บทที่ 6
ความต่อเนื่อง
Connectness

6.1 ความต่อเนื่อง

ในบทนี้จะได้กล่าวถึงความต่อเนื่องของปริภูมิ และความต่อเนื่องของปริภูมิย่อยซึ่งเป็นคุณสมบัติอย่างหนึ่งของปริภูมิเชิงโทโพโลยีซึ่งแนวความคิดง่าย ๆ ของปริภูมิต่อเนื่องคือเป็นเซตที่เป็นชิ้นเดียวไม่ขาดตอน แต่ปริภูมิที่ไม่ต่อเนื่อง (disconnected) คือปริภูมิที่แยกเป็นส่วน ๆ ซึ่งจะได้กล่าวถึงนิยามและคุณสมบัติต่อไปนี้

นิยาม 6.1 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี X เป็นเซตต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ X ไม่สามารถแยกออกเป็นผลผนวกของเซตเปิด 2 เซต ซึ่งเป็นเซตต่างสมาชิก และทั้ง 2 เซตไม่เป็นเซตว่าง

นั่นคือ X เป็นเซตต่อเนื่องก็ต่อเมื่อไม่มีเซตเปิด U, V ซึ่ง $X = U \cup V, U \neq \varnothing, V \neq \varnothing$ และ $U \cap V = \varnothing$

ถ้า $X = U \cup V$ เมื่อ U, V เป็นเซตเปิดและ $U \cap V = \varnothing, U \neq \varnothing, V \neq \varnothing$ แล้วจะได้ว่า U, V เป็นเซตปิดด้วย ดังนั้นกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งคือ X เขียนได้แล้วจะได้ว่า U, V เป็นเซตปิดด้วย ดังนั้นกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งคือ X เขียนได้ในรูปผลผนวกของเซตปิด 2 เซต ดังนั้นนิยามของเซตต่อเนื่องกล่าวได้อีกแบบหนึ่งคือ

X เป็นเซตต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ ไม่มีเซตปิด A, B ซึ่ง $X = A \cup B, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$ และ $A \cap B = \varnothing$

นอกจากนิยามในรูปข้างต้นแล้วเรามีนิยามของเซตต่อเนื่องอีกแบบหนึ่งดังนี้

นิยาม 6.2 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี X เป็นเซตต่อเนื่องก็ต่อเมื่อเซตย่อยของ X ซึ่งเป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดมีเพียง 2 เซตเท่านั้นคือ $\varnothing$ และ X

แต่ในการพิสูจน์นิยมอาศัยนิยามของเซตไม่ต่อเนื่อง (disconnected set) เพราะว่าสะดวกกว่าในการพิสูจน์ซึ่งนิยามก็คือนิเสธของนิยามข้างบน ดังนี้

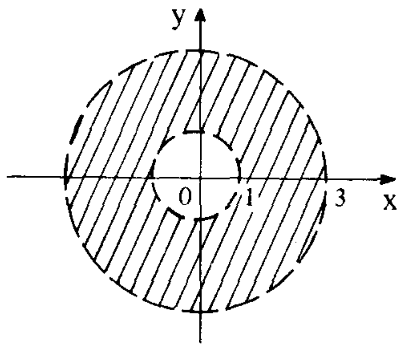
นิยาม 6.3 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี X เป็นเซตไม่ต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อมีเซตเปิด U, V ซึ่ง $X = U \cup V, U \cap V = \varnothing$ และ $U \neq \varnothing, V \neq \varnothing$

หรือ X เป็นเซตไม่ต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อมีเซตปิด U, V ซึ่ง $X = U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$ และ $U \neq \varnothing, V \neq \varnothing$

หมายเหตุ 1. ถ้า X ต่อเนื่อง เรียก (X, τ) ว่าปริภูมิต่อเนื่อง (connected space)

2. ถ้า X ไม่ต่อเนื่อง เรียก (X, τ) ว่าปริภูมิไม่ต่อเนื่อง (disconnected space)

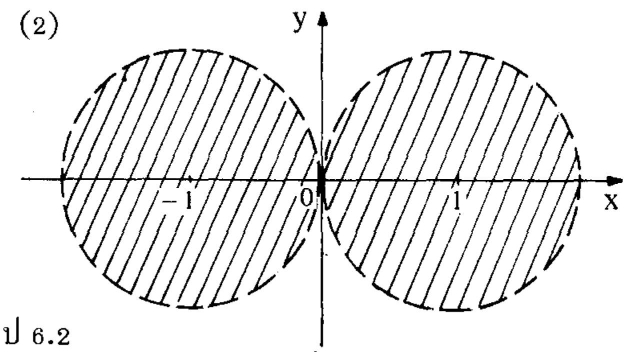
ตัวอย่าง 6.1 (1)



