บทที่ 1
กราฟ (GRAPHS)

1.1 นำเรื่อง

พ.ศ. 2276 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ผู้ได้รับการยกย่องว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่คนหนึ่งของพุทธศตวรรษที่ 24 ได้เริ่มต้นงานทฤษฎีกราฟจากการนำเสนอผลงานแสดงวิธีการแก้ปัญหาของสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก

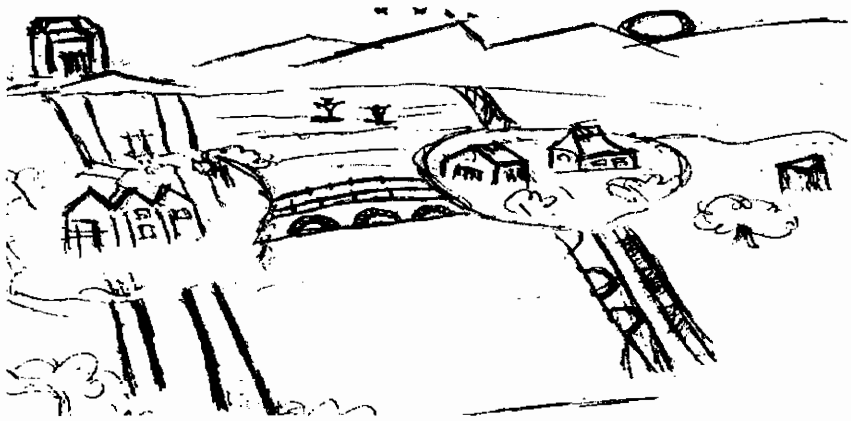
เพื่อเป็นการระลึกถึงและยกย่องออยเลอร์ นักคณิตศาสตร์ ชาวสวิสผู้ริเริ่มทฤษฎีกราฟ ขอกล่าวถึงประวัติและผลงานของออยเลอร์พอเป็นสังเขป

ออยเลอร์เกิดที่เมืองเนเซล ประเทศสวิตเซอร์แลนด์ พุทธศักราช 2250 ได้เล่าเรียนและศึกษาต่อจนถึงระดับอุดมศึกษาเรียนต่อในระดับปริญญาโท เมื่ออายุเพียง 17 ปี และได้รับเลือกให้เป็นหัวหน้าภาคคณิตศาสตร์ของสถาบันเซนต์ปีเตอร์สเบอร์ก ประเทศรัสเซีย

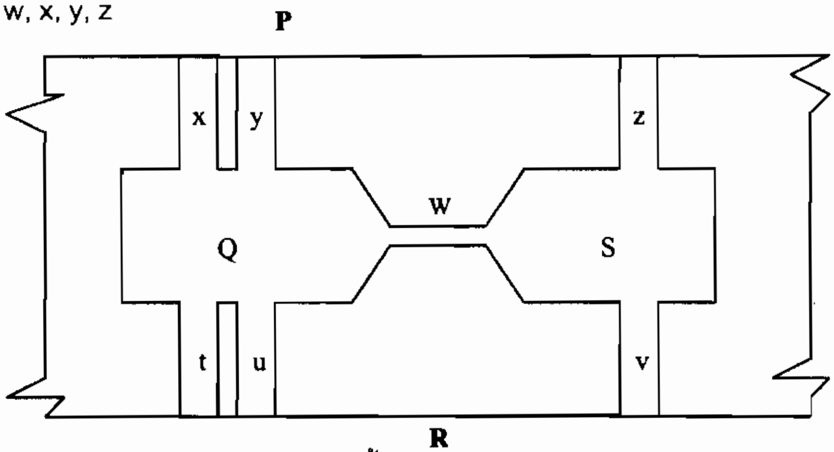
ออยเลอร์แต่งงานและความที่รักเด็ก ๆ ออยเลอร์มีลูกถึง 13 คน พร้อมกับผลิตงานคณิตศาสตร์ออกมาเป็นจำนวนมากทั้งหนังสือและรายงานมากกว่า 500 เรื่อง งานวิจัยด้านคณิตศาสตร์ของออยเลอร์โดยเฉลี่ยปีละ 800 หน้า ออยเลอร์มีความทรงจำเป็นเลิศและสามารถคิดคำนวณในใจได้อย่างรวดเร็ว

ออยเลอร์สูญเสียสายตาไปข้างหนึ่งเมื่อเริ่มต้นทำงานอาชีพ และในขณะที่อายุได้ 56 ปี ก็พบว่ากำลังจะเสียตาไปอีกข้างหนึ่งออยเลอร์จึงเตรียมตัวรับสภาวะของคนตาบอดด้วยการฝึกหัดเขียนสูตรบนกระดานขนาดใหญ่ ต่อมาเมื่อออยเลอร์อายุได้ 60 ปี ก็ตาบอดสนิททั้งสองข้าง ซึ่งสภาวะเช่นนี้คนปกติมักจะหยุดทำงานหรือทำงานได้ช้าลง แต่สำหรับออยเลอร์ผลงานกลับรุ่งโรจน์มากขึ้น

กลับมาที่ปัญหาสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก ซึ่งประกอบด้วย แผ่นดินสองฝั่งแม่น้ำ และเกาะสองแห่งกลางแม่น้ำ ดินแดนทั้งสี่แห่งเชื่อมถึงกันด้วยสะพานเจ็ดแห่ง (ดังภาพ)

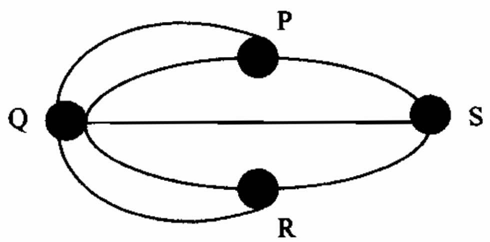


จากกราฟวาด เมื่อจำลองเป็นแผนผังและกำหนดสถานที่ 4 แห่งกับสะพาน 7 แห่ง ด้วยอักษร P, Q, R, S กับ t, u, v, w, x, y, z



ปัญหาสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก ตั้งไว้ว่า ชาวเมืองโคนิกสเบอร์กจะสามารถเดินทางท่องเที่ยวชมเมืองได้ทุกแห่งแล้วกลับมายังที่เดิมโดยใช้สะพานทุกแห่งเพียงแห่งละหนึ่งครั้งได้หรือไม่

เห็นได้ชัดเจนว่าปัญหานี้เหมือนกันกับปัญหาที่ตั้งเป็นคำถามว่าจะสามารถเขียนกราฟข่ายงาน (ซึ่งใช้จุด P, Q, R, S แทนสถานที่สี่แห่งและเส้น t, u, v, w, x, y, z แทนสะพานทั้งเจ็ดแห่ง)



โดยเริ่มจากจุดใดจุดหนึ่งไปยังจุดอื่น ๆ ทุกจุดตามเส้นในกราฟทุกเส้นเพียงเส้นละหนึ่งครั้งแล้วกลับมายังจุดเริ่มต้นโดยไม่ยกดินสอได้หรือไม่

ออยเลอร์หาวิธีแก้ปัญหาด้วยการชี้ให้เห็นว่าจำนวนวิธีของการเลือกวิถีนั้นค่อนข้างเสียเวลามาก และเห็นว่าควรมีคำตอบแบบทั่วไปสำหรับปัญหานี้ จึงจำลองแผนที่เป็นกราฟข่ายงานที่มีหลายวิถีดังรูปข้างต้นและกำหนดปัญหาเหลือเพียงคำถามสั้น ๆ ว่า "วิถีใดเป็นวงจรแบบออยเลอร์"

ออยเลอร์พิจารณาว่ามีจุดอยู่สองแบบ เรียกว่า จุดคู่ และจุดคี่ จุดคู่จะมีเส้นมาสิ้นสุดที่จุดนั้นเป็นจำนวนคู่ และจุดคี่จะมีเส้นมาสิ้นสุดที่จุดนั้นเป็นจำนวนคี่ จุด P, Q, R, S เป็นจุดคี่ ออยเลอร์พบว่ากราฟข่ายงานซึ่งจุดทั้งหมดเป็นจุดคู่จะมีวงจรแบบออยเลอร์ และนั่นเป็นจุดเริ่มต้นของเรื่องทฤษฎีกราฟ ซึ่งสำหรับการหาคำตอบของปัญหานี้จะแสดงให้เห็นตามวิธีการของออยเลอร์ต่อไป เมื่อถึงเรื่องกราฟออยเลอร์ ในขั้นนี้จะเป็นการแนะนำเรื่องเกี่ยวกับบทนิยามต่าง ๆ ก่อน ดังนี้

