บทที่ 5
เซตปกคลุมแน่น
Compact Set

5.1 เซตปกคลุมแน่น

เช่นเดียวกันกับคุณสมบัติที่สำคัญอื่น ๆ ของปริภูมิเชิงโทโพโลยี คุณสมบัติปกคลุมแน่นเป็นคุณสมบัติสำคัญทางโทโพโลยีที่เป็นนามธรรมอีกอันหนึ่งซึ่งในการวิเคราะห์จำนวนจริง เราได้เคยศึกษาทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องทฤษฎีบทหนึ่งคือ ทฤษฎีบทเซตปกคลุมไฮเน-โบเรล (Heine-Borel covering theorem)

คุณสมบัติปกคลุมแผ่นมีวิธีการนิยามได้หลายแบบด้วยกัน แต่ในที่นี้เราจะกล่าวในรูปของเซตปกคลุม (covering)

นิยาม 5.1 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $F = \{ F_i \mid i \in J \}$ เป็นชั้นของเซตย่อยของ X แล้วเรียก F ว่าเป็นเซตปกคลุม (cover) ของ X ก็ต่อเมื่อ $X = \bigcup_{i \in J} F_i$

ถ้า F_i เป็นเซตเปิดสำหรับทุก ๆ $i \in J$ แล้วจะเรียก F ว่า เซตปกคลุมเปิด (open cover) ของ X

ถ้า J เป็นเซตจำกัดแล้ว จะเรียก F ว่าเซตปกคลุมจำกัด (finite cover) ของ X

เพราะว่า $\bigcup_{i \in J} F_i \subseteq X$ ดังนั้นในการแสดงว่า f เป็นเซตปกคลุมของ X เราเพียงแสดงว่า $X \subseteq \bigcup_{i \in J} F_i$ ก็เพียงพอ

นิยาม 5.2 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $F = \{ F_i \mid i \in J \}$ เป็นชั้นของเซตย่อยของ X แล้วเรียก F ว่าเซตปกคลุมของ A ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq \bigcup_{i \in J} F_i$

ตัวอย่าง 5.1 กำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยี R ตามปกติ

ให้ $F = \{ S(x; 1) \mid x \in R \}$ เป็นเซตของทรงกลมเปิดที่จุดศูนย์กลางที่ x ใด ๆ ใน R และมีรัศมีเท่ากับ 1

จะได้ว่า F เป็นเซตปกคลุมของ R ($R \subseteq \bigcup_{x \in R} S(x; 1)$)