รูป 6.1

$X = \{ z \mid 1 < |z| < 3 \}$ เป็นเซตต่อเนื่อง

(2)



รูป 6.2

$X = \{ z \mid |z-1| < 1 \} \cup \{ z \mid |z+1| < 1 \}$

X ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง ■

ตัวอย่าง 6.2 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี โดยที่

$X = \{ a, b, c, d, e \}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ c, d \}, \{ a, c, d \}, \{ b, c, d, e \} \}$

จงพิจารณาว่า (X, τ) เป็นปริภูมิต่อเนื่องหรือไม่

วิธีทำ (1) มีเซตเปิด 2 เซตคือ $\{a\}, \{ b, c, d, d \}$ ซึ่งต่างก็ไม่เป็นเซตว่าง

และ $\{a\} \cup \{ b, c, d, e \} = X$

$\{a\} \cap \{ b, c, d, e \} = \varnothing$

เพราะฉะนั้น (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิต่อเนื่อง

(2) พิจารณาเซตปิดทั้งหมดของ (X, τ) จะได้

$\varnothing, X, \{ b, c, d, e \}, \{ a, b, e \}, \{ b, e \}, \{a\}$

จะเห็นว่าเซตย่อยของ X ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดนอกจาก ∅ และ X แล้วยังมีอีก 2 เซตคือ {a}, { b, c, d, e }

ดังนั้น (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิต่อเนื่อง ■

ตัวอย่าง 6.3 กำหนด X = { a, b, c, d, e }

τ = { ∅, X, {a}, { a, b }, { a, c, d }, { a, b, c, d }, { a, b, e } }

จงพิจารณาว่าปริภูมิ (X, τ) เป็นปริภูมิต่อเนื่องหรือไม่

วิธีทำ เซตเปิดในปริภูมินี้คือ

∅, X, {a}, { a, b }, { a, c, d }, { a, b, c, d }, { a, b, e }

เซตปิดในปริภูมินี้ คือ

∅, X, { b, c, d, e }, { c, d, e }, { b, e }, {e}, { c, d }

จะเห็นว่าเซตย่อยของ X ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดคือ ∅, X เท่านั้น

ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิต่อเนื่อง ■

ในบางครั้งการศึกษาคุณสมบัติต่อเนื่องทั้งปริภูมิอาจเกินความจำเป็น เราศึกษาเพียงปริภูมิย่อยเท่านั้น ซึ่งนิยามความต่อเนื่องบนปริภูมิย่อยได้ดังนี้

นิยาม 6.4 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อยแล้ว Y เป็นเซตต่อเนื่องก็ต่อเมื่อเซตย่อยของ Y ซึ่งเป็นทั้งเซตเปิดสัมพัทธ์ และเซตปิดสัมพัทธ์มีเพียง ∅ และ Y เท่านั้น

ตัวอย่าง 6.4 กำหนด R และโทโพโลยีปกติบน R

ให้ Y = [1, 3] ∪ (4, 7) และโทโพโลยีบน Y คือโทโพโลยีปกติ

ดังนั้น (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อยของ (X, τ)

จงพิจารณาว่า Y เป็นเซตต่อเนื่องหรือไม่

วิธีทำ เพราะว่า [1, 3] = [1, 3] ∩ Y

เพราะฉะนั้น [1, 3] เป็นเซตปิดสัมพัทธ์ใน Y

เพราะว่า [1, 3] = (0, 4) ∩ Y

เพราะฉะนั้น [1, 3] เป็นเซตเปิดสัมพัทธ์ใน Y

จะเห็นว่า [1, 3] เป็นทั้งเซตเปิดสัมพัทธ์ และเซตปิดสัมพัทธ์ใน Y

ดังนั้น Y ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง ■

ทฤษฎีบท 6.1 กำหนดให้ (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิ (X, τ) Y ไม่เป็นเซตต่อเนื่องก็ต่อเมื่อมีเซตย่อยเปิด U, V ของ X ซึ่ง

(1) $Y \subsetneq u \cup v$

(2) $U \cap V \subseteq X - Y$

(3) u f-l $Y \neq 0$

(4) v n $Y \neq 0$

พิสูจน์ (1) สมมุติ Y ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

จะมี $U' \subseteq Y$, $U' \neq \varnothing$, $U' \neq Y$ และ U' เป็นทั้งเซตเปิดสัมพัทธ์ และเซตปิดสัมพัทธ์