1.2 บทนิยาม

บทนิยาม 1.2.1

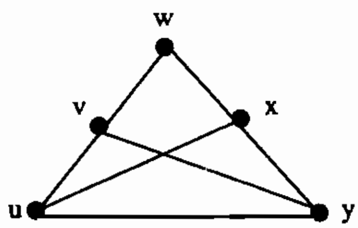
<u>จุดยอดและเส้นเชื่อม</u> (Vertices and Edges)

กราฟประกอบด้วย เซตของจุดยอด V และเซตของเส้นเชื่อม E ที่มีจำนวนนับได้เส้นเชื่อมจะโยงระหว่างจุดยอด 2 จุดที่แตกต่างกัน จุดยอดทั้งสองเรียกว่าจุดปลายของเส้นเชื่อม

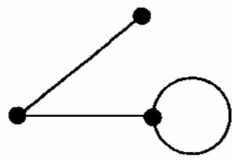
ตามบทนิยามได้กำหนดให้ G แทนกราฟ เซตของจุดยอดในกราฟ G จะเขียนสัญลักษณ์ได้ในรูป V(G) และเซตของเส้นเชื่อม คือ E(G) และถ้า v กับ w เป็นจุดยอด 2 จุดใด ๆ ใน G เส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสองคือ vw หรือ wv

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

G :



ในที่นี้ V(G) = {u, v, w, x, y} และ E(G) = {uv, vw, wx, xy, wy, ux, vy} ในกราฟมีเส้นเชื่อม ux ตัดกับเส้นเชื่อม vy จุดที่เส้นเชื่อมตัดกันนี้ไม่ใช่จุดยอดจะไม่มีอักษรกำหนด และตามบทนิยาม เส้นที่เริ่มออกจากจุดใดจุดหนึ่งแล้วกลับมาสิ้นสุดที่จุดเดิม เรียกว่า วงวน (loop) ไม่เรียกว่า เส้นเชื่อม (ดังรูป)



กราฟลักษณะนี้เรียกว่าเป็นกราฟเทียม (pseudo graph)

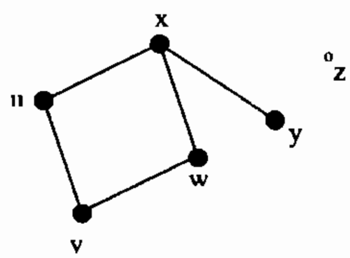
<u>บทนิยาม 1.2.2</u>

<u>ระดับขั้นของจุดยอด</u> (Degree of Vertex)

ถ้า v เป็นจุดยอดในกราฟ G จำนวนเส้นของ G ที่เชื่อมกับจุดยอด v เรียกว่าระดับขั้นของจุดยอด v ใน G และเขียนแทนด้วย deg G หรือ deg v

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

กราฟ G (ดังรูป)



มี deg u = deg v = deg w = 2

deg x = 3

deg y = 1

deg z = 0

ทฤษฎีบท 1.2.1

กราฟ G ใด ๆ จะมีระดับขั้นของจุดยอดเป็นสองเท่าของจำนวนเส้น

หรือ $\sum_{i=1}^{p} \deg v = 2q$ ซึ่ง p คืออันดับ และ q คือ จำนวน เส้น

พิสูจน์

เพราะว่าในการนับจำนวนระดับขั้นของจุดยอดทั้งหลายในกราฟ เส้นเชื่อมแต่ละเส้นในกราฟจะถูกนับ 2 ครั้ง (นับ 1 ครั้ง สำหรับจุดแรก และนับอีก 1 ครั้ง สำหรับจุดที่สอง) ดังนั้นผลรวมของระดับขั้นของจุดยอดจึงเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้น

จากทฤษฎีทำให้มีผลลัพธ์ตาม 3 ข้อ คือ ในกราฟใด ๆ

1. ผลรวมของระดับขั้นของจุดยอดทั้งหมดจะเป็นจำนวนคู่
2. จุดยอดที่มีระดับขั้นเป็นจำนวนคี่จะมีเป็นจำนวนคู่และ
3. ถ้ากราฟ G มีจุดยอด n จุด และเป็นกราฟที่จุดยอดทุกจุดมีดีกรีเท่ากับ r กราฟ G จะมีเส้นเชื่อมเป็นจำนวนเท่ากับ $\frac{nr}{2}$

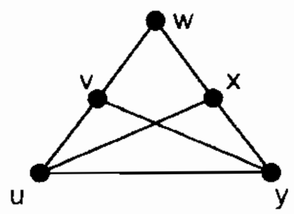
บทนิยาม 1.2.3

<u>อันดับและขนาด</u> (Orders and Degrees)

จำนวนจุดยอดใด ๆ ในกราฟ เรียกว่า อันดับของกราฟ ส่วนจำนวนของเส้นเชื่อมในกราฟ เรียกว่า ขนาดของกราฟ

กราฟ G ซึ่งมีเซตของจุดยอดเป็น V(G) และเซตของเส้นเชื่อมเป็น E(G) มีสัญลักษณ์ของอันดับและขนาดเป็น | V | และ | E | ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 3



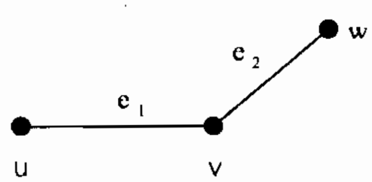
ในที่นี้ | V | = 5 จุด และ | E | = 7 เส้น

บทนิยาม 1.2.4

จุดประชิด

ถ้า e เป็นเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด u และ v จะเรียกว่าจุดยอด u ประชิดกับจุดยอด v หรือเรียกว่าเส้นเชื่อม e ประชิดกับจุดยอด u และ v

ตัวอย่างที่ 4



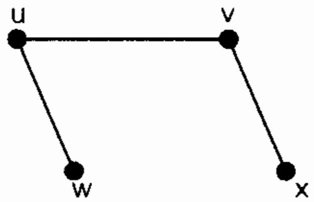
กราฟตามตัวอย่างมี u ประชิดกับ v และ v ประชิดกับ w ส่วน e_1 ประชิดกับ u และ v และ e_2 ประชิดกับ v และ w

บทนิยาม 1.2.5

เส้นประชิด

ถ้า uv และ vw เป็นเส้นเชื่อมที่ไม่ซ้ำกันในกราฟ G ($v \neq w$) จะเรียกว่าเส้นเชื่อม uv ประชิดกับเส้นเชื่อม uw

ตัวอย่างที่ 5



ตามกราฟนี้ เส้นเชื่อม uv ประชิดกับเส้นเชื่อม uw และเส้นเชื่อม uv ประชิดกับเส้นเชื่อม vx แต่เส้นเชื่อม uw ไม่ประชิดกับเส้นเชื่อม vx

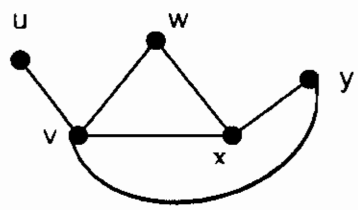
บทนิยาม 1.2.6

ความเชื่อมโยง (Connectedness)

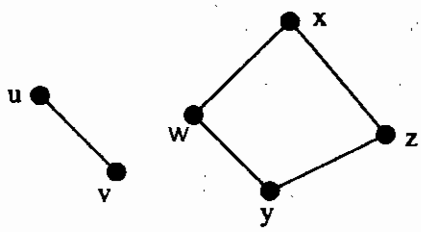
กราฟใด ๆ เรียกว่ามีความเชื่อมโยงถ้าสามารถลากเส้นเชื่อมจากจุดยอดใดจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งจุดใดในกราฟได้ ถ้าทำไม่ได้ดังกล่าวนี้จะเรียกว่ากราฟไม่เชื่อมโยง หรือกราฟขาดความเชื่อมโยง

ตามบทนิยามจะเห็นได้ชัดว่าถ้าเป็นกราฟเชื่อมโยงจะสามารถลากเส้นเชื่อมจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่งได้โดยไม่ต้องยกปากกาหรือดินสอ

ตัวอย่างที่ 6



G

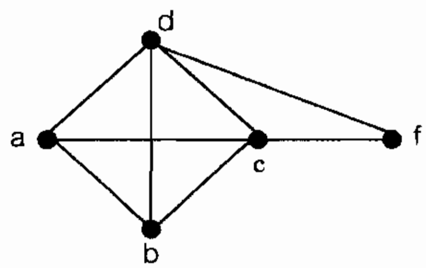


H

จะเห็นได้ว่ากราฟ G มีความเชื่อมโยงเพราะจะลากเส้นเชื่อมจากจุดยอดใด ๆ ไปยังจุดยอดอื่น ๆ ได้ แต่กราฟ H ไม่มีความเชื่อมโยงเพราะไม่สามารถลากเส้นเชื่อมจากจุดยอด u หรือ v ไปยังจุดยอดอื่น ๆ ได้

