด ๆ ที่มีจุดยอดจำนวน V จุดใช้สีไม่เกิน 5 สี

ถ้ากราฟ G มีจำนวนจุดเพียง 1 จุด นั่นคือ V = 1 เห็นได้ชัดเจนว่า $\chi(G) \leq 5$

ให้ k เป็นจำนวนเต็ม และ $k \geq 1$ และให้กราฟระนาบใด ๆ ที่มีจำนวนจุด k จุด ใช้สี 5 สี

ถ้าให้ G เป็นกราฟระนาบซึ่งมีจำนวนจุดเป็น k + 1 จุด และเขียนกราฟ G โดยใช้เส้นตรง เพราะว่า G เป็นกราฟระนาบดังนั้นต้องมีจุดยอด 1 จุดที่มีดีกรีสูงสุดไม่เกิน 5 ให้ G_0 = G - v เป็นกราฟย่อยของ G ซึ่งลบจุด v ออก ตามหลักของคณิตศาสตร์อุปนัยกราฟ G_0 ใช้สีจำนวน 5 สี สมมุติให้เป็นสี 1 สี 2 สี 3 สี 4 และ สี 5 ซึ่งถ้าจุด v ไม่ได้ประชิดกับจุดยอดใดที่ใช้สีทั้ง 5 นี้ จะสามารถใช้สีใดสีหนึ่งกับจุด v และกราฟ G ใช้สีเพียง 5 สี

สมมุติให้ v มีดีกรี 5 และประชิดกับจุดยอด u_1, u_2, u_3, u_4 และ u_5 ซึ่งใช้สี 1 ถึง สี 5 ตามลำดับ และตามเข็มนาฬิกา



ต่อไปจะแสดงให้เห็นวิธีการให้สีใหม่ เพื่อให้มีสีเหลือ 1 สี สำหรับจุด v ซึ่งมีวิธีการที่เป็นไปได้ 2 วิธี

<u>วิธีแรก</u>

ไม่มีวิถีจากจุดทั้งหลายใน G_0 ที่ใช้สี 1 หรือ 3 นั่นคือไม่มีวิถี u_1 - u_3

ตามวิธีนี้ ให้ H เป็นกราฟย่อยของ G และให้ H ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมทั้งหลายที่มีวิถีผ่าน u_1 หรือ u_3 และให้เริ่มที่จุด u เนื่องจากตามสมมุติฐานไม่มีวิถี u_1 - u_3 แสดงว่าต้องไม่มี u_3 ใน H และจุดยอดใด ๆ ซึ่งไม่อยู่ใน H แต่ประชิดกับจุดยอดที่ใช้สี 1 กับ สี 3 จุดยอดเหล่านี้ใช้สีอื่น ดังนั้น แสดงว่ามีการให้สีสลับกันไประหว่าง สี 1 กับ สี 3 ใน H นั่นคือ กราฟ G ใหม่จะใช้สีไม่เกิน 5 สี ซึ่งทั้ง u_1 และ u_3 ต้องใช้สี 3 ดังนั้นจุดยอด v จะได้รับการให้สีหนึ่งสีได้โดยอิสระ ทำให้การให้สีใน G ไม่เกิน 5 สี

<u>วิธีที่สอง</u>

ให้มีวิถี P ใน G_0 จากจุดยอด u_1 ถึง u_3 โดยผ่านจุดต่าง ๆ ทั้งหลายซึ่งใช้สี 1 หรือ สี 3 ตามวิธีนี้ วิถี P ซึ่งต่อด้วยจุดยอด v และ u_1 จะทำให้เกิดวงเวียนใน G ซึ่งวงเวียนนี้ไม่รวมทั้ง u_2 และ u_4 ดังนั้น วิถีใด ๆ จาก u_2 ถึง u_4 ต้องตัดวิถี P และเนื่องจาก G เป็นกราฟระนาบ การตัดผ่านวิถีนี้เกิดขึ้นเฉพาะที่จุดยอดของวิถี P เป็นผลตามมาอีกไม่มีวิถีจาก u_2 ถึง u_4 ใน G_0 ที่ใช้สีเพียง 2 สี คือ สี 2 กับ สี 4 ดังนั้นเช่นเดียวกันกับวิธีแรกสถานการณ์ คือใช้สีได้ 5 สี ในกราฟ G

ในตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นวิธีการนำหลักการของจำนวนเลขสีไปใช้ในการแก้ปัญหาที่พบกันโดยทั่วไปในมหาวิทยาลัย ปัญหานั้นคือ การจัดตารางสอบ ในมหาวิทยาลัยขนาดกลาง จะมีวิธีการจัดตารางสอบ 500 ถึง 600 วิชาในช่วงเวลาอันสั้น หลักสำคัญคือ การจัดให้มีการสอบซ้ำซ้อนของนักศึกษาให้น้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 11

