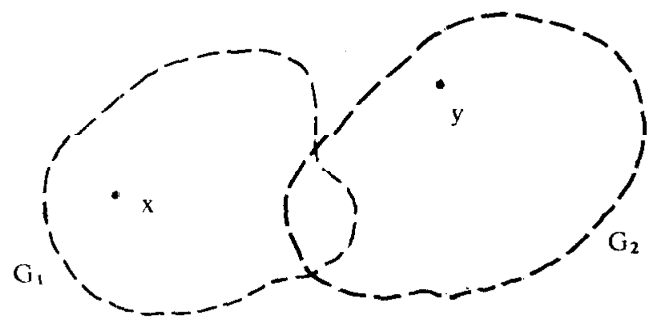
บทที่ 4
สัจพจน์แห่งการแบ่งแยก
Separation Axion

ปริภูมิเชิงโทโพโลยีมีความเกี่ยวข้องอย่างมากกับเซตเปิด โดยที่เราทราบมาแล้วว่าบางปริภูมิมีเซตเปิดเพียง 2 เซต คือ $\varnothing$ และตัวมันเอง X บางปริภูมิมีเซตเปิดคือเซตย่อยของ X ทุก ๆ เซต อย่างไรก็ตาม ปริภูมิที่ไม่ได้มีเซตเปิดเพียง 2 เซต หรือเป็นเซตย่อยทั้งหมด เราสามารถแบ่งลักษณะของปริภูมิออกได้โดยอาศัยคุณสมบัติการแบ่งแยก (separation properties) ซึ่งจะได้ศึกษาต่อไปดังนี้

4.1 ปริภูมิ-T_1 และปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์

T_1-Space and Housdorff space

นิยาม 4.1 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี แล้ว (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_1$ ก็ต่อเมื่อถ้า x, y เป็นจุด 2 จุดใด ๆ ใน X, $x \neq y$ แล้วจะมีเซตเปิด G_1 ซึ่ง $x \in G_1$ แต่ $y \notin G_1$ และมีเซตเปิด G_2 ซึ่ง $y \in G_2$ แต่ $x \notin G_2$



รูป 4.1

จากนิยามจะสังเกตได้ว่าเซตเปิด G_1, G_2 ของ x และ y อาจไม่มีสมาชิกร่วมกันเลยก็ได้ คือ $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ ก็ได้

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ $X = \{a, b, c\}$

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$$

จะเห็นว่า (X, τ_1) ไม่เป็นปริภูมิ $-T_1$ เพราะว่าไม่มีเซตเปิด G_1 ซึ่ง $x \in G_1$ แต่ $y \notin G_1$

เพราะ $a \neq b$

มี G_1 คือ $\{a\}$ ซึ่ง $a \in \{a\}$ แต่ $b \notin \{a\}$

แต่ไม่มี G_2 ซึ่ง $b \in G_2$ และ $a \notin G_2$

เพราะว่าเซตเปิดที่บรรจุ b คือ $\{ a, b \}$, X ซึ่งมี a บรรจุอยู่ด้วย ■

ตัวอย่าง 4.2 กำหนดให้ $X = \{ a, b, c \}$

$$\tau_2 = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \} \}$$

จะเห็นว่า (X, τ_2) เป็นปริภูมิ $-T_1$ เพราะว่า

$a \neq b$ มี $a \in \{a\}, b \notin \{a\}$ และ $b \in \{b\}, a \notin \{b\}$

$a \neq c$ มี $b \in \{b\}, c \notin \{b\}$ และ $c \in \{c\}, b \notin \{c\}$

$a \neq c$ มี $a \in \{a\}, c \notin \{a\}$ และ $c \in \{c\}, a \notin \{c\}$ ■

คุณสมบัติสำคัญอย่างหนึ่งของปริภูมิ $-T_1$ คือเซตย่อยที่เป็นเซตโดด เป็นเซตปิด

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี แล้ว (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_1$ ก็ต่อเมื่อ $\{x\}$ เป็นเซตปิดสำหรับทุก ๆ $x \in X$