<u>บทนิยาม</u> <u>1.2.7</u>
<u>จุดคู่หรือจุดคี่</u> (Even or odd vertex)
จุดยอดของกราฟเรียกว่าเป็นจุดคี่ ถ้าจุดยอดนั้น คือ จุดปลาย ของเส้นเชื่อมที่มีเป็นจำนวนคี่ ในทำนองเดียวกันจุดยอดของกราฟ เรียกว่า เป็นจุดคู่ ถ้าจุดยอดนั้นคือ จุดปลายของเส้นเชื่อมที่มีเป็นจำนวนคู่

<u>ตัวอย่างที่ 7</u>



กราฟนี้มีจุดยอด c จุดยอด d และจุดยอด f เป็นจุดคู่ ส่วน จุดยอด a และ b เป็นจุดคี่

<u>ทฤษฎีบท</u> <u>1.2.2</u>
ทุก ๆ กราฟมีจุดคี่เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u>
ให้กราฟ G มีจุดคี่จำนวน k จุด คือv_1 ,v_2 ,.........,v_k
และมีจุดคู่จำนวน n จุด คือ w_1 ,w_2 ,..........., w_n
เพราะว่า

$(\deg v_1 + \deg v_2 + \ldots\ldots + \deg v_k) + (\deg w_1 + \deg w_2 + \ldots\ldots\ldots + \deg w_n) = 2q$ (q = ขนาดของ G)

ดังนั้น

$(\deg v_1 + \deg v_2 + \ldots\ldots + \deg v_k) = 2q - (\deg w_1 + \deg w_2 + \ldots\ldots + \deg w_n)$

= จำนวนคู่ (เพราะว่า $\deg w_1 + \ldots\ldots + \deg w_n$ = จำนวนคู่)

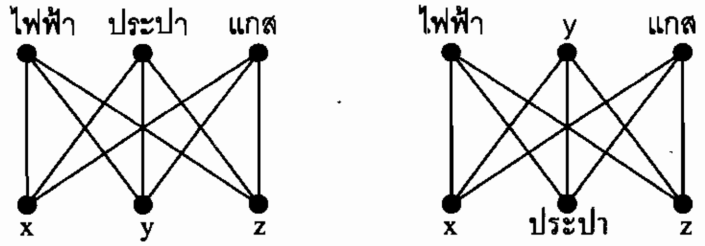
แสดงว่า k เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นกราฟ G มีจุดคี่เป็นจำนวนคู่ได้กราฟ G มีแต่จุดคี่ $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$

$(\deg v_1 + \deg v_2 + \ldots\ldots + \deg v_n) = 2q$

แสดงว่า n เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นกราฟ G มีจุดคี่เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ ทุกกราฟมีจุดคี่เป็นจำนวนคู่

1.3 <u>กราฟสมสัณฐาน</u> (isomorphic graphs)

กราฟสองรูปอาจจะมองเห็นว่ามีความแตกต่างกัน แต่แท้จริงแล้วเป็นกราฟเดียวกัน และในทางกลับกันกราฟ 2 รูปที่ดูเหมือนกัน แต่จริง ๆ แล้วเป็นกราฟที่แตกต่างกัน เช่น กราฟต่อไปนี้



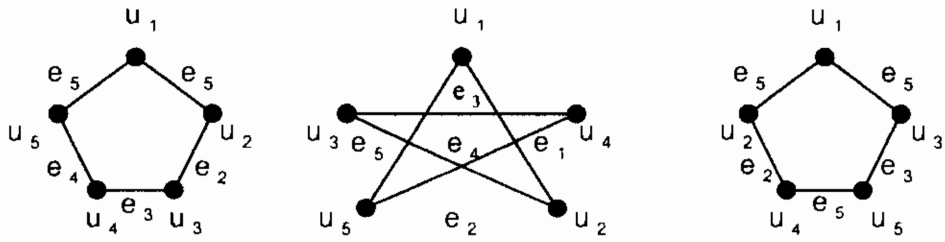
กราฟทั้งสองนี้ดูเหมือนกัน แต่ไม่ใช่กราฟเดียวกัน

<u>บทนิยาม 1.3.1</u>

<u>สมสัณฐาน</u>

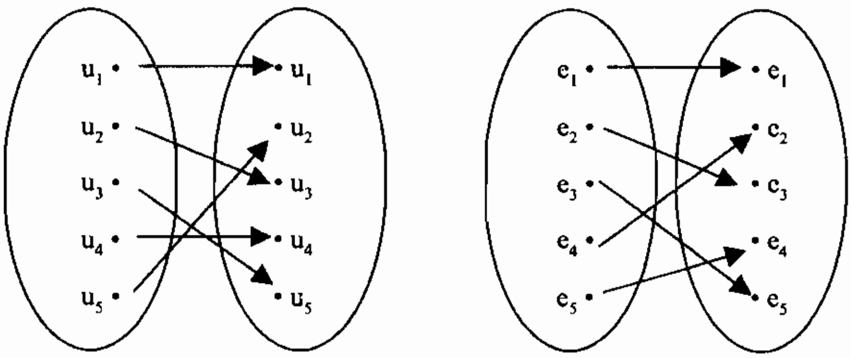
กราฟ G และ H เรียกว่าเป็นกราฟสมสัณฐาน ถ้ากราฟ H สร้างจากกราฟ G ได้ด้วยการกำหนดชื่อจุดยอดใหม่ และกราฟทั้งสองมีความสมนัย ระหว่างจุดยอดของ G กับจุดยอดของ H ในแบบหนึ่งต่อหนึ่งและจำนวนเส้นเชื่อมของจุดยอดใน G เท่ากับจำนวนเส้นเชื่อมของจุดยอดใน H

ตัวอย่างที่ 8



กราฟ G กราฟ H กราฟ I

จะเห็นว่ากราฟ G และ H เป็นกราฟเดียวกัน ชุดของจุดยอด และเส้นเชื่อมตลอดจนฟังก์ชันจุดปลายเส้นเชื่อมเป็นแบบเดียวกัน แต่ดูแตกต่างกันส่วนกราฟ G กับกราฟ I ดูเหมือนกัน แต่กลับเป็นกราฟที่ต่างกันเพราะในกราฟ G จุดปลายของเส้นเชื่อม e_1 คือ u_1 กับ u_2 ส่วนจุดปลายของ e_1 ใน I เป็น u_1 และ u_3 อย่างไรก็ตาม ถ้ากำหนดชื่อจุดยอดของกราฟ I ใหม่ตามแบบของฟังก์ชันข้างล่างนี้ กราฟ I จะเหมือนกับกราฟ G



จุดยอดใน G จุดยอดใน I เส้นเชื่อมใน G เส้นเชื่อมใน I

จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันซึ่งกำหนดชื่อใหม่นี้เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

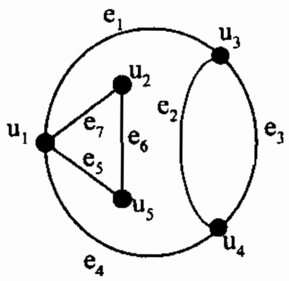
ทฤษฎีบท 1.3.1

ถ้า G และ H เป็นกราฟที่มีเซตของจุด V(G) กับ V(H) และเซตของเส้นเชื่อม E(G) กับ E(H) กราฟ G สมสัณฐานกับ H ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อมีความสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง $f = V(G) \longrightarrow V(H)$ และ $g = E(G) \longrightarrow E(H)$
ซึ่งรักษาฟังก์ชันจุดปลายเส้นเชื่อมของ G และ H โดยที่สำหรับทุกจุดยอด v ใน V(G) และเส้นเชื่อม e ใน E(G) จุดยอด v เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อม e ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ f(v) เป็นจุดปลายของ g(e)

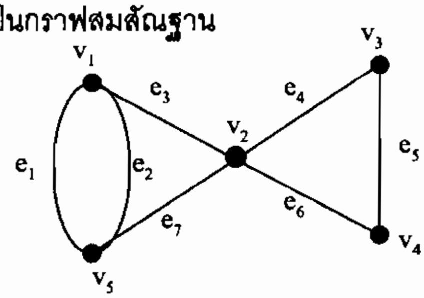
เห็นได้ชัดตามทฤษฎีนี้ว่ากราฟ G เหมือนกราฟ H ก็ต่อเมื่อ และต่อเมื่อจุดยอดกับเส้นเชื่อมของ G และ H สามารถจับคู่กันได้ในรูปฟังก์ชันทั่วถึงแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one – to one onto function) โดยที่เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดที่สมนัยกันต้องมีความสมนัยด้วย