ตัวอย่าง 5.2 กำหนดให้ปริภูมิเชิงโทโพโลยี R ตามปกติ

ให้ $F_i = [i, i+1],\ i \in I$

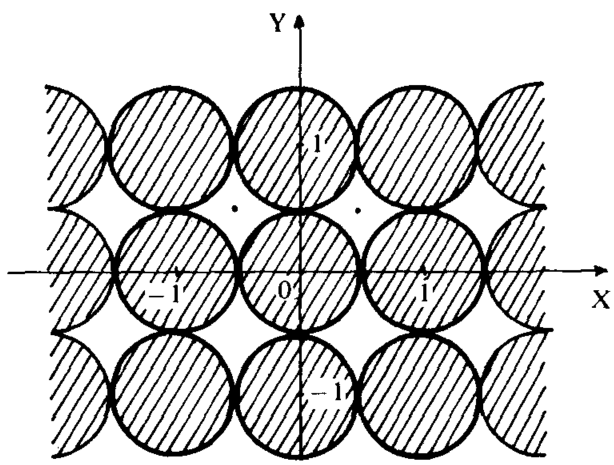
ให้ $F = \{ F_i \mid i \in I \}$

จะได้ว่า $R = \bigcup_{i \in I} F_i$

ดังนั้น F เป็นเซตปกคลุมของ R ■

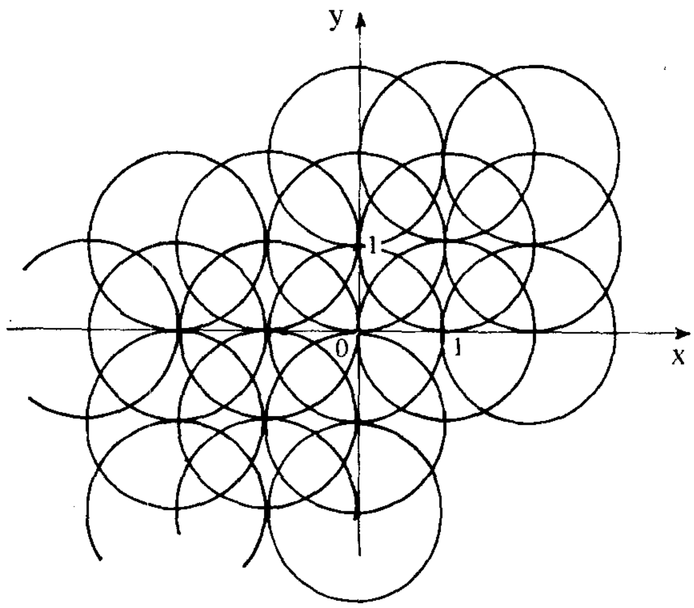
ตัวอย่าง 5.3 กำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยี R^2 ตามปกติ

(1) ให้ $F = \{ S[x; \frac{1}{2}] \mid x \in I \times I \}$ เป็นเซตของทรงกลมปิดซึ่งมีจุดศูนย์กลางคือคู่อันดับที่ตัวที่ 1 และตัวที่ 2 เป็นจำนวนเต็ม และมีรัศมีเท่ากับ $\frac{1}{2}$ จะเห็นว่า F ไม่เป็นเซตปกคลุมของ R^2 เพราะว่ามีสมาชิกใน R^2 ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของ $\bigcup_{x \in I \times I} S[x; \frac{1}{2}]$ เช่น $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ เป็นต้น



รูป 5.1

(2) ให้ $F = \{ S(x; 1) \mid x \in I \times I \}$ เป็นเซตของทรงกลมเปิดซึ่งมีจุดศูนย์กลางคือคู่อันดับที่ตัวที่ 1 และตัวที่ 2 เป็นจำนวนเต็ม และรัศมีเท่ากับ 1



รูป 5.2

จะเห็นว่า F เป็นเซตปกคลุมของ R^2
และจะได้ว่า F เป็นเซตปกคลุมเปิดของ R^2 ■

ตัวอย่าง 5.4 กำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยี R ตามปกติ $A = (0, 1]$ เป็นเซตย่อยของ R

ให้ $F_1 = (\frac{1}{2}, 2)$

$F_i = (\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i-1})$ สำหรับ $i \in N,\ i > 1$

จะเห็นว่า $F_2 = (\frac{1}{3}, 1)$

$F_3 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

. . . .

. . . .

จะเห็นว่า $A \subseteq \bigcup_{i \in N} F_i$

จะได้ว่า $F = \{ F_i \mid i \in N \}$ เป็นเซตปกคลุมของ $A = (0, 1]$ ■

นิยาม 5.3 ถ้า F เป็นเซตปกคลุมของ X และ F′ เป็นชั้นย่อย (subclss) ของ F ถ้า F′ เป็นเซตปกคลุมของ X แล้วเรียก F′ ว่าเซตปกคลุมย่อย (subcover) ของ F

ถ้า F′ เป็นชั้นย่อยจำกัดแล้ว เรียก F′ ว่าเซตปกคลุมย่อยจำกัด (finite subcover)

นิยาม 5.4 กำหนด (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี แล้วเรียก X ว่าเซตปกคลุมแน่น ก็ต่อเมื่อทุก ๆ เซตปกคลุมเปิดของ X จะมีเซตปกคลุมย่อยจำกัด