พิสูจน์ (1) สมมุติ (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_1$

ให้ $x \in X$

ต้องการแสดงว่า $\{x\}$ เป็นเซตปิด

นั่นคือต้องแสดงว่า $X-\{x\}$ เป็นเซตเปิด

ให้ $y \in X-\{x\}$

ดังนั้น $y \neq x$

เพราะว่า X เป็นปริภูมิ $-T_1$

ดังนั้นจะมีเซตเปิด G_1 ซึ่ง $y \in G_1$ แต่ $x \notin G_1$

นั่นคือ $y \in G_1 \subseteq X-\{x\}$

ดังนั้น $X-\{x\}$ เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น $\{x\}$ เป็นเซตปิด

(2) สมมุติ $\{x\}$ เป็นเซตปิด

ต้องการแสดงว่า X เป็น T_1

ให้ x, y เป็นจุดใด ๆ ใน X ซึ่ง $x \neq y$

ดังนั้น $y \notin \{x\}$

จะได้ว่า $y \in X - \{x\}$

เพราะว่า $\{x\}$ เป็นเซตปิดดังนั้น $X - \{x\}$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะได้ว่ามีเซตเปิด $X - \{x\}$ ซึ่ง $y \in X - \{x\}$ และ $x \notin X - \{x\}$

ในทำนองเดียวกันจะแสดงได้ว่า มีเซตเปิด $X - \{y\}$ ซึ่ง $x \in X - \{y\}$

และ $y \notin X - \{y\}$

ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_1$ ■

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อยของ X และ X เป็นปริภูมิ T_1 แล้ว Y เป็นปริภูมิ $-T_1$

พิสูจน์ สมมุติ X เป็นปริภูมิ $-T_1$

ต้องการแสดงว่า Y เป็นปริภูมิ $-T_1$

ให้ x, y เป็นจุดสองจุดใด ๆ ใน $Y, x \neq y$

แต่ Y เป็นเซตย่อยของ X

ดังนั้น $x, y \in X, \ x \neq y$

เพราะ X เป็นปริภูมิ $-T_1$

ดังนั้นจะมีเซตเปิด G_1 ซึ่ง $x \in G_1$ แต่ $y \notin G_1$ และเซตเปิด G_2 ซึ่ง $y \in G_2$

แต่ $x \notin G_2$

ให้ $U_1 = G_1 \cap Y$

$U_2 = G_2 \cap Y$

ดังนั้น U_1, U_2 เป็นเซตเปิดใน Y ซึ่ง $x \in U_1$ แต่ $y \notin U_1$ และ $y \in U_2$

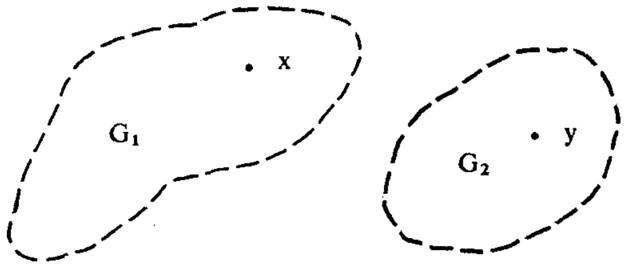
แต่ $x \notin U_2$

ดังนั้น Y เป็นปริภูมิ $-T_1$ ■

คุณสมบัติที่จะกล่าวต่อไปนี้สำหรับปริภูมิเชิงโทโพโลยีเป็นคุณสมบัติที่เพิ่มเงื่อนไขให้มากขึ้นจากเดิม ซึ่งเราเรียกคุณสมบัติอันนั้นว่า คุณสมบัติการเป็นเฮาส์ดอร์ฟฟ์ และเรียกปริภูมิที่สอดคล้องคุณสมบัตินั้นว่า ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ (Housdorff space)