ตัวอย่างที่ 9

จะแสดงให้เห็นว่ากราฟทั้งสองต่อไปนี้เป็นกราฟสมสัณฐาน



G



H

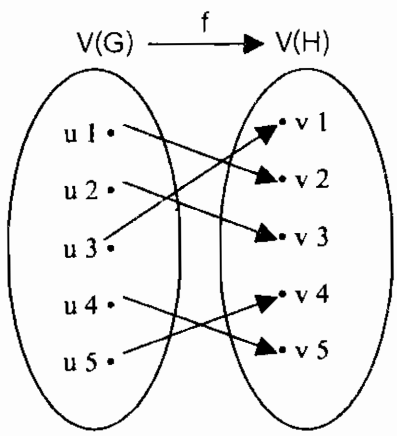
วิธีทำ

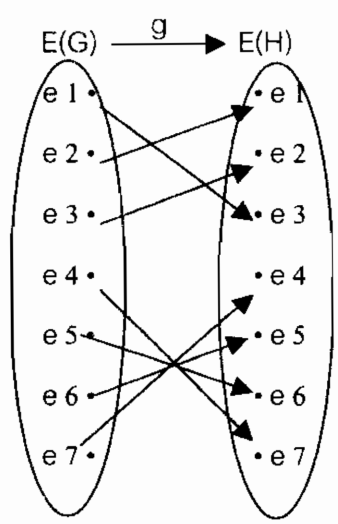
ในการพิจารณา ต้องหาฟังก์ชัน $f : V(G) \rightarrow V(H)$ $g : E(G) \rightarrow E(H)$ ที่เส้นเชื่อม e และจุดยอด u ทั้งหลายในเซต E(G) และ V(G) ซึ่งมี u เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อม e ก็ต่อเมื่อ และต่อเมื่อ f(u) เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อม g(e)

ในการหาฟังก์ชันดังกล่าวบางส่วนต้องใช้วิธีการลองผิดลองถูกและบางส่วนให้เหตุผลตามวิธีการคณิตศาสตร์นิรนัย เช่น การที่เส้นเชื่อม e_2 และ e_3 มีจุดปลายเหมือนกัน (เส้นเชื่อมทั้งสองขนานกัน) เส้นเชื่อม $g(e_2)$ และ $g(e_3)$ ต้องมีจุดปลายเหมือนกันด้วย (เส้นเชื่อมทั้งสองขนานกัน) ดังนั้น $g(e_2) = e'_2$ และ $g(e_3) = e'_1$ นอกจากนั้นจุดปลายของ e_2 กับ e_3 ต้องสมนัยกับจุดปลายของ e'_1 กับ e'_2 ดังนั้น $g(u_3) = v_1$ และ $g(u_4) = v_5$ หรือ $g(u_3) = v_5$ และ $g(u_4) = v_1$

ในทำนองเดียวกัน เพราะว่า u_1 เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อมไม่ซ้ำกัน 4 เส้น (e_1 , e_7 , e_5 และ e_4) ดังนั้น $g(u_1)$ ต้องเป็นจุดปลายของเส้นเชื่อม 4 เส้นด้วย (เพราะว่าทุกเส้นเชื่อมที่ประชิดกับ $g(u_1)$ เป็นภาพ (image) ใน g ของเส้นประชิดกับ v_1 และ g เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง และหนึ่งต่อหนึ่ง) แต่จุดยอดใน H จุดเดียวที่มีเส้นเชื่อม 4 เส้นคือ v_2 ดังนั้น $f(u_1) = v_2$ ที่นี้ถ้า $f(u_3) = v_1$ และเนื่องจาก u_1 กับ u_3 เป็นจุดปลายของ e_1 ใน G ดังนั้น $f(u_1) = v_2$ และ $f(u_3) = v_1$ ต้องเป็นจุดปลายของ $g(e_1) = e'_3$

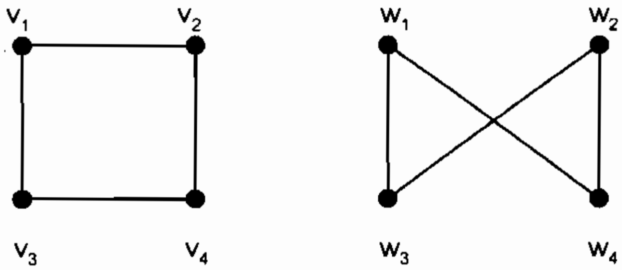
ด้วยการทำต่อไปในลักษณะนี้จะได้ฟังก์ชัน f และ g ที่กำหนดความเหมือนกันระหว่าง G กับ H ตัวอย่างของฟังก์ชันคู่หนึ่งคือ





ตัวอย่างที่ 10

จงแสดงให้เห็นว่ากราฟ G และ H เป็นกราฟสมสัณฐาน



วิธีทำ

จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชัน f ซึ่ง

$f(v_1) = w_1$ $\quad$ $f(v_2) = w_4$

$f(v_3) = w_3$ $\quad$ $f(v_4) = w_2$

เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างจุดยอดใน G กับจุดยอดใน H และความสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งนี้ยังรักษาความประชิด ดังที่มีจุดประชิดใน G เป็น v_1 และ v_2, v_1 กับ v_3 , v_2 กับ v_4 และ v_3 กับ v_4 และแต่ละคู่คือ

$f(v_1) = w_1$ และ $f(v_2) = w_4$

$f(v_1) = w_1$ และ $f(v_3) = w_3$

$f(v_2) = w_4$ และ $f(v_4) = w_2$

$f(v_3) = w_3$ และ $f(v_4) = w_2$

รักษาการประชิดใน H

ทฤษฎีบท 1.3.2

เซตของกราฟซึ่งเป็นแบบสมสัณฐาน จะมีความสัมพันธ์แบบสมมูล (equivalent) นั่นคือ มีการสมมาตร (Symmetric) การสะท้อน (reflexive) และการถ่ายทอด (transitive)

<u>พิสูจน์</u> **<u>การสะท้อน</u>**

ถ้า G เป็นกราฟ และมีการส่งแบบ $f : V(G) \longrightarrow V(G)$

ให้ $f(v) = v$ สำหรับ v ทั้งหลายใน $V(G)$

แสดงว่า G สมสัณฐานกับ G ใน f

นั่นคือ สมสัณฐาน เป็นความสัมพันธ์แบบสะท้อน

<u>การสมมาตร</u>

ถ้า G สมสัณฐานกับ G_2 นั่นคือ f เป็นแบบสมสัณฐานระหว่าง G_1 กับ G_2

ให้ $f^{-1} : V(G_2) \longrightarrow V(G_1)$ เป็นการส่งแบบผกผัน โดยที่มี $f^{-1}(v_2) = v_1$ ถ้า $f(v_1) = v_2$ ดังนั้น f^{-1} เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(G_2)$ ไป $V(G_1)$ ถ้าจุด u_2 และ v_2 อยู่ใน $V(G_2)$ และ $f^{-1}(u_2) = u_1$ และ $f^{-1}(v_2) = v_1$ แสดงว่า $f(u_1) = u_2$ และ $f(v_1) = v_2$

ดังนั้น u_2 ประชิดกับ v_2 ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ $f(u_1)$ ประชิดกับ $f(v_1)$ และเพราะว่า G_1 เหมือนกับ G_2 ดังนั้น $f(u_1)$ ประชิดกับ $f(v_1)$ ก็ต่อเมื่อ $u_1 = f^{-1}(v_2)$ ประชิดกับ $v_1 = f^{-1}(v_2)$ และ u_2 ประชิดกับ v_2 ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}(v_2)$ ประชิดกับ $f^{-1}(v_2)$ นั่นคือ G_2 สมสัณฐานกับ G_1 แสดงว่า “สมสัณฐาน" เป็นความสัมพันธ์แบบสมมาตร

<u>การถ่ายทอด</u>

ถ้า G_1 สมสัณฐานกับ G_2 และ G_2 สมสัณฐานกับ G_3

นั่นคือ

$$g : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$$

$$h : V(G_2) \longrightarrow V(G_3)$$

และการส่งแบบประกอบ $h \circ g$ จะเป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(G_1)$ ไป $V(G_2)$

ถ้า u_1 และ v_1 เป็นจุดยอดในกราฟ G_1

ให้ $g(u_1) = u_2$ และ $g(v_1) = v_2$

$h(u_2) = u_3$ และ $h(v_2) = v_3$

เนื่องจาก g สมสัณฐานกับ h ดังนั้น u_1 ประชิดกับ v_1 ก็ต่อเมื่อ g (u_1) ประชิดกับ g (v_1) และ u_2 ประชิดกับ v_2 ก็ต่อเมื่อ h (u_2) ประชิดกับ h(v_2)
ดังนั้น u_1 ประชิดกับ v_1 ก็ต่อเมื่อ $u_3 = (h \circ g)(u_1)$ ประชิดกับ $v_3 = (h \circ g)(v_1)$ และ $h \circ g$ มีความสมสัณฐาน นั่นคือ G_1 สมสัณฐานกับ G_3