และถ้า $A \subseteq X$ แล้ว A เป็นเซตปกคลุมแน่น (เมื่อเทียบกับ τ) ก็ต่อเมื่อทุก ๆ เซตปกคลุมเปิดของ A มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด

ตัวอย่าง 5.5 กำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยี R ตามปกติ

ให้ $E_i = (i-2, i+2) \;;\; i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

ให้ $F = \{ E_i \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \}$

และ $F_i = (i-2, i+2) \;;\; i = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$

ให้ $F' = \{ F_i \mid i = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \}$

จะเห็นว่าทั้ง F และ F′ เป็นเซตปกคลุมของ R

แต่ $F' \subseteq F$ ดังนั้นเรียก F′ ว่าเซตปกคลุมย่อยของ F สังเกตได้จาก

$E_i = (i-2, i+2) \;,\; i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ดังนั้น $E_0 = (-2, 2)$

$E_1 = (-1, 3)$

$E_2 = (0, 4)$

$E_3 = (1, 5)$

$E_4 = (2, 6)$

. . . .

และ $F_i = (i-2, i+2) \;,\; i = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$

$F_0 = (-2, 2)$

$F_2 = (0, 4)$

$F_4 = (2, 6)$

. . . . ■

ตัวอย่าง 5.6 จงแสดงว่าปริภูมิจำกัดใด ๆ เป็นปริภูมิปกคลุมแน่น

วิธีทำ ให้ $X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$

ให้ $F = \{ G_i \mid i \in I \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ X

ดังนั้น $X = \bigcup_{i \in I} G_i$

ดังนั้นสมาชิกของ X แต่ละตัวต้องอยู่ใน G_i บางตัว

สมมุติ $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2, \ldots, x_n \in G_n$

(G_1, G_2 อาจเป็นเซตเดียวกันได้)

แสดงว่า $\{ G_1, G_2, \ldots, G_n \}$ เป็นเซตปกคลุม X
ดังนั้น F มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด
X เป็นเซตปกคลุมแน่น ■

ทฤษฎีบท 5.1 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ X เป็นเซตปกคลุมแน่น ถ้า F เป็นเซตย่อยปิดของ X แล้วจะได้ F เป็นเซตปกคลุมแน่น

พิสูจน์ ให้ X เป็นเซตปกคลุมแน่น
ให้ F เป็นเซตย่อยปิดของ X
ให้ $F = \{ G_i \mid i \in I \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ F
แต่ $X - F$ เป็นเซตเปิด
เพราะฉะนั้น $F' = \{ G_i \mid i \in I \} \cup \{ X - F \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ X
แต่ X เป็นเซตปกคลุมแน่น
ดังนั้น F' มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด $\{ U_i \mid i = 1, 2, \ldots, n \}$
โดยที่ $U_i = G_i$ สำหรับ i บางตัวใน I หรือเท่ากับ $X - F$
ถ้า $X - F$ เป็นสมาชิกของ $\{ U_i \mid i = 1, 2, \ldots n \}$ แล้วตัด $X - F$ ออกจะได้เซตจำกัดที่ปกคลุม F
เพราะฉะนั้น F เป็นเซตปกคลุมแน่น ■

ตัวอย่าง 5.7 ในปริภูมิเชิงโทโพโลยีปกติ R
จงแสดงว่า $(0, 1)$ ไม่เป็นเซตปกคลุมแน่น

วิธีทำ ให้ $A = (0, 1)$
ให้ $F_i = \left(\frac{1}{i+2}, \frac{1}{i} \right)$
ให้ $F = \{ F_i \mid i \in N \}$ เป็นเซตปกคลุมของ A
สมมุติว่า F มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด คือ F'
ให้ $F' = \{ (a_i, b_i) \mid i = I, 2, \ldots. n \}$
ให้ $c = \min \{ a_i \mid i = 1, 2, \ldots. n \}$
ดังนั้น $c > 0$