นิยาม 4.2 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี แล้วเรียก (X, τ) ว่า ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ ก็ต่อเมื่อ ถ้า x, y เป็นจุด 2 จุดใน $X, \ x \neq y$ แล้วจะมีเซตเปิด G_1, G_2 ซึ่ง $x \in G_1$ และ $y \in G_2$ และ $G_1 \cap G_2 = \varnothing$

บางครั้งเรียกชื่อว่าปริภูมิ $-T_2$



รูป 4.2

ตัวอย่าง 4.3 ในปริภูมิเมตริก (X, d) ทุก ๆ ปริภูมิเมตริกเป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์

พิสูจน์ ให้ $x, y \in X$, $x \neq y$

ดังนั้น $d(x, y) > 0$

ให้ $r = d(x, y)$

พิจารณา $S(x; \frac{r}{3})$ และ $S(y; \frac{r}{3})$ จะได้ว่า

$S(x; \frac{r}{3})$ เป็นเซตเปิด ซึ่ง $x \in S(x, \frac{r}{3})$ และ $S(y, \frac{r}{3})$ เป็นเซตเปิด

ซึ่ง $y \in S(y; \frac{r}{3})$ โดยที่ $S(x; \frac{r}{3}) \cap S(y; \frac{r}{3}) = \varnothing$

ดังนั้น X เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ ■

ทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อยของ X และ ถ้า X เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ แล้ว Y เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์

พิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์

ให้ Y เป็นปริภูมิย่อยของ X

ให้ $x, y \in Y$ โดยที่ $x \neq y$

จะได้ $x, y \in X$, $x \neq y$

จากนิยามของเฮาส์ดอร์ฟฟ์จะได้ว่ามีเซตเปิด G_1, G_2 ซึ่ง $x \in G_1$, $y \in G_2$ และ

$G_1 \cap G_2 = \varnothing$

ให้ $U_1 = G_1 \cap Y$

$U_2 = G_2 \cap Y$

ดังนั้น U_1, U_2 เป็นเซตเปิดใน Y และ $x \in U_1$, $y \in U_2$ และ

$$U_1 \cap U_2 = (G_1 \cap Y) \cap (G_2 \cap Y)$$
$$= (G_1 \cap G_2) \cap Y$$

$= \varnothing \cap Y$

$= \varnothing$

ดังนั้น Y เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ ■

ทฤษฎีบท 4.4 ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ทุกปริภูมิเป็นปริภูมิ $-T_1$

พิสูจน์ (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด ใช้นิยาม 4.2, 4.1) ■

ทฤษฎีบท 4.5 ปริภูมิผลคูณของปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ นั่นคือ ถ้า (X_i, τ_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ แล้ว $(\prod X_i, \tau)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ เมื่อ τ เป็นโทโพโลยีผลคูณ (product topology)

พิสูจน์ ให้ $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ เป็นผลคูณของปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

เป็นจุด 2 จุดของ X ที่แตกต่างกัน

เพราะว่า $x \neq y$ ดังนั้นจะมี i_o ซึ่ง $x_{i_o} \neq y_{i_o}$

เพราะว่า x_{i_o} เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์

ดังนั้นจะมีเซตเปิด 2 เซตซึ่งแบ่งแยก x_{i_o}, y_{i_o} คือ G_{i_o}, G'_{i_o}

เซตเปิดทั้งสองที่เป็นเซตย่อยของ X_{i_o} จะทำให้ได้ฐานย่อยเปิด

$X_1 \times X_2 \times \ldots \times G_{i_o} \times \ldots \times X_n$

และ $X_1 \times X_2 \times \ldots \times G'_{i_o} \times \ldots \times X_n$

ซึ่งบรรจุจุดที่ต่างกันคือ x, y ตามลำดับ

ดังนั้น X เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ ■

แบบฝึกหัด 4.1

1. กำหนดให้ $X = \{ a, b, c \}$

   $\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ a, b \}, \{ a, c \} \}$

   จงพิจารณาว่า X เป็น T_1 หรือเป็นเฮาส์ดอร์ฟฟ์หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. กำหนดให้ $X = \{ a, b, c \}$