ดังนั้น $Y - U'$ # A, $Y - U' \neq 0$ และ $Y - U'$ เป็นเซตเปิดสัมพัทธ์

ดังนั้น $U' = U \cap Y$ u เป็นเซตเปิดใน X

$Y - U' = v$ n y v เป็นเซตเปิดใน x

เพราะฉะนั้น $Y = U' \cup (Y - U')$

$= (U \cap Y)$ u $(v \cap Y)$

$= (U$ **u** $V) \cap Y$

ดังนั้น $Y \subseteq U \cup V$ .... (1)

เพราะว่า $(U \cap V) \cap Y = (U \cap Y) \cap (V \cap Y)$

$= U' \cap (Y - U')$

$= \varnothing$

ดังนั้น $(U \cap V) \subset X - Y$ .... (2)

เพราะว่า $U' \neq 0$, ดังนั้น $Y - U' \neq 0$

จะได้ว่า $U \cap Y \neq \varnothing$ .... (3)

$V \cap Y \neq 0$ .... (4)

(2) สมมุติว่ามีเซตย่อยเปิด U, V ของ X ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติ

1) $Y \subset U \cup V$

2) $U \cap V \subseteq X - Y$

3) $U \cap Y \neq 0$

4) $V \cap Y \neq \varnothing$

จะได้ว่า $Y = Y \cap (U \cup V)$

$= (Y \cap U)$ u $(y \cap v)$

$= U' \cup V'$ เมื่อ $U' = Y \cap U$, $V' =$ y n v

และ $U' \cap V' = (Y \cap U) \cap (Y \cap V)$

$= Y \cap (U \cap V)$

$= \varnothing$

ดังนั้น $U' = X - V'$ และ $V' = Y - U'$

ดังนั้น U' (หรือ V') เป็นทั้งเซตเปิดสัมพัทธ์ และเซตปิดสัมพัทธ์ใน Y

แต่ $U' \neq \varnothing$ และ $U' \neq Y$

ดังนั้นจะได้ว่า Y ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง ■

โดยทั่ว ๆ ไปแล้วเมื่อกำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) และ $Y \subseteq X$ แล้ว เราสามารถหาโทโพโลยีบน Y ที่ทำให้เป็นปริภูมิย่อยได้เสมอและจะมีเพียงโทโพโลยีเดียวเท่านั้น ดังนั้นในการพิจารณาว่าปริภูมิย่อยเป็นปริภูมิต่อเนื่องหรือไม่นั้นทำได้ 2 แบบด้วยกันคือ

(1) หา τ_y ก่อนแล้วดูว่าเซตเปิดสัมพัทธ์และเซตปิดสัมพัทธ์มีตัวอื่นนอกเหนือจาก $\varnothing$, X หรือไม่ ถ้ามีแสดงว่าไม่ต่อเนื่อง ถ้าไม่มีแสดงว่าต่อเนื่อง

(2) พิจารณาว่าเป็นเซตต่อเนื่องหรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีบท 6.1 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.5 กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ a, b, c \}, \{ a, d, e \} \}$

เป็นโทโพโลยีบน X

ให้ $Y = \{ b, c, d \}$

จงพิจารณาว่า Y เป็นเซตต่อเนื่องหรือไม่

วิธีทำ (1) หาโทโพโลยีสัมพัทธ์บน Y

$\varnothing \cap Y = \varnothing$

$X \cap Y = Y$

$\{a\} \cap Y = \varnothing$

$\{ a, d, c \} \cap Y = \{ b, c \}$

$\{ a, b, e \} \cap Y = \{d\}$

ดังนั้น $\tau_y = \{ \varnothing, Y, \{ b, c \}, \{d\} \}$

จะเห็นว่าเซตเปิดสัมพัทธ์และเซตปิดสัมพัทธ์ของ Y นอกจาก $\varnothing$ และ Y แล้วก็คือ $\{ b, c \}$, $\{d\}$