และจะได้ว่า $\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \subseteq (c, 1)$
แต่ $(0, c] \cup (c, 1) = (0, 1)$
ดังนั้น F' ไม่เป็นเซตปกคลุมย่อยจำกัดของ F
ดังนั้น F ไม่ใช่เซตปกคลุมของ A
ดังนั้น A ไม่เป็นเซตปกคลุมแน่น ■

ทฤษฎีบท 5.2 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X แล้ว A เป็นเซตปกคลุมแน่น ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตปกคลุมแน่นเมื่อเทียบกับโทโพโลยีสัมพันธ์บน A

พิสูจน์ (1) สมมุติ A เป็นเซตปกคลุมแน่น (เทียบกับ τ)

ให้ $\{ G_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดเมื่อเทียบกับ τ_A

ดังนั้น $A \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$

แต่ G_i เป็นเซตเปิดสัมพัทธ์

ดังนั้น $G_i = U_i \cap A \subseteq U_i$

ดังนั้น $A \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$

ดังนั้น $\{ U_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ A

แต่ A เป็นเซตปกคลุมแน่น

ดังนั้นจะมีเซตปกคลุมย่อยจำกัด $\{ U_i \mid i = 1, 2, \ldots, n \}$ ซึ่ง

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} A &\subseteq A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \\ &= (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \cup \ldots \cup (A \cap U_n) \\ &= G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{ G_i \mid i \in J \}$ มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด

ดังนั้น (A, τ_A) เป็นปริภูมิปกคลุมแน่น

(2) สมมุติ A เป็นเซตปกคลุมแน่น (เมื่อเทียบกับ τ_A)

ให้ $\{ U_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดเมื่อเทียบกับ τ

ดังนั้น $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ โดยที่ U_i เป็นเซตเปิดใน τ

$$\begin{aligned} A &\subseteq A \cap \left(\bigcup_{i\in J} U_i \right) \\ &= \bigcup_{i\in J} (A \cap U_i) \end{aligned}$$

ให้ $G_i = A \cap U_i$ ดังนั้น G_i เป็นเซตเปิดใน τ_A

จะได้ $A \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$

ดังนั้น $\{ G_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ A

ดังนั้น $\{ G_i \mid i \in J \}$ จะมีเซตปกคลุมย่อยจำกัด $\{ G_i \mid i = 1, 2, \ldots, n \}$

$$
\begin{aligned}
A &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap U_i) \\
&= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \\
&\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i
\end{aligned}
$$

แสดงว่า $\{ U_i \mid i \in J \}$ มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด

ดังนั้น A เป็นเซตปกคลุมแน่นเมื่อเทียบกับ τ ■

ทฤษฎีบท 5.3 กำหนด (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี X เป็นเซตปกคลุมแน่น ก็ต่อเมื่อทุก ๆ ชั้น $\{ F_i \mid i \in J \}$ ของเซตปิด ซึ่ง $\bigcap_{i \in J} F_i = \varnothing$ จะมีเซตย่อยจำกัด $\{ i_1, i_2, \ldots, i_n \}$ ของ J ซึ่ง

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k} = 0$$

พิสูจน์ (1) สมมุติ X เป็นเซตปกคลุมแน่น

ให้ $\{ F_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตของเซตปิด ซึ่ง $\bigcap_{i \in J} F_i = \varnothing$

พิจารณา $X - \bigcap_{i \in J} F_i = \bigcup_{i \in J} (X - F_i)$

แต่ $\bigcap_{i \in J} F_i = \varnothing$ ดังนั้น $X - \bigcap_{i \in J} F_i = X$

ดังนั้น $\bigcup_{i \in J} (X - F_i) = X$

ดังนั้น $\{ X - F_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ X

เพราะว่า X เป็นเซตปกคลุมแน่น

ดังนั้น $\{ X - F_i \mid i \in J \}$ มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด

ให้ $\{ X - F_{i_1}, X - F_{i_2} \ldots X - F_{i_n} \}$ เป็นเซตปกคลุมย่อยจำกัด

ดังนั้นมีเซตจำกัด $\{ i_1, i_2, \ldots, i_n \}$ ซึ่ง

$$\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = X - \left(\bigcup_{k=1}^{n} (X - F_{i_k}) \right)$$

$$= X - X$$

$$= \varnothing$$

(2) สมมุติทุก ๆ $\{ F_i \mid i \in J \}$ ของเซตปิด F_i ซึ่ง $\bigcap_{i \in J} F_i = \varnothing$

แล้วมีเซตจำกัด $\{ i_1, i_2, \ldots, i_n \}$ ซึ่ง $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \varnothing$

ให้ $\{ G_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ X

จะได้ $\{ X - G_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตของเซตปิด และ

$$\bigcap_{i \in J} (X - G_i) = X - \bigcup_{i \in J} G_i$$

$$= X - X$$

$$= \varnothing$$

โดยสมมุติฐานจะได้ว่ามีเซตจำกัด $\{ i_1, i_2, .., i_n \}$ ซึ่ง

$$\bigcap_{k=1}^{n} (X - G_{i_k}) = \varnothing$$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k} = X - \left(\bigcap_{k=1}^{n} (X - G_{i_k}) \right)$

$$= X - \varnothing$$

$$= X$$

ดังนั้นจะได้ว่ามีเซตปกคลุมย่อยจำกัด

X เป็นเซตปกคลุมแน่น ■

ทฤษฎีบท 5.4 (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี (Y, τ') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $f: X \to Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า A เป็นเซตย่อยของ X ซึ่งเป็นเซตปกคลุมแน่น แล้ว f(A) เป็นเซตปกคลุมแน่นของ Y

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตปกคลุมแน่น

ให้ $\{ G_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ f(A)

ดังนั้น $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$

$$A \subseteq \bigcup_{i \in J} f^{-1}(G_i)$$

แต่ G_i เป็นเซตเปิด และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น $f^{-1}(G_i)$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้น $\{ f^{-1}(G_i) \mid i \in J \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ A

เพราะว่า A เป็นเซตปกคลุมแน่น

ดังนั้น $\{ f^{-1}(G_i) \mid i \in J \}$ มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด คือ

$$\{ f^{-1}(G_{i_1}), f^{-1}(G_{i_2}), \ldots, f^{-1}(G_{i_n}) \}$$

โดยที่
$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(G_{i_k})$$

$$f(A) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$$

ดังนั้น $\{ G_i \mid i \in J \}$ มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด

ดังนั้น $f(A)$ เป็นเซตปกคลุมแน่น ■

จากทฤษฎีบท 5.4 จะเห็นว่าถ้า (X, τ) และ (Y, τ') คล้ายแบบ (homeo-morphic) กันแล้วจะได้ว่ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงซึ่งทั้ง f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ข้อสรุปว่า X เป็นเซตปกคลุมแน่นก็ต่อเมื่อ Y เป็นเซตปกคลุมแน่น

ทฤษฎีบทต่อไปจะได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างเซตปกคลุมแน่นกับปริภูมิ T_2 หรือปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์

ทฤษฎีบท 5.5 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ (X, τ) เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ ถ้า F เป็นเซตย่อยของ X และ F เป็นเซตปกคลุมแน่น แล้ว F เป็นเซตปิด

พิสูจน์ ต้องการพิสูจน์ว่า F เป็นเซตปิด

นั่นคือพิสูจน์ว่า $X - F$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in X - F$

ให้ y เป็นจุดใด ๆ ใน F

ดังนั้น x, y เป็นจุด 2 จุดที่ต่างกัน

เพราะว่า X เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์

ดังนั้นจะมีเซตเปิด U_x และ V_y ซึ่ง

$$U_x \cap V_y = \varnothing$$

ดังนั้น $\{ V_y \mid y \in F \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ F

$$F \subseteq \bigcup_{y \in F} V_y$$

แต่ F เป็นเซตปกคลุมแน่น

ดังนั้น $\{ V_y \mid y \in F \}$ มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด $\{ V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n} \}$