   จงหาโทโพโลยีทั้งหลายบน X ที่ทำให้

   (1) X เป็นปริภูมิ $-T_1$

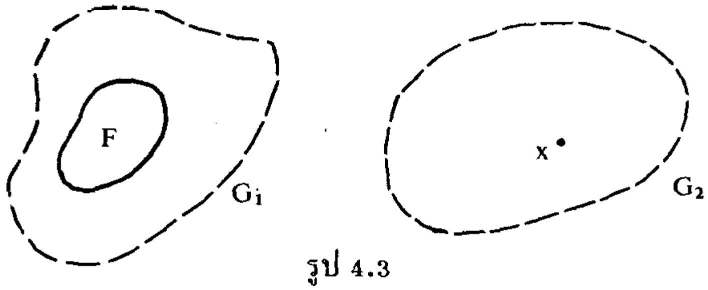
   (2) X เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์

3. ถ้า X เป็นเซตจำกัด และเป็นปริภูมิ $-T_1$ จงพิสูจน์ว่า X เป็นปริภูมิเต็มหน่วย

4.2 ปริภูมิเรกกิวลาร์ และปริภูมิปกติ

Regular spaces and normal space

นิยาม 4.3 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี เรียก (X, τ) ว่า เป็นปริภูมิ $-T_3$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า F เป็นเซตย่อยปิดของ X และ $x \in X$ โดยที่ $x \notin F$ แล้วจะมีเซตเปิด G_1, G_2 ซึ่ง $F \subseteq G_1$ และ $x \in G_2$ และ $G_1 \cap G_2 = 0$



รูป 4.3

ตัวอย่าง 4.4 กำหนดให้ $X = \{a, b, c\}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a, b\}, \{c\} \}$

(X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_3$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ เซตปิดที่จะใช้ในการพิจารณาในที่นี้คือ $\{a, b\}, \{c\}$

$F = \{a, b\} \quad x = c$

$F = \{c\} \quad x = b$ หรือ a

ส่วนเซตเปิดคือตัวมันเอง

ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_3$ ■

จากตัวอย่าง 4.4 จะเห็นว่า (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิ $-T_1$ ดังนั้นปริภูมิ $-T_3$ นั้นเมื่อเพิ่มเงื่อนไขของ T_1 เข้าไปจะได้ปริภูมิใหม่ซึ่งเรียกว่าปริภูมิเรกกิวลาร์ ดังนิยามข้างล่างนี้

นิยาม 4.4 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี เรียก (X, τ) ว่าปริภูมิเรกกิวลาร์ก็ต่อเมื่อ (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_3$ และปริภูมิ $-T_1$

ตัวอย่าง 4.5 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

จะได้ว่า X เป็นปริภูมิ $-T_3$ (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด)

จากตัวอย่าง 4.3 ได้ว่า X เป็นปริภูมิ $-T_2$

จากทฤษฎีบท 4.4 จะได้ว่า X เป็นปริภูมิ $-T_1$

ดังนั้น X เป็นปริภูมิเรกกิวลาร์ ■

ทฤษฎีบท 4.6 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี แล้ว (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_3$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $x \in X$ ถ้า G เป็นเซตเปิดของ x แล้วจะมีเซตเปิด U ของ x ซึ่ง

$x \in \bar{U} \subseteq G$

พิสูจน์ (1) สมมุติ X เป็นปริภูมิ $-T_3$

ให้ $x \in X$

ให้ G เป็นเซตเปิดซึ่ง $x \in G$

ดังนั้น $X-G$ เป็นเซตปิด และ $x \notin X-G$

ดังนั้นจะมีเซตเปิด U, V ซึ่ง $x \in U$ และ $x-G \subseteq V$

และ $U \cap V = \varnothing$

จะได้ว่า $U \subseteq X-V$ และ $X-V \subseteq G$

แต่ $X-V$ เป็นเซตปิด

จากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า

$$\bar{U} \subseteq X-V$$

นั่นคือ $x \in \bar{U} \subseteq G$

(2) สมมุติสำหรับทุก ๆ $x \in X$ และ G เป็นเซตเปิดของ x แล้ว จะมีเซตเปิด U ของ x ซึ่ง $x \in \bar{U} \subseteq G$