โดยทั่วไปมีขั้นตอนวิธีในการหาความสมสัณฐานของกราฟ G_1 กับ G_2 โดยใช้หลักการของฟังก์ชันทั่วถึงแบบหนึ่งต่อหนึ่งจากเซตของจุดยอดใน G_1 ไปยังเซตของจุดยอดใน G_2 และจากเซตของเส้นเชื่อมใน G_1 ไปยังเซตของเส้นเชื่อมใน G_2 แล้วตรวจว่าเส้นเชื่อมแต่ละคู่ยังรักษาสภาวะฟังก์ชันจุดปลายเส้นเชื่อมของ G_1 และ G_2 หรือไม่ แต่ขั้นตอนวิธีจะใช้เวลามากเช่นถ้ากราฟ G_1 และ G_2 ต่างมีจุดยอด p จุดและเส้นเชื่อม q เส้น จำนวนความสมนัยจากจุดยอดไปยังจุดยอดคือ p! และความสมนัยจากเส้นเชื่อมไปยังเส้นเชื่อมคือ q! ซึ่งจำนวนคู่ของฟังก์ชันทั้งหมดที่ต้องตรวจคือ (p!) (q!) ดังนั้นถ้าสมมุติว่า p = 20 และ q = 20 จะมีคู่ของฟังก์ชันที่ต้องตรวจถึง (20!)(20!) ซึ่งแม้จะใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ตรวจก็ต้องใช้เวลามากมาย

แม้ว่าจะยังไม่มีวิธีการตรวจที่มีประสิทธิภาพ รวดเร็ว ในการหาความสมสัณฐานของกราฟ แต่ก็มีวิธีการง่าย ๆ ในการตรวจสอบว่ากราฟไม่สมสัณฐานกันโดยพิจารณาว่ากราฟนั้นไม่มีสมบัติที่กราฟสมสัณฐานต้องมีสมบัตินี้เรียกว่า <u>การไม่แปรเปลี่ยน</u> ซึ่งมีบทนิยามดังนี้

<u>การไม่แปรเปลี่ยน</u> (invariant)

ในการพิจารณากราฟ G_1 กับ G_2 จะเรียกว่า Q เป็นสมบัติสมสัณฐานไม่แปรเปลี่ยนก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อกราฟ G_1 มีสมบัติ Q และถ้ากราฟ G_2 สมสัณฐานกับ G_1 แล้ว G_2 มีสมบัติ Q ด้วย

ต่อไปนี้ คือ สมบัติการไม่แปรเปลี่ยนสำหรับกราฟสมสัณฐาน

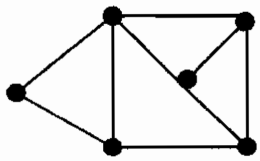
1. มีจุดยอด n จุด
2. มีเส้นเชื่อม m เส้น
3. มีจุดยอดดีกรี k หนึ่งจุด
4. มีจุดยอดดีกรี k จำนวน m จุด
5. มีวงจรหนึ่งความยาว k
6. มีวงจรแบบง่ายหนึ่งวงจรความยาว k

7. มีวงจรแบบง่าย m วงจรความยาว k 8. เป็นกราฟเชื่อมโยง

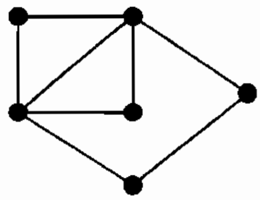
9. มีวงจรแบบออยเลอร์ 10. มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน

<u>ตัวอย่างที่ 11</u>

จงแสดงให้เห็นว่ากราฟ 2 รูปต่อไปนี้ไม่สมสัณฐาน



G_1

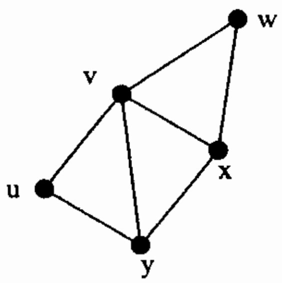


G_2

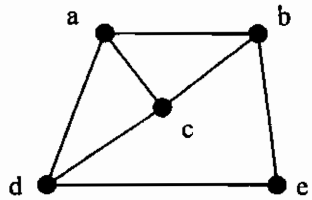
<u>วิธีทำ</u> ตามคุณสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนเชิงสมสัณฐานของกราฟ กราฟ G_1 ต่างจาก G_2 เพราะ G_1 มีเส้นเชื่อม 9 เส้น ส่วน G_2 มีเส้นเชื่อม 8 เส้น

<u>ตัวอย่างที่ 12</u>

จงอธิบายให้เห็นว่ากราฟ G_3 และ G_4 ไม่สมสัณฐาน



G 3

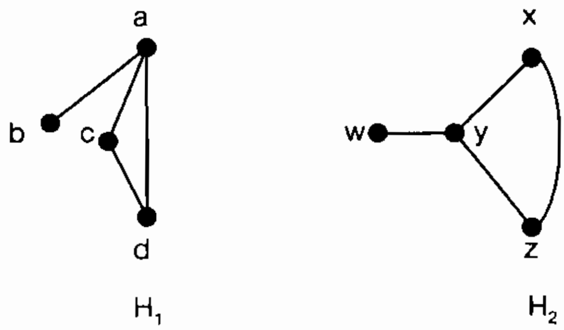


G 4

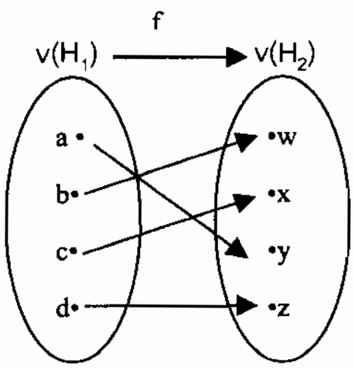
<u>วิธีทำ</u> จะเห็นได้ว่ากราฟ G_3 มีจำนวนจุดยอดเท่ากับกราฟ G_4 แต่ดีกรีของจุดยอด v ใน G_3 มีระดับขั้น 4 ซึ่ง G_4 ไม่มีจุดยอดที่มีระดับขั้น 4 ดังนั้นเมื่อใช้สมบัติการไม่แปรเปลี่ยนกราฟทั้งสองแตกต่างกัน

<u>ตัวอย่างที่ 13</u>

จงแสดงให้เห็นว่า กราฟ H_1 และ H_2 ต่อไปนี้สมสัณฐานกัน



<u>วิธีทำ</u> ให้ $f : v(H_1) \longrightarrow v(H_2)$ ตามทิศทางลูกศรต่อไปนี้

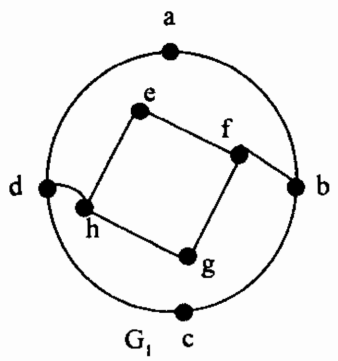


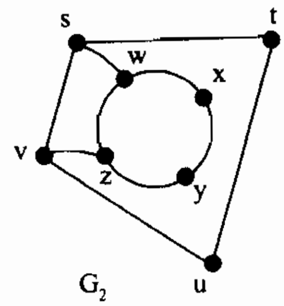
จะเห็นได้ว่า f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างจุดยอดใน H_1 กับ จุดยอดใน H_2 และรักษาความประชิดของจุดปลายและเส้นเชื่อมดังตาราง

เส้นเชื่อมของ H_1	เส้นเชื่อม W, H_2
(a,b)	(y,w) = (f (a) , f (b))
(a,c)	(y,x) = (f (a) , f (c))
(a,d)	(y,z) = (f (a) , f (d))
(c,d)	(x,z) = (f (c) , f (d))

ตัวอย่างที่ 14

ให้พิจารณาว่ากราฟข้างล่างนี้เป็นแบบสมสัณฐานหรือไม่

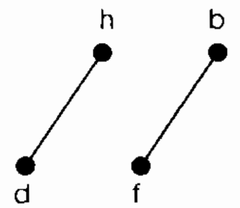




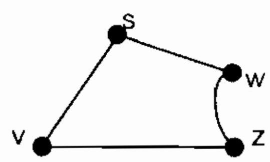
วิธีทำ

กราฟ G_1 และ G_2 ต่างก็มีจุดยอด 8 จุด และเส้นเชื่อม 10 เส้น นอกจากนั้นทั้ง G_1 และ G_2 มีจุดยอด 4 จุดซึ่งมีระดับขั้น 2 และจุดยอดอีก 4 จุดมีระดับขั้น 3 จากสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนเหล่านี้ กราฟ G_1 ควรจะสมสัณฐานกับกราฟ G_2