ดังนั้น Y ไม่ต่อเนื่อง

(2) ใช้ทฤษฎีบท 6.1

ให้ $U = \{ a, b, c \}$, $V = \{ a, d, e \}$

ดังนั้น $Y = \{ b, c, d \} \subseteq U \cup V$

และ $U \cap V = \{a\} \subseteq X - Y = \{a, e\}$

และ $U \cap Y = \{b, c\} \neq \varnothing$

$V \cap Y = \{d\} \neq \varnothing$

ดังนั้นจะได้ว่า Y ไม่ต่อเนื่อง ■

ทฤษฎีบทต่อไปจะได้กล่าวถึงความสัมพัทธ์ระหว่างเซตต่อเนื่องในปริภูมิ (X, τ) และเซตต่อเนื่องในปริภูมิ (Y, τ') โดยมีฟังก์ชันต่อเนื่อง f ส่งเซตหนึ่งไปยังอีกเซตหนึ่ง ดังนี้

ทฤษฎีบท 6.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) ไปยังปริภูมิเชิงโทโพโลยี (Y, τ') แล้วจะได้ว่า

ถ้า A เป็นเซตย่อยที่ต่อเนื่องใน X แล้ว $f(A)$ จะเป็นเซตต่อเนื่องใน Y

พิสูจน์ สมมุติ $f(A)$ ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

ดังนั้นจะมีเซตย่อยเปิด U', V' ของ Y ซึ่ง

(1) $f(A) \subset U' \cup V'$

(2) $U' \cap V' \subset Y - f(A)$

(3) $U' \cap f(A) \neq \varnothing$

(4) $V' \cap f(A) \neq \varnothing$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น $f^{-1}(U')$, $f^{-1}(V')$ เป็นเซตย่อยเปิดของ X

ให้ $U = f^{-1}(U')$

$V = f^{-1}(V')$

ดังนั้นจะได้ว่า

i) $A \subset f^{-1}(f(A))$

$u\ f^{-1}(U'\ u\ V')$

$= f^{-1}(U')\ u\ f^{-1}(V')$

$= u\ u\ v$

ii) $U\ n\ V = f\ ^{1}(U')\ n\ f^{-1}(V')$

$= f^{-1}(U'\ n\ V')$

$\subset f^{-1}(Y - f(A))$

$= X - f^{-1}(f(A))$

$\subseteq X - A$

iii) เพราะว่า $U' \cap f(A) \neq \varnothing$

ดังนั้น $U \cap A \neq \varnothing$

iv) เพราะว่า $V' \cap f(A) \neq \varnothing$

ดังนั้น $V \cap A \neq \varnothing$

ดังนั้น A ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

ดังนั้นจะได้ว่า ถ้า A เป็นเซตต่อเนื่องใน X แล้ว f(A) เป็นเซตต่อเนื่องใน Y ■

ทฤษฎีบท 6.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก (X, τ) ไปบน (Y, τ') แล้วจะได้ว่า ถ้า X เป็นเซตต่อเนื่องแล้ว Y เป็นเซตต่อเนื่อง

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 6.2 ■

สำหรับปริภูมิ 2 ปริภูมิที่คล้ายแบบกัน (homeomorphic) เนื่องจากมีฟังก์ชันต่อเนื่อง f ซึ่งส่งปริภูมิหนึ่งไปบนอีกปริภูมิหนึ่งแบบ 1-1 และ f^{-1} ต่อเนื่องด้วย ดังนั้น โดยอาศัยทฤษฎีบท 6.3 เราจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.4 ปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) และ (Y, τ') คล้ายแบบกัน (homeomorphic) แล้วจะได้ว่า

x เป็นเซตต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ Y เป็นเซตต่อเนื่อง

พิสูจน์ ใช้ทฤษฎีบท 6.3 ■

ทฤษฎีบท 6.5 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $X = U \cup V$

U, V เป็นเซตเปิดซึ่ง $U \cap V = \varnothing$, $U \neq \varnothing$, $V \neq \varnothing$

ถ้า A เป็นปริภูมิย่อยที่ต่อเนื่องของ X แล้ว $A \subset U$ หรือ $A \subset V$

พิสูจน์ เพราะว่า $X = U \cup V$ และ $A \subset X$

ดังนั้น $A \subset U \cup V$

พิจารณา $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$

เพราะว่า A เป็นปริภูมิต่อเนื่อง

ดังนั้น $A \cap U = \varnothing$ หรือ $A \cap V = \varnothing$

ดังนั้น $A \subset X - U$ หรือ $A \subset X - V$

แต่ $U \cap V = \varnothing$

ดังนั้น $A \subset V$ หรือ $A \subset U$ ■

ทฤษฎีบท 6.6 กำหนด (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี X ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชันต่อเนื่องจาก X ไปบนปริภูมิเต็มหน่วยของ 2 จุด { 0, 1 }