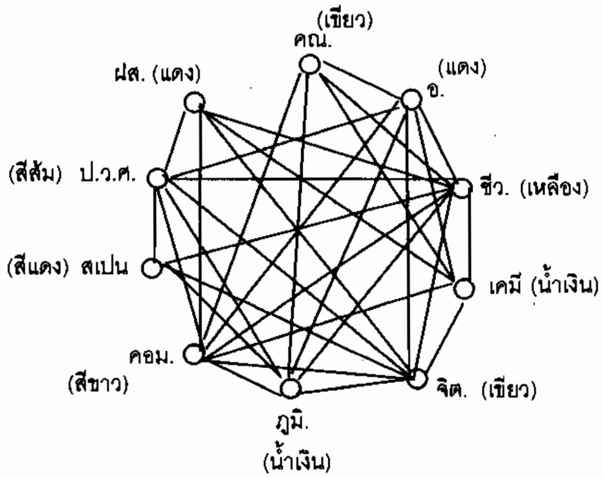
สมมุติว่าในเทอมการศึกษาหนึ่งมีนักศึกษาลงทะเบียนเรียนวิชาต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

คณิตศาสตร์	ภาษาอังกฤษ	ชีววิทยา	เคมี
คณิตศาสตร์	ภาษาอังกฤษ	วิทยาการคอมพิวเตอร์	ภูมิศาสตร์
ชีววิทยา	จิตวิทยา	ภูมิศาสตร์	ภาษาสเปน
ชีววิทยา	วิทยาการคอมพิวเตอร์	ประวัติศาสตร์	ภาษาฝรั่งเศส
ภาษาอังกฤษ	จิตวิทยา	ประวัติศาสตร์	วิทยาการคอมพิวเตอร์
จิตวิทยา	เคมี	วิทยาการคอมพิวเตอร์	ภาษาฝรั่งเศส
จิตวิทยา	ภูมิศาสตร์	ประวัติศาสตร์	ภาษาสเปน

ปัญหาคือ จะจัดตารางสอบให้มีคาบการสอบจำนวนต่ำสุดเท่าใด สำหรับกระบวนวิชา 10 วิชาข้างต้น โดยมีเงื่อนไขว่านักศึกษาไม่มีการสอบซ้ำซ้อน

วิธีทำ

เพื่อใช้ในการพิจารณาสถานะการณ์ จะสร้างกราฟซึ่งมีจุดยอด 10 จุด คือ คณ. อ. ชีว. เคมี คอม. ภูมิ. จิต. สเปน. ปวศ. ฝส. และกระบวนวิชา 2 วิชา ซึ่งไม่สอบซ้ำซ้อนจะมีเส้นเชื่อมถึงกัน



ปัญหาของการจัดตารางสอบในที่นี้ คือ ให้มีการสอบเป็นจำนวนคาบให้น้อยที่สุด ซึ่งในที่นี้คือจำนวนสีของกราฟในรูปข้างต้น เนื่องจากกราฟนี้มีกราฟย่อยเป็นกราฟสมบูรณ์ K_5 ดังนั้น จะต้องใช้สีที่แตกต่างกันอย่างน้อยที่สุด 5 สี (จุดยอด คณ. อ. ชีว. ภูมิศาสตร์, วิทยาการคอมพิวเตอร์) นั่นคือกระบวนวิชา 5 วิชานี้ต้องสอบในคาบเวลาที่แตกต่างกัน แต่ 5 สี ไม่เพียงพอ เนื่องจากวิชาจิตวิทยากับประวัติศาสตร์ เป็นจุดประชิดกันและต่างประชิดกับจุด อ. ชีว. ภูมิและคอมพิวเตอร์ ดังนั้นจำนวนสีของกราฟ (ซึ่งแทนคาบการจัดตารางสอบ) คือ 6 สี กล่าวโดยสรุปว่าเพื่อไม่ให้มีการสอบซ้ำซ้อน จะต้องแบ่งการสอบออกเป็น 6 คาบ ดังนี้

คาบ 1	คณิต จิตวิทยา
คาบ 2	อ. สเปน ฝส.
คาบ 3	ชีววิทยา
คาบ 4	เคมี ภูมิศาสตร์
คาบ 5	วิทยาการคอมพิวเตอร์
คาบ 6	ประวัติศาสตร์

ข้อสังเกต

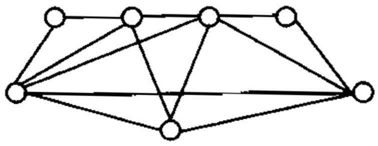
จำนวนต่ำสุดของคาบการสอบไล่ คือ จำนวนเลขสีของกราฟเพราะว่ากราฟนี้มีกราฟย่อยแบบ K_5 (จุดยอดคือ คณิต, อ, ชีว, ภูมิ, คอม) จึงต้องใช้สีอย่างน้อยที่สุด 5 สี (วิชาที่สอบซึ่งแทนด้วยจุดเหล่านี้ต้องจัดตารางเวลาสอบให้แตกต่างกัน) จะใช้สี 5 สีในกราฟนี้ไม่พอเพียง แต่เพราะว่าวิชาจิตวิทยา กับประวัติศาสตร์ ต่างก็ประชิดกับวิชาภาษาอังกฤษ ชีววิทยา ภูมิศาสตร์ และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ดังนั้น จำนวนสีที่ใช้จะเท่ากับ 6

❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖

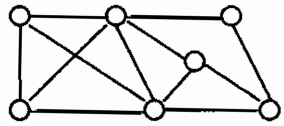
แบบฝึกหัด

1. ถ้ากราฟ G มี $\chi(G) = 1$ แสดงว่า G เป็นกราฟแบบใด
2. ให้หาจำนวนเลขสี่ $\chi(G)$ ของกราฟต่อไปนี้ พร้อมทั้งแสดงวิธีทำและอธิบายประกอบคำตอบในแต่ละกรณีด้วย

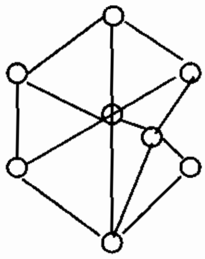
2.1



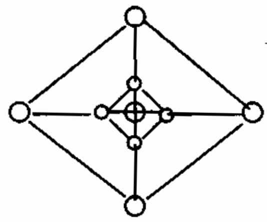
2.2



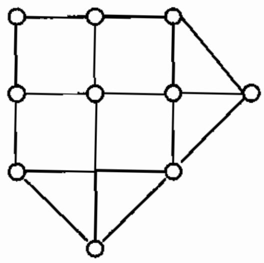
2.3



2.4

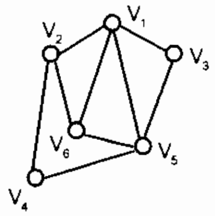


2.5

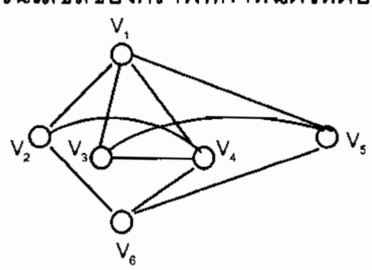


3. กราฟต้นไม้เป็นกราฟระนาบหรือไม่ อธิบาย
4. ให้หาจำนวนเลขสี่ของกราฟ K_6 กราฟ K_{10}
5. ให้ใช้ขั้นตอนวิธีของเวลซ์ เพาเวลล์ หาจำนวนเลขสีของกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

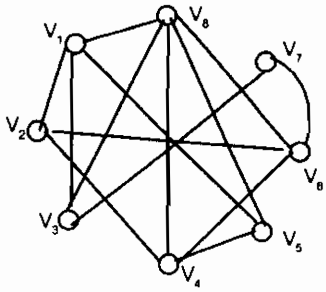
5.1



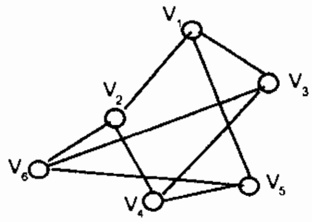
5.3



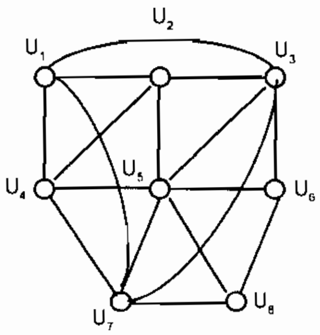
5.2



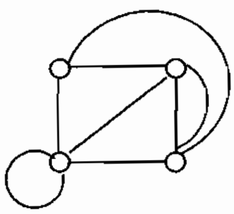
5.4



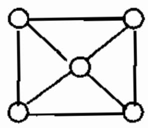
6. **ให้ใช้ขั้นตอนวิธีของเวลช์ เพาเวลล์ของจำนวนเลขสีของกราฟ**



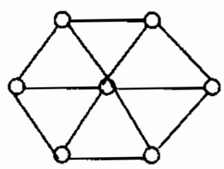
7. **ให้หาจำนวนเลขสีของกราฟสองส่วน** $K_{3,4}$ และ $K_{2,6}$
8. **จงพิสูจน์ให้เห็น**ว่ากราฟสองส่วนมีจำนวนเลขสีเท่ากับ 2
9. **ให้เขียนกราฟคู่กันจากกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้**



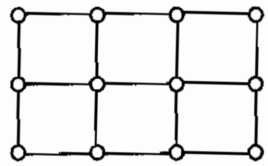
(1)



(2)



(3)



(4)

10. ในการสอบไล่ปลายปีมีวิชาต่าง ๆ 7 วิชาที่ต้องจัดสอบดังนี้ คือ

วิชา เลขคณิต (A) ชีววิทยา (B) เคมี (C) ศิลปวาดรูป (D)

ภาษาอังกฤษ (E) ภาษาฝรั่งเศส (F) และภาษาเยอรมัน (G)

ถ้ามีวิชาที่นักศึกษาลงทะเบียนไว้เป็นคู่ ๆ ต่าง ๆ คือ

AB, AC, AD, AG, BC, BD, BE, BG, CD, CF, CG, DE, DF, EF, EG, FG

จะมีวิธีการจัดตารางสอบอย่างไรเพื่อให้มีคาบการสอบน้อยที่สุด (นักศึกษาไม่ต้องสอบซ้ำซ้อน)