แต่กราฟ G_1 ต่างจาก G_2 เนื่องจากระดับชั้น 2 ของจุดยอด a ใน G_1 ต้องสมนัยกับระดับชั้นของจุดยอด t, u, x หรือ y ใน G_2 ที่มีระดับชั้น 2 เหมือนกัน แต่จุดทั้งสี่ซึ่งมีระดับชั้น 2 ใน G_2 เหล่านี้ประชิดกับจุดยอดระดับชั้น 2 ใน G_2 ต่างจากจุดยอด a ใน G_1 ที่ประชิดกับจุดยอดระดับชั้น 3 นอกจากนั้นจะเห็นได้ว่ากราฟย่อยของ G_1 กับ G_2 ประกอบด้วยจุดยอดระดับชั้น 3 ดังนั้น เส้นเชื่อมที่โยงจุดยอดเหล่านี้ต้องเหมือนกัน ถ้ากราฟทั้งสองสมสัณฐานกัน แต่จะเห็นได้จากรูปของกราฟย่อยข้างล่างว่าไม่เหมือนกัน



กราฟย่อยของ G_1

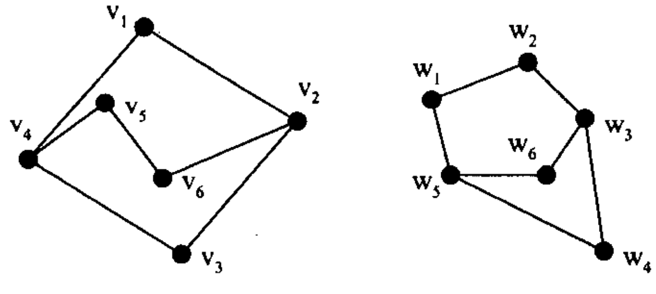


กราฟย่อยของ G_2

สรุปได้ว่า กราฟ G_1 ไม่สมสัณฐานกับ G_2

ตัวอย่างที่ 15

ให้พิจารณาว่ากราฟข้างล่างนี้เป็นแบบสมสัณฐานหรือไม่



G_1 G_2

วิธีทำ

G_1 และ G_2 มีจุดยอด 6 จุด และเส้นเชื่อม 7 เส้น ทั้ง G_1 และ G_2 มีจุดยอด 4 จุด ซึ่งระดับชั้น 2 และจุดยอด 2 จุด ซึ่งระดับชั้น 3 นอกจากนั้นจะเห็นได้ว่ากราฟย่อยของ G_1 และ G_2 ประกอบด้วยจุดยอดทั้งหมดซึ่งมีระดับชั้น 2 และเส้นเชื่อมที่โยงจุดยอดเหล่านี้มีความสมสัณฐานแสดงว่าทั้ง G_1 และ G_2 มีสมบัติการไม่แปรเปลี่ยน

เพื่อหาฟังก์ชันสมสัณฐาน f มีลำดับชั้นของการพิจารณาดังนี้

เพราะว่า $\deg(v_1) = 2$ และ v_1 ไม่ประชิดกับจุดยอดที่มีระดับชั้น 2 ภาพของ v_1 จะต้องเป็นจุดยอดซึ่งมีระดับชั้น 2 ใน G_2 ที่ไม่ประชิดกับจุดยอดระดับชั้น 2 นั่นคือ จะต้องเป็น w_4 หรือ w_6 ถ้าให้ $f(v_1) = w_6$ (อาจจะให้ $f(v_1) = w_4$ ก็ได้) เพราะว่า v_2 ประชิดกับ v_1 ภาพที่เป็นไปได้ของ v_2 คือ w_3 กับ w_5 ให้ $f(v_2) = w_3$ ใช้หลักของการประชิดของ จุดยอดกับระดับชั้นเช่นนี้ต่อไป จะได้ว่า $f(v_3) = w_4$, $f(v_4) = w_5$, $f(v_5) = w_1$ และ $f(v_6) = w_2$ ซึ่งเป็นความสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างเซตของจุดยอดใน G_1 กับเซตของจุดยอดใน G_2 นั่นคือ $f(v_1) = w_6$, $f(v_2) = w_3$, $f(v_3) = w_4$, $f(v_4) = w_5$, $f(v_5) = w_1$ และ $f(v_6) = w_2$

เมื่อตรวจการรักษาสภาวะเส้นเชื่อมของ f

ใช้เมทริกซ์ประชิดของ G_1 กับ G_2 จะเห็นได้ว่า

$$A_{G1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ เท่ากับ } A_{G2} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} w_6 & w_3 & w_4 & w_5 & w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} w_6 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_1 \\ w_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

เนื่องจาก $A_{G1} = A_{G2}$ แสดงว่า f รักษาสภาวะเส้นเชื่อม นั่นคือ f เป็นแบบสมสัณฐาน ดังนั้น G_1 สมสัณฐานกับ G_2

หมายเหตุ ถ้า f ไม่เป็นแบบสมสัณฐาน จะยังไม่กำหนดว่า G_1 กับ G_2 ไม่สมสัณฐาน เพราะว่าความสมนัยกันของจุดยอดระหว่าง G_1 กับ G_2 อาจจะเป็นแบบสมสัณฐาน

ต่อไปเป็นทฤษฎีที่กำหนดเงื่อนไขจำเป็น สำหรับกราฟสมสัณฐาน 2 รูป แต่ยังไม่เพียงพอ เนื่องจากจุดยอดของกราฟทั้งสองแม้จะมีระดับขั้นเท่ากันแต่อาจจะไม่เป็นกราฟสมสัณฐาน

ทฤษฎีบทที่ 5 (เงื่อนไขจำเป็น)

ถ้ากราฟ G สมสัณฐานกับกราฟ H ระดับขั้นของจุดยอดใน G ต้องเท่ากับระดับขั้นของจุดยอดใน H

พิสูจน์

เพราะว่า G สมสัณฐานกับ H ดังนั้น จึงมีความสัมพันธ์ $f : V(G) \longrightarrow V(H)$

ถ้า u เป็นจุดยอดใด ๆ ใน G ซึ่ง deg u = n (n จำนวนเต็มบวก) และมีความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งจากจุดยอด u ไปยังจุดยอด v (นั่นคือ f(u) = v)

เพื่อแสดงให้เห็นว่า deg v = n เนื่องจาก deg u = n ดังนั้นกราฟ G มีจุดยอด u_1, u_2 , ... u_n ซึ่งประชิดกับจุดยอด u ส่วนจุดยอดอื่น ๆ ไม่ประชิดกับจุดยอด u

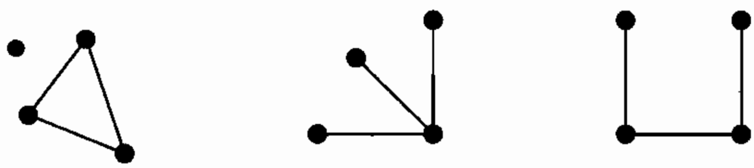
ให้ $f(u_i) = v_i$, i = 1, 2, ..., n ดังนั้น จุดยอด v ประชิดกับจุดยอด v_1, v_2 , ... v_n เพราะว่า f เป็นความสัมพันธ์แบบสมสัณฐาน และเฉพาะจุดเหล่านี้เท่านั้นที่ประชิดกับจุด v เพราะว่าในกราฟ G จุดยอด u ประชิดกับจุดยอด x ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อจุดยอด v ประชิดกับ f(x) ใน H ระดับขั้นของจุดยอด v = n เพราะจุดยอดใน G และภาพของ G ใน H มีระดับขั้นเท่ากัน

ตามทฤษฎีจะเห็นว่า

กราฟอันดับ 1 (ขนาดเป็นศูนย์) เป็นกราฟสมสัณฐาน

กราฟอันดับ 2 ที่มีขนาดเป็นศูนย์ และหนึ่ง เป็นกราฟสมสัณฐาน

กราฟอันดับ 4 และขนาด 3 มี 3 แบบ คือ



แบบ 1 แบบ 2 แบบ 3

ซึ่งแต่ละแบบไม่สมสัณฐาน แต่กราฟอันดับ 4 และ ขนาด 3 อื่น ๆ จะสมสัณฐานกับกราฟแบบหนึ่งแบบใดใน 3 แบบนี้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ในกลุ่มกราฟอันดับ 4 ขนาด 3 จะมีเซตของกราฟสมสัณฐาน 3 ชุด ดังนั้น ถ้ามีกราฟอันดับ 4 ขนาด 3 อื่น ๆ ตั้งแต่ 4 รูปขึ้นไป จะมีกราฟ 2 รูป ขึ้นไปที่เป็นกราฟของเซตสมสัณฐานเดียวกัน คำอธิบายนี้ชี้ให้เห็นผลลัพธ์ของหลักการช่องนกพิราบ (pigeonhole principle) อันมีชื่อเสียง