พิสูจน์ (1) สมมุติ X ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

ดังนั้นจะมีเซตเปิด U, V ซึ่ง $X = U \cup V$ และ $U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset,$ $V \neq \emptyset$

นิยามฟังก์ชัน $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

ฟังก์ชันนี้นิยามได้เพราะว่า $U \cap V = \emptyset, \ X = U \cup V$

เพราะว่า U, V เป็นเซตเปิดและ $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$

ดังนั้นจะได้ว่า f ต่อเนื่อง และเป็นฟังก์ชันจาก X ไปบน $\{0, 1\}$

(2) สมมุติมี $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก X ไปบน $\{0, 1\}$

สมมุติ X เป็นเซตต่อเนื่อง

จากทฤษฎีบท 6.3 จะได้ว่า $\{0, 1\}$ เป็นเซตต่อเนื่อง

แต่ $\{0, 1\}$ ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น X ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง ■

ทฤษฎีบท 6.7 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ให้ $Y = \{0, 1\}$ โทโพโลยีบน Y คือ โทโพโลยีเต็มหน่วย (discrete topology) X เป็นเซตต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันต่อเนื่องจาก X ไปยัง Y เป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function)

พิสูจน์ เพราะว่า $Y = \{0, 1\}$

ดังนั้น $\tau_y = \{\emptyset, Y, \{0\}, \{1\}\}$

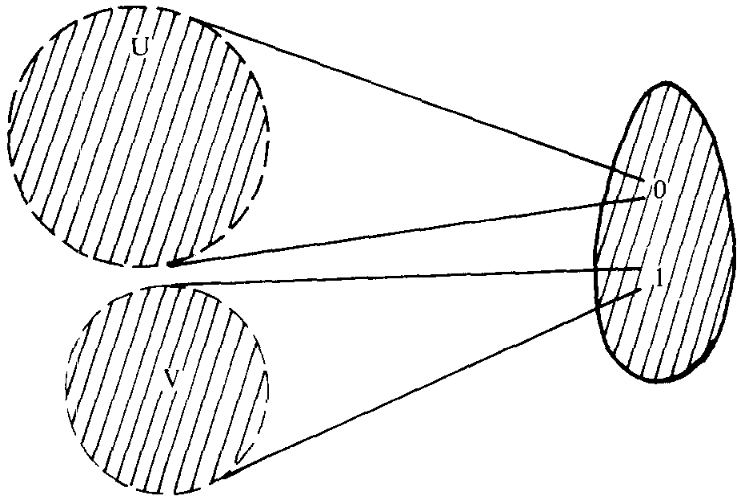
(1) สมมุติ X เป็นเซตต่อเนื่อง

ต้องการพิสูจน์ว่าฟังก์ชันต่อเนื่องจาก X ไปยัง Y เป็นฟังก์ชันคงที่

สมมุติฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \rightarrow Y$ ไม่ใช่ฟังก์ชันคงที่

ให้ $U = f^{-1}(\{0\})$

$V = f^{-1}(\{1\})$



รูป 6.3

เพราะว่า f ไม่ใช่ฟังก์ชันคงที่

ดังนั้น $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$

ดังนั้น $U \neq \emptyset$, $U \neq X$

เพราะว่า $\{0\}$, $\{1\}$ เป็นเซตย่อยเปิดของ Y และ f ต่อเนื่อง

ดังนั้น U, V เป็นเซตย่อยเปิดของ X

แต่ $U \cap V = \emptyset$

ดังนั้น $U = X - V$

ดังนั้น U เป็นทั้งเซตย่อยเปิด และเซตย่อยปิดของ X

ดังนั้น X ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก X ไปยัง Y เป็นฟังก์ชันคงที่

(2) สมมุติ ฟังก์ชันต่อเนื่องจาก X ไปยัง Y เป็นฟังก์ชันคงที่

ต้องการแสดงว่า X เป็นเซตต่อเนื่อง

สมมุติ X ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

เพราะฉะนั้นจะมีเซตย่อยเปิด U, V ของ X ซึ่ง $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$

และ $U \cap V = \emptyset$, $X = U \cup V$

ให้ $f : X \rightarrow Y$ นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \in U \\ 1 & \text{เมื่อ } x \in V \end{cases}$$