ซึ่ง
$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$$

ให้ $G = \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$ จะได้ว่า G เป็นเซตเปิดของ x

ต้องการแสดงว่า $x \in G \subseteq X - F$

พิจารณา
$$\begin{aligned} G \cap F &= \left(\bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}\right) \cap F \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} (U_{x_k} \cap F) \\ &\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (U_{x_k} \cap V_{y_k}) \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

ดังนั้น $G \cap F = \varnothing$

จะได้ว่า $G \subseteq X - F$

ดังนั้น $X - F$ เป็นเซตเปิด

จะได้ว่า F เป็นเซตปิด ■

5.2 เซตปกคลุมแน่นบน R

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของเซตปกคลุมแน่นใน R กับคุณสมบัติปิดและคุณสมบัติมีขอบเขต จากความรู้เรื่องจำนวนจริง เราทราบแล้วว่าสำหรับ A ซึ่งเป็นเซตย่อยของ R A มีขอบเขตก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริงบวก k $(k > 0)$ ซึ่งทุก ๆ $x \in A$, $|x| \leqslant k$

ทฤษฎีบท 5.6 กำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยี R ตามปกติ ถ้า A เป็นเซตย่อยของ R และ A เป็นเซตปกคลุมแน่น แล้ว A เป็นเซตปิดและมีขอบเขต

พิสูจน์ เพราะว่า R เป็นเฮาส์ดอร์ฟฟ์ และ A เป็นเซตย่อยซึ่งเป็นเซตปกคลุมแน่นของ R ดังนั้น A เป็นเซตปิด

ให้ $G_i = (-i, i)$, $i \in I^+$

แล้ว $\{ G_i \mid i \in I^+ \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ R

และ $\{ G_i \mid i \in I^+ \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ A ด้วย

แต่ A เป็นเซตปกคลุมแน่น

ดังนั้นจะมีเซตปกคลุมย่อยจำกัด $\{ G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_n} \}$

ให้ $k = \max \{ i_1, i_2, \ldots, i_n \}$

จะได้ว่า $G_{i_1} \subseteq G_k, G_{i_2} \subseteq G_k, \ldots, G_{i_n} \subseteq G_k$

ดังนั้น $A \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_n}$

$= G_k$

จะได้ $A \subseteq G_k$

แต่ $G_k = (-k, k)$

ดังนั้นทุก ๆ $x \in A$ จะได้ $x \in (-k, k) \subseteq [-k, k]$

จะได้ว่า ทุก ๆ $x \in A$, $|x| \leqslant k$

ดังนั้น A มีขอบเขต ■

ทฤษฎีบท 5.7 (The Heine-Borel Theorem)

ทุก ๆ ปริภูมิย่อยของ R ซึ่งเป็นเซตปิดและมีขอบเขตเป็นเซตปกคลุมแน่น

พิสูจน์ ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.7 เราพิสูจน์เพียงว่า [a, b] เป็นเซตปกคลุมแน่นก็พอ แต่อย่างไรก็ตามเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า [0, 1] และ [a, b] คล้ายแบบ (homeomorphic) กัน ดังนั้น ถ้าสามารถพิสูจน์ได้ว่า [0, 1] เป็นเซตปกคลุมแน่นแล้ว อาศัยทฤษฎีบท 5.4 จะได้ว่า [a, b] เป็นเซตปกคลุมแน่นด้วย

ต้องการพิสูจน์ว่า [0, 1] เป็นเซตปกคลุมแน่น

ให้ $\{ G_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ [0, 1]