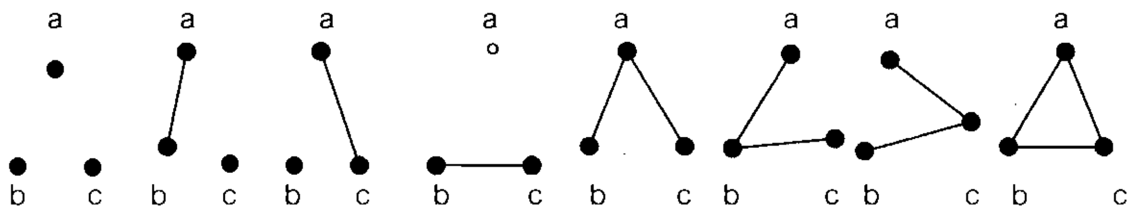
<u>หลักการช่องนกพิราบ</u>

ถ้า S เป็นเซตของสมาชิกจำนวน n และ S_1 , S_2 ,……. S_k เป็นเซตย่อย k เซตที่แบ่งจาก S จะพบว่ามีเซตย่อยอย่างน้อยที่สุด 1 เซตย่อย S_i ที่ 1 < i < n ซึ่งมีสมาชิกอย่างน้อยที่สุด จำนวน $\{\frac{n}{k}\}$ (<u>หมายเหตุ</u> { x } หมายถึง จำนวนเต็มน้อยที่สุดซึ่งเท่ากับ x หรือมากกว่า)

ดังนั้น ถ้ามีเซตของกราฟสมสัณฐานอันดับ 4 ขนาด 3 จำนวน 3 ชุด (k = 3) และมีกราฟอันดับ 4 ขนาด 3 จำนวน 4 รูป (n = 4) จะพบว่ามีกราฟอย่างน้อยที่สุด จำนวน $\{\frac{4}{3}\} = 2$ รูปที่อยู่ในเซตของกราฟสมสัณฐานเดียวกัน

1.4 <u>การนับจำนวนกราฟ</u>

การนับจำนวนกราฟที่มีอักษรกำกับจุดยอด จะนับเฉพาะกราฟที่ไม่สมสัณฐานตามอักษรซึ่งกำกับไว้ที่จุดยอด เช่น กราฟอันดับ 3 ซึ่งมีอักษรกำกับจุดยอดจะมีกราฟจำนวน 8 รูป ที่ไม่สมสัณฐาน



วิธีการหาจำนวนของกราฟอันดับ n ที่มีอักษรกำกับจุดยอดสามารถทำได้ง่ายจากทฤษฎีที่พิสูจน์ไว้แล้วว่ากราฟ G ใด ๆ จะมีดีกรีของจุดยอดเป็นสองเท่าของจำนวนเส้น และตามผลลัพธ์ที่ได้ตามมาในข้อ 3 จะมีเส้นเชื่อมเป็นจำนวนที่เป็นไปได้ คือ $\frac{n(n-1)}{2}$ เส้น ซึ่งแต่ละเส้นเชื่อม อาจจะปรากฏหรือไม่ปรากฏ ดังนั้น จำนวนกราฟที่ต้องการคือ $2^{n(n-1)/2}$ ตามผลลัพธ์นี้ถ้า n ≤ 6 จะได้จำนวนนับดังนี้

n	1	2	3	4	5	6
กราฟมีอักษรกำกับจุดยอด	1	2	8	64	1024	32768

ส่วนวิธีการนับจำนวนกราฟที่ไม่มีอักษรกำกับจุดยอด จะนับเฉพาะกราฟที่ไม่สมสัณฐานเมื่อไม่มีอักษรกำกับ เช่น กราฟอันดับ 3 จะมีกราฟซึ่งไม่สมสัณฐาน เพียง 4 รูป คือ

การนับจำนวนกราฟแบบนี้เมื่อกำหนดจุดยอดไม่เกิน 6 จุด และเส้นเชื่อมหรือดีกรีของจุด จะหาได้โดยง่าย ส่วนในกรณีที่จำนวนจุดมากกว่า 6 จุด มีสูตรทั่วไปของ จอร์จ ไปลยา กำหนดจำนวนของกราฟที่ไม่มีอักษรกำกับสำหรับจุดยอด 1 – 8 จุด ดังนี้

n	1	2	3	4	5	6	7	8
กราฟ	1	2	4	11	34	156	1044	12346

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

แบบฝึกหัด

1. ให้เขียนกราฟจากเซตของจุดยอดและเซตของเส้นเชื่อมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1.1 เซตของจุดยอด V = { a, b, c, x, y, z }

   เซตของเส้นเชื่อม E = { ax, by, cz, ab, ac, az, by}

   1.2 เซตของจุดยอด V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

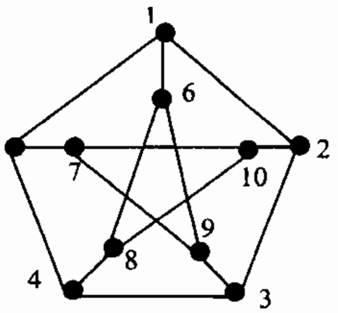
   เซตของเส้นเชื่อม E = { 12, 23, 24, 34, 35, 46, 47 }

   1.3 เซตของจุดยอด V = { A, B, C, D, F, G }

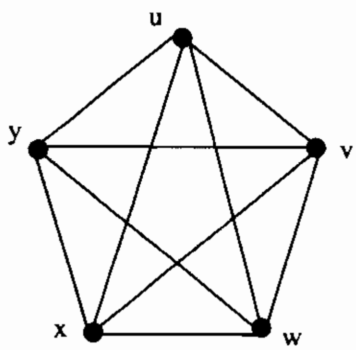
   เซตของเส้นเชื่อม E = { AB, BF, CD, AF, CG, BD, BC }

2. ให้หาเซตของจุดยอดและเซตของเส้นเชื่อมจากกราฟต่อไปนี้

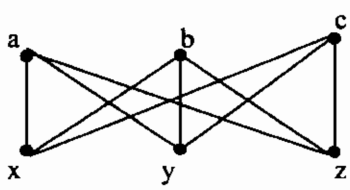
2.1



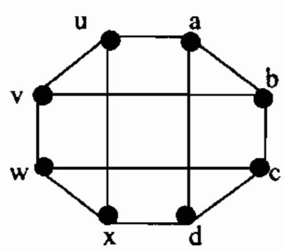
2.2



2.3



2.4



3. ให้ G เป็นกราฟอันดับ 3 กราฟ G จะมีขนาดเท่าใด

4. ถ้า G_1 เป็นกราฟอันดับ 3 และกำหนดว่าทุก 2 จุดใน G เป็นจุดประชิด และทุก 2 เส้นใน G เป็นเส้นประชิด ให้หากราฟ G

5. ถ้า G เป็นกราฟอันดับ n ซึ่ง $n \geq 2$ G จะมีขนาดต่ำสุดได้เท่าใด ถ้าจุดยอดจุดหนึ่งใน G ประชิดกับจุดอื่นทั้งหมด

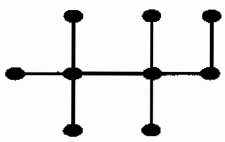
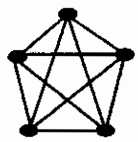
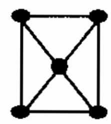
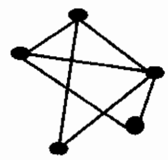
6. ให้ G เป็นกราฟใด ๆ ที่มีอันดับ 4 และระดับชั้นของจุดยอดทั้ง 4 เป็น 1, 2, 3, 4 ให้เขียนกราฟ G และหาจำนวนเส้นเชื่อมใน G

7. ให้เขียนกราฟอับอับ 4 ซึ่งมีระดับชั้นของจุดยอดใน 1, 2, 3 และ 4

8. ให้เขียนกราฟเชื่อมโยงอันดับ 8 ที่มีระดับชั้นของจุดยอดคือ

8.1 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6   8.2 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5

9. ให้หาระดับชั้นของจุดยอดในกราฟต่อไปนี้

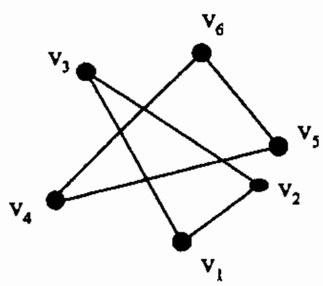





9.1   9.2   9.3   9.4

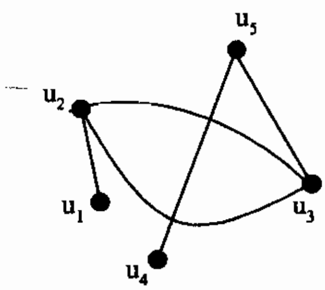
10. ให้แสดงว่ากราฟในข้อ 9.1 – 9.4 มี $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$