จะได้ว่า $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

$f^{-1}(Y) = X$

$f^{-1}(\{0\}) = U$

$f^{-1}(\{1\}) = V$

นั่นแสดงว่า f^{-1} ส่งเซตเปิดใน Y ไปยังเซตเปิดใน X

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ไม่ใช่ฟังก์ชันคงที่

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น X เป็นเซตต่อเนื่อง ■

ทฤษฎีบท 6.8 กำหนดให้ (X, τ), (Y, τ') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ถ้า X และ Y เป็นเซตต่อเนื่องแล้วจะได้ว่า $X \times Y$ เป็นเซตต่อเนื่อง

พิสูจน์ ต้องการแสดงว่า $X \times Y$ เป็นเซตต่อเนื่อง

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก $X \times Y$ ไปยัง $\{0, 1\}$

ต้องการแสดงว่า $f : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$ เป็นฟังก์ชันคงที่

สมมุติว่าฟังก์ชันต่อเนื่อง f ไม่ใช่ฟังก์ชันคงที่

ดังนั้นจะมีจุด (x_0, y_0), (x_1, y_1) ใน $X \times Y$ ซึ่ง

$$f(x_0, y_0) = 0$$

$$f(x_1, y_1) = 1$$

สมมุติ $f(x_0, y_1) = 1$

นิยามฟังก์ชัน $i_{x_o} : Y \rightarrow X \times Y$ โดยที่

$$i_{x_o}(y) = (x_0, y)$$

จะได้ว่า i_{x0} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น $f \circ i_{x_o} : Y \rightarrow \{0, 1\}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

แต่

$$\begin{aligned}(f \circ i_{x_o})(y_o) &= f(i_{x_o}(y_o)) \\ &= f(x_0, y_0) \\ &= 0 \\ (f \circ i_{x_o})(y_1) &= f(i_{x_o}(y_1)) \\ &= f(x_0, y_1) \\ &= 1\end{aligned}$$

จะเห็นว่ามีฟังก์ชันจาก Y ไปบัง $\{0, 1\}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่

ดังนั้น Y ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น f จาก $X \times Y$ ไปยัง $\{0, 1\}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเป็นฟังก์ชันคงที่

ดังนั้น $X \times Y$ เป็นเซตต่อเนื่อง

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(x_0, y_1) = 0$

นิยามฟังก์ชัน $i_{y_1} : X \rightarrow X \times Y$ โดยที่

$$i_{y_1}(x) = (x, y_1)$$

จะได้ว่า i_{y_1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น $f \circ i_{y_1}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

แต่
$$\begin{aligned}(f \circ i_{y_1})(x_0) &= f(\, i_{y_1}(x_0)\,) \\ &= f(x_0, y_1) \\ &= 0 \\ (f \circ i_{y_1})(x_1) &= f(\, i_{y_1}(x_1)\,) \\ &= f(x_1, y_1) \\ &= 1\end{aligned}$$

จะเห็นว่ามีฟังก์ชันต่อเนื่องจาก X ไปยัง $\{0, 1\}$ ซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันคงที่

ดังนั้น X ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น f จาก $X \times Y$ ไปยัง $\{0, 1\}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันคงที่

ดังนั้น $X \times Y$ เป็นเซตต่อเนื่อง ■

ทฤษฎีบท 6.9 กำหนดให้ (X_i, τ_i) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี สำหรับ $i = 1, \ldots, n$ ถ้า X_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ เป็นเซตต่อเนื่อง

แล้ว $\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ เป็นเซตต่อเนื่อง

พิสูจน์ ใช้ทฤษฎีบท 6.8 และการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical induction) ■

ทฤษฎีบทที่กล่าวมาข้างต้นเป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่อง และไม่ต่อเนื่องของเซตในปริภูมิเชิงโทโพโลยีทั่ว ๆ ไป แต่ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นการกล่าวถึงความต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 6.10 กำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยีปกติ (R, τ_d) และ A เป็นเซตย่อยของ R ซึ่งมีสมาชิกแตกต่างกันอย่างน้อย 2 จุด แล้วจะได้ว่า

A เป็นเซตต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ A เป็นช่วง

พิสูจน์ การพิสูจน์ว่า A เป็นเซตต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ A เป็นช่วงมีความหมายเช่นเดียวกันกับ A ไม่เป็นเซตต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ A ไม่เป็นช่วง

(1) สมมุติ A ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

โดยวิธีการเดียวกันกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่ามีเซตย่อยปิด E และ F ของ R ซึ่ง