ให้ $S = \{ x \mid x \in [0, 1], [0, x)$ ถูกปกคลุมด้วย G_i จำนวนจำกัด $\}$

เพราะฉะนั้น $S \neq \varnothing$

เพราะว่า 1 เป็นขอบเขตบนของ S

ดังนั้น S มีขอบเขตบนต่ำสุด

ให้ c เป็นขอบเขตบนต่ำสุดของ S

ถ้า $c = 1$ จะได้ว่า [0, 1) ถูกปกคลุมด้วย G_i จำนวนจำกัด

ดังนั้นเราผนวก G_{i_0} ที่ $1 \in G_{i_0}$ เข้าไป จะได้เซตเปิดจำนวนจำกัดที่ปกคลุม [0, 1]

ดังนั้น [0, 1] เป็นเซตปกคลุมแน่น

ถ้า $0 \leqslant c < 1$ เราแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี คือ :-

(1) **กรณีที่ 1** : $c \in S$

ดังนั้น [0, c) ถูกปกคลุมด้วย G_i จำนวนจำกัด

ให้ $\{ G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_n} \}$ เป็นเซตของเซตเปิดที่ปกคลุม [0, c)

แต่มี G_{i_0} ซึ่ง $c \in G_{i_0}$

ดังนั้น $\{ G_{i_0}, G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_n} \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ [0, c)

ดังนั้น c ไม่เป็นขอบเขตบนของ X

เกิดข้อขัดแย้ง

(2) **กรณีที่ 2** : $c \in S$

ดังนั้นมี G_{i_0} ซึ่ง $c \in G_{i_0}$ และ G_i จำนวนจำกัดไม่ปกคลุม $[0, c) - G_{i_0}$

ดังนั้น c เป็นขอบเขตบนต่ำสุดของ S ไม่ได้

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นกรณี $0 \leqslant c < 1$ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $c = 1$

จะได้ว่า $[0, 1]$ เป็นเซตปกคลุมแน่น

เพราะว่า $[0, 1]$ คล้ายแบบกับ $[a, b]$

ดังนั้น $[a, b]$ เป็นเซตปกคลุมแน่น ■

5.3 คุณสมบัติผลร่วมจำกัด

Finite intersection property

ในตอนนี้จะได้กล่าวถึงคุณสมบัติอันหนึ่งของโทโพโลยีที่ใช้ในการทดสอบการเป็นเซตปกคลุมแน่นของเซตโดยไม่ต้องใช้นิยาม ซึ่งนิยามของคุณสมบัติผลร่วมจำกัดกล่าวไว้ดังนี้

นิยาม 5.5 กำหนดให้ X เป็นเซตใด ๆ, $X \neq \varnothing$ F เป็นชั้นของเซตย่อยของ X เรียก F ว่ามีคุณสมบัติผลร่วมจำกัด ก็ต่อเมื่อทุก ๆ ชั้นย่อยจำกัดของ F มีผลร่วมไม่เท่ากับ ∅

นั่นคือ ถ้า $F = \{ F_i \mid i \in J \}$

F มีคุณสมบัติผลร่วมจำกัดแล้วจะได้ว่า

$$\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \neq 0$$

ทฤษฎีบท 5.8 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $F = \{ F_i \mid i \in J \}$ เป็นชั้นของเซตย่อยปิดของ X ถ้า F มีคุณสมบัติผลร่วมจำกัดแล้ว X เป็นเซตปกคลุมแน่น ก็ต่อเมื่อ $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \varnothing$

พิสูจน์ ให้ F มีคุณสมบัติผลร่วมจำกัด

ต้องการแสดงว่า X เป็นเซตปกคลุมแน่น ก็ต่อเมื่อ $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \varnothing$

(1) สมมุติ X เป็นเซตปกคลุมแน่น

ต้องการแสดงว่า $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \varnothing$

สมมุติ $\bigcap_{i \in J} F_i = \varnothing$

ดังนั้น $$X = X - \bigcap_{i \in J} F_i$$

$$= \bigcup_{i \in J} (X - F_i)$$

แต่ $X - F_i$ เป็นเซตเปิดสำหรับทุก ๆ $i \in J$

ดังนั้น $\{ X - F_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดของ X

เพราะว่า X เป็นเซตปกคลุมแน่น

ดังนั้น $\{ X - F_i \mid i \in J \}$ มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด

ให้ $$x = \bigcup_{k=1}^{n} (X - F_{i_k})$$

ดังนั้น $$x = x - \bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}$$

จะได้ว่า $$\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \varnothing$$

ดังนั้น F ไม่มีคุณสมบัติผลร่วมจำกัด

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \varnothing$

(2) ในทางกลับกันต้องการแสดงว่า X เป็นเซตปกคลุมแน่น ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

■

ในบทที่ 3 ได้กล่าวถึงปริภูมิผลคูณ (product space) โดยที่นิยาม $\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ และได้มีทฤษฎีบทเกี่ยวกับปริภูมิผลคูณกล่าวว่า สำหรับปริภูมิ $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_1), \ldots, (X_n, \tau_n)$ ซึ่งเป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $\tau = \{ G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n \mid G_i \in \tau_i \}$ และจะได้ว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, \tau \right)$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

เช่นเดียวกันโดยอาศัยปริภูมิผลคูณและคุณสมบัติของเซตปกคลุมแน่นจะได้ทฤษฎีบทที่สำคัญต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.9 (Tychonoff's Theorem)

ผลคูณของชั้นของปริภูมิปกคลุมแน่นใด ๆ ที่ไม่เป็นเซตว่างเป็นเซตปกคลุมแน่น หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า

กำหนดให้ $\{ X_i \mid i = 1, 2, \ldots, n \}$ เป็นชั้นของปริภูมิปกคลุมแน่นโดยที่ $X_i \neq \varnothing$ สำหรับทุก ๆ i แล้วจะได้ว่า

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i \text{ เป็นเซตปกคลุมแน่น}$$

จากการประยุกต์ทฤกษฎีบทของตูโคโนฟ เราสามารถขยายการพิสูจน์ทฤษฎีบทไฮเน–โบเรล ไปเป็นกรณีทั่ว ๆ ไป คือ ใน R^n ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.10 (The Generalized Heine-Borel Theorem)

ทุก ๆ ปริภูมิย่อยของ R^n ซึ่งมีคุณสมบัติปิดและมีขอบเขตเป็นเซตปกคลุมแน่น

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.9 และทฤษฎีบท 5.10 ผู้ที่สนใจดูการพิสูจน์ได้จากตำราอ้างอิง (8) หน้า 119–120

แบบฝึกหัด 5.1

1. กำหนดโทโพโลยีตามปกติบน R ให้ $A = (0, 1)$
   จงพิสูจน์ว่า A ไม่เป็นเซตปกคลุมแน่น โดยกำหนดเซตปกคลุมเปิดของ A คือ
   $\{ (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}) \mid n \in I^+ \}$
2. กำหนดให้ $F = \{ B(x, r) \mid x = (m, n) \in I \times I$ และ $r = \frac{1}{2} \}$ จงพิจารณาว่า F เป็นเป็นเซตปกคลุมของ R^2 หรือไม่เพราะเหตุใด
3. กำหนดให้ปริภูมิเชิงโทโพโลยี R ตามปกติ เซตใดต่อไปนี้เป็นเซตปกคลุมแน่น
   (1) $\{ 1, 2, 3 \}$
   (2) $(0, 1]$
   (3) $[-2, 2]$
   (4) I^+
4. จงแสดงว่าปริภูมิในตัวอย่าง 3.6 เป็นปริภูมิปกคลุมแน่น
5. ถ้า E เป็นเซตปกคลุมแน่น F เป็นเซตปิดแล้วจงพิสูจน์ว่า $E \cap F$ เป็นเซตปกคลุมแน่น
6. กำหนดให้ E, F เป็นเซตย่อยของ X, E, F เป็นเซตปกคลุมแน่น แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
   (1) $E \cap F$ เป็นเซตปกคลุมแน่น
   (2) $E \cup F$ เป็นเซตปกคลุมแน่น
7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.8 (2)
8. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.9 ทฤษฎีบท 5.10