11. ให้หาจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟและพหุกราฟต่อไปนี้

11.1

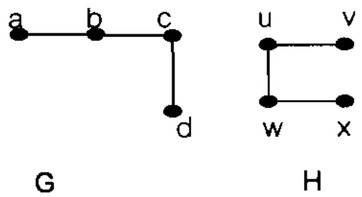


11.2

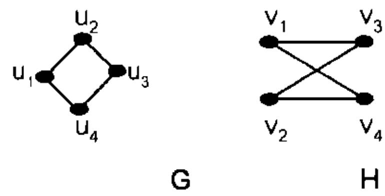


12. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟ G และ H ต่อไปนี้สมสัณฐานหรือไม่ ถ้าเป็นกราฟสมสัณฐานให้แสดงความสัมพันธ์ $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ ที่เป็นความสมสัณฐาน ถ้าไม่เป็นกราฟสมสัณฐาน ให้อธิบายว่ามีคุณสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนข้อใดที่ต่างกัน

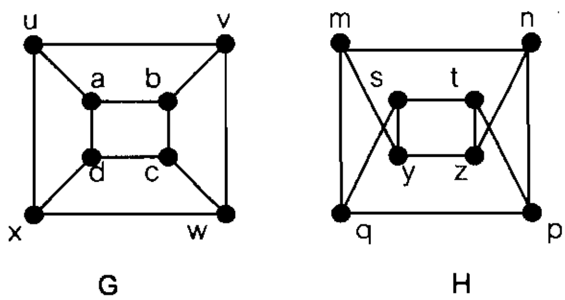
12.1



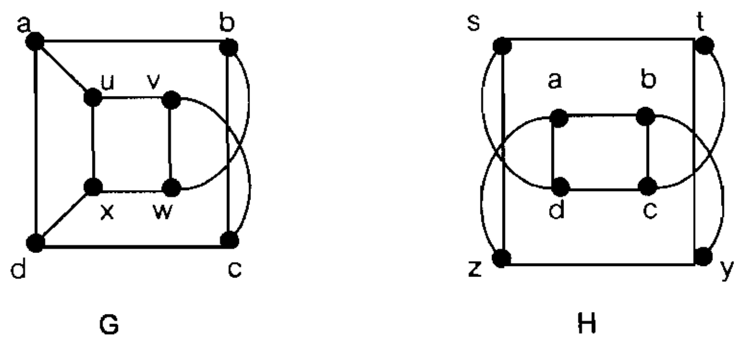
12.2



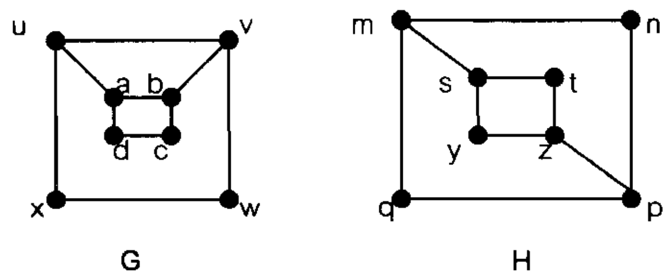
12.3



12.4



12.5

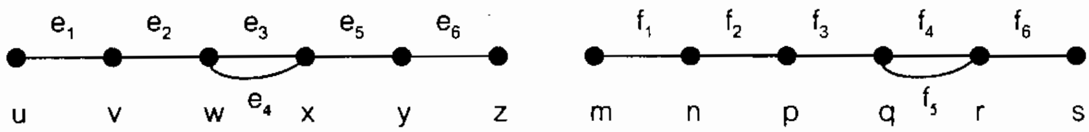


13. ให้เขียนกราฟซึ่งมีจุดยอด 3 จุด และไม่สมสัณฐาน

14. ให้เขียนกราฟซึ่งมีจุดยอด 3 จุด เส้นเชื่อมไม่เกิน 2 เส้น และไม่สมสัณฐาน

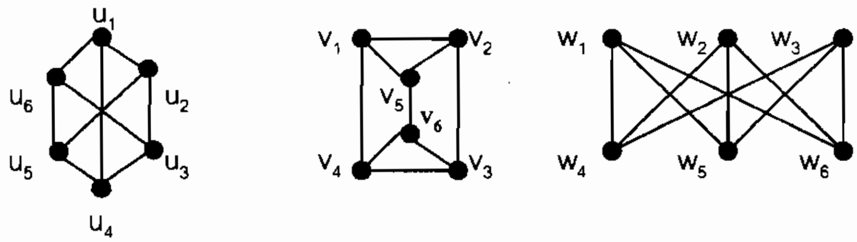
15. ให้เขียนกราฟซึ่งมีจุดยอด 6 จุด ทุกจุดมีดีกรี 2 และไม่สมสัณฐาน

16. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟต่อไปนี้ไม่สมสัณฐาน



<u>ข้อแนะนำ</u> (สมมุติว่ากราฟทั้งสองสมสัณฐาน จะทำให้ได้ข้อขัดแย้ง)

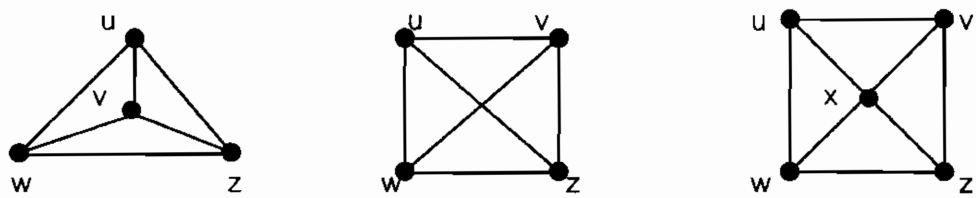
17. ข้อพิสูจน์ว่ากราฟอันดับ 4 ขนาด 2 จำนวน 3 รูปต่อไปนี้ คือ H_1 กับ H_2 และ H_3 มีกราฟอย่างน้อย 2 รูปที่สมสัณฐาน



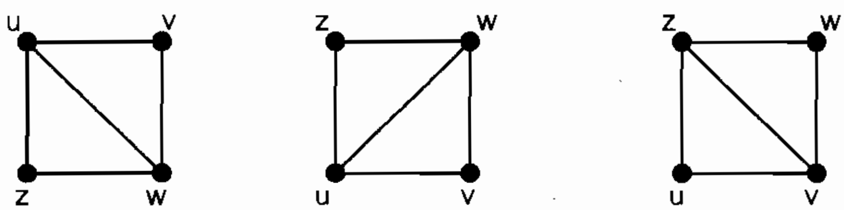
<u>ข้อแนะนำ</u> (กราฟอันดับ 4 ขนาด 2 ต้องมีเส้นเชื่อม 2 เส้น ที่ประชิดหรือไม่ประชิดกัน)

18. กราฟข้างล่างนี้มี 2 รูป ที่เป็นแบบสมสัณฐาน ส่วนอีกรูปหนึ่งไม่เป็นแบบสมสัณฐาน ให้หากราฟที่ไม่สมสัณฐาน และอธิบายเหตุผลที่ไม่สมสัณฐาน

18.1

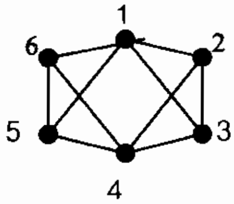


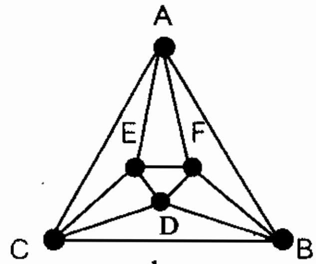
18.2



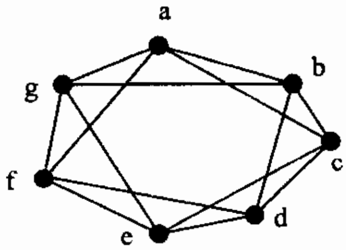
19. ให้กำหนดชื่อจุดยอดใหม่ เพื่อให้กราฟ 2 รูป เป็นแบบสมสัณฐาน

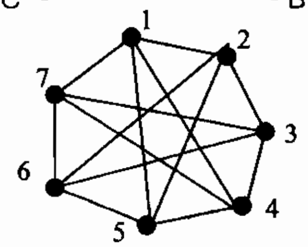
19.1





19.2





20. ให้เขียนกราฟเชื่อมโยงจุดยอด 4 จุด ซึ่งไม่สมสัณฐาน

21. กราฟ G สมสัณฐานกับกราฟย่อยของตนเองได้หรือไม่ (ยกเว้นกราฟ G เอง)