(i) $A \subseteq E \cup F$

(ii) $E \cap F \subseteq R - A$

(iii) $E \cap A \neq \varnothing$

(iv) $F \cap A \neq \varnothing$

ให้ $a \in E \cap A,\ b \in F \cap A$ โดยที่ $a < b$

ต้องการแสดงว่ามี $c \in (a, b)$ โดยที่ $c \notin A$

ให้ $F' = F \cap [a, b]$

ดังนั้น F' เป็นเซตปิด และ $F' \neq \varnothing$

ให้ $c = \text{g.l.b. } F'$

จะได้ว่า $e \in F'$

และ $a \neq c$

เพราะฉะนั้น $a < c$

ให้ $E' = E \cap [a, c]$

จะได้ว่า E' เป็นเซตปิดและ $E' \neq \varnothing$

ให้ $d = \text{l.u.b. } E'$

จะได้ว่า $d \in E'$

กรณีที่ 1 : $c = d$

จะได้ว่า $c \in E \cap F$

ดังนั้น $c \notin A$

เพราะฉะนั้น A ไม่เป็นช่วง

กรณีที่ 2 : $d < c$

เพราะว่า $c = \text{g.l.b. } F'$ และ $d = \text{l.u.b. } E'$

ดังนั้น $(d, c) \cap (E \cup F) = \varnothing$

ดังนั้น $(d, c) \cap A = \varnothing$

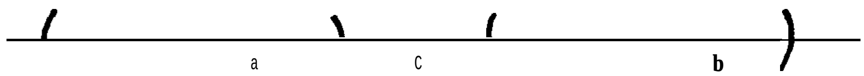
นั่นคือมีจุดระหว่าง a, b ซึ่งไม่ใช่สมาชิกของ A

เพราะฉะนั้น A ไม่เป็นช่วง

กรณีที่ 3 : $c < d$ (เป็นไปไม่ได้)

(2) สมมุติ A ไม่เป็นช่วง

จะมีจุด a, b, c โดยที่ $a < c < b$ และ $a, b \in A$ แต่ $c \notin A$



รูป 6.4

ให้ $U = (-\infty, c)$

$V = (c, \infty)$

จะเห็นว่า U, V เป็นเซตย่อยเปิดของ R ซึ่ง

(i) $A \subseteq U \cup V$

(ii) $U \cap V \subseteq R - A$

(iii) $U \cap A \neq \varnothing$

(iv) $V \cap A \neq \varnothing$

ดังนั้น A ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง ■

ทฤษฎีบท 6.11 สำหรับปริภูมิเชิงโทโพโลยีปกติ R เป็นเซตต่อเนื่อง

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 6.10 เพราะว่า R เป็นช่วงและ $R \subseteq R$ ดังนั้น R เป็นเซตต่อเนื่อง ■

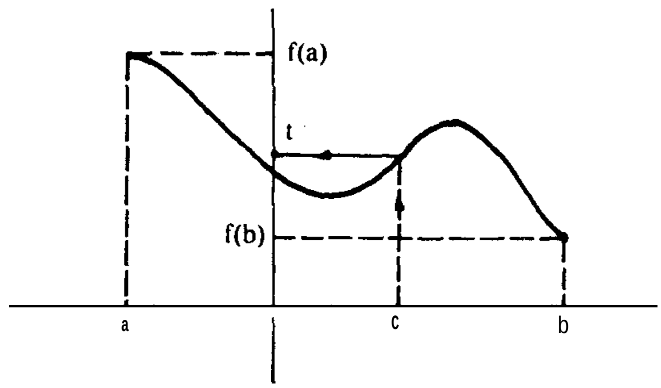
ทฤษฎีบท 6.12 สำหรับปริภูมิเชิงโทโพโลยีปกติ R^n และ C^n เป็นเซตต่อเนื่อง

พิสูจน์ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด ■

นอกจากนี้ประโยชน์ของความต่อเนื่องของเซตยังใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทสำคัญ ๆ ทางแคลคูลัสได้โดยง่ายเช่นทฤษฎีบทค่ากลาง (mean-valued theorem)

ทฤษฎีบท 6.13 กำหนดให้ $f : [a, b] \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f(a) \neq f(b)$ แล้วจะได้ว่าสำหรับทุก ๆ ค่า $f(a) < t < f(b)$ จะมี $a < c < b$ ซึ่ง

$$f(c) = t$$



รูป 6.5

พิสูจน์ เพราะว่า [a, b] เป็นเซตต่อเนื่อง
และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก [a, b] ไปยัง R
ดังนั้น f([a, b]) เป็นเซตต่อเนื่อง
จะได้ว่า f([a, b]) เป็นช่วง
เพราะว่า $f(a), f(b) \in f([a, b])$ และ $f(a) < t < f(b)$
ดังนั้น $t \in f([a, b])$
ดังนั้นจะมี $c \in [a, b]$ ซึ่ง $f(c) = t$ ∎

6.2 เซตแยกกันได้

Separated set

นิยาม 6.5 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A, B เป็นเซตย่อยของ X เรียก A, B ว่า เซตแยกกันได้ ก็ต่อเมื่อ $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ และ $A \cap \overline{B} = \emptyset$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$

ตัวอย่าง 8.6 กำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยี R

(I) ให้ $A = (0, 3)$, $B = (3, 5]$
จะเห็นว่า $A \neq 0$, $B \neq 0$
และ $\overline{A}$ n $B = [0, 3]$ n $(3, 5] = 0$
A n $\overline{B} = (0, 3)$ n $[3, 5] = 0$
ดังนั้น A, B เป็นเซตแยกกันได้

(2) ให้ $A = (0, 3]$, $B = (3, 5]$
จะเห็นว่า $A \neq 0$ $B \neq 0$
และ $\overline{A} \cap B = [0, 3] \cap (3, 5] = 0$

แต่ $A \cap \overline{B} = (0, 3] \cap [3, 5] = \{3\} \neq \varnothing$

ดังนั้น A, B ไม่เป็นเซตแยกกันได้

ทฤษฎีบท 6.14 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี X เป็นผลผนวกของเซตแยกได้ 2เซต ก็ต่อเมื่อ X ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

พิสูจน์ (1) สมมุติ X เป็นผลผนวกของเซตแยกได้ 2 เซต

สมมุติ A, B เป็นเซตย่อยของ X, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ และ A, B เป็นเซตแยกได้ของ X

ให้ $X = A \cup B$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\overline{A} &= X \cap \overline{A}\\ &= (A \cup B) \cap \overline{A}\\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A})\\ &= A \cup \varnothing\\ &= A\end{aligned}$$

แสดงว่า A เป็นเซตปิด

และ
$$\begin{aligned}\overline{B} &= X \cap \overline{B}\\ &= (A \cup B) \cap \overline{B}\\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})\\ &= \varnothing \cup B\\ &= B\end{aligned}$$

แสดงว่า B เป็นเซตปิด

เพราะว่า $A \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$

ดังนั้นจะได้ว่ามีเซตปิด A, B ซึ่ง $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ และ $A \cup B = X$

$A \cap B = \varnothing$

ดังนั้น X เป็นเซตไม่ต่อเนื่อง

(2) สมมุติ X เป็นเซตไม่ต่อเนื่อง

ดังนั้นจะมีเซตเปิด U, V ซึ่ง $U \neq \varnothing$, $V \neq \varnothing$ และ $U \cup V = X$,

$U \cap V = \varnothing$

ดังนั้น U, V เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดใน X

ดังนั้น $U = \overline{U}$ และ $V = \overline{V}$

จะได้ว่า $\overline{U} \cap V = U \cap V = \varnothing$

และ $\quad U \cap \bar{V} = U \cap V = \varnothing$

ดังนั้น X เป็นผลผนวกของเซตแยกได้ 2 เซต ■

แบบฝึกหัด 6.1

1. กำหนดให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$

แล้ว X เป็นเซตต่อเนื่องหรือไม่

ถ้า $A = \{b, c, d\}$ แล้ว A เป็นเซตต่อเนื่องหรือไม่

2. กำหนดให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

และ $A = \{b, d, e\}$

A เป็นเซตต่อเนื่องหรือไม่ เพราะเหตุใด

3. กำหนดโทโพโลยีปกติบน R และให้ $A = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 - y^2 > 1\}$ จงพิสูจน์ว่า A ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง

4. กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X แล้วจะได้ว่า A ไม่เป็นเซตต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อมีเซตย่อยปิด E, F ของ X โดยที่

(i) $A \subseteq E \cup F$

(ii) $E \cap F \subseteq X - A$

(iii) $E \cap A \neq \varnothing$

(iv) $F \cap A \neq \varnothing$

5. กำหนดให้ A, E, F เป็นเซตย่อยของปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) ถ้า E, F เป็นเซตปิดที่สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(i) $A \subseteq E \cup F$

(ii) $E \cap F \subseteq X - A$

(iii) $E \cap A \neq \varnothing$

(iv) $F \cap A \neq \varnothing$

จงแสดงว่า $E \cap A$, $F \cap A$ เป็นเซตแยกได้