ต้องการพิสูจน์ว่า X เป็นปริภูมิ $-T_3$

ให้ $x \in X$, F เป็นเซตย่อยปิดของ X และ $x \notin F$

ดังนั้น $X-F$ เป็นเซตเปิดและ $x \in X-F$

จะมีเซตเปิด U ซึ่ง $x \in \bar{U} \subseteq X-F$

จะได้ว่า $F \subseteq X-\bar{U}$, $X-\bar{U}$ เป็นเซตเปิด

และ $x \in U$

ดังนั้นมีเซตเปิด U, $X-\bar{U}$ ซึ่ง $x \in U$ และ $F \subseteq X-\bar{U}$

โดยที่ $U \cap (X-\bar{U}) = \varnothing$

ดังนั้น X เป็นปริภูมิ $-T_3$ ■

ทฤษฎีบท 4.7 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี แล้วถ้า X เป็นปริภูมิเรกกิวลาร์ แล้ว X เป็นปริภูมิ $-T_2$

พิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมิเรกกิวลาร์

ดังนั้น X เป็นปริภูมิ $-T_3$ และเป็น T_1

ต้องการแสดงว่า X เป็น T_2

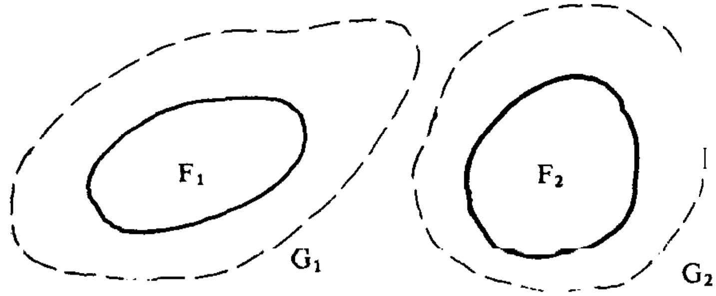
ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$

เพราะว่า X เป็น T_1 ดังนั้น $\{x\}$ เป็นเซตปิด

และ $y \notin \{x\}$ ใช้ความเป็นปริภูมิ $-T_3$ จะได้ว่า

มีเซตเปิด G_1, G_2 ซึ่ง $\{x\} \subseteq G_1$ และ $y \in G_2$ โดยที่ $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
นั่นคือ มีเซตเปิด G_1, G_2 ของ x, y โดยที่ $x \in G_1, y \in G_2$ และ $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
ดังนั้น X เป็นปริภูมิ $-T_2$ ■

นิยาม 4.4 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี เรียก (X, τ) ว่าปริภูมิ T_4 (T_4-) space) ก็ต่อเมื่อ ถ้า F_1, F_2 เป็นเซตย่อยปิดของ X โดยที่ $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ แล้วจะมีเซตเปิด G_1, G_2 ซึ่ง $F_1 \subseteq G_1, F_2 \subseteq G_2$ และ $G_1 \cap G_2 = \varnothing$



รูป 4.4

ตัวอย่าง 4.6 กำหนดให้ $X = \{ a, b, c \}$

$$\tau = \{ \varnothing, X, \{b\}, \{c\}, \{ b, c \}, \{ a, c \} \}$$

จงพิจารณาว่า (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_4$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ พิจารณาเซตปิดใน X ที่ไม่ใช่ $\varnothing$, X ได้แก่
$\{ a, c \}, \{ a, b \}, \{a\}, \{b\}$
ดังนั้น F_1, F_2 ซึ่ง $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ คือ $\{a\}, \{b\}$
ให้ $G_1 = \{ a, c \}$ จะได้ $\{a\} \subseteq G_1$
$G_2 = \{b\}$ จะได้ $\{b\} \subseteq G_2$
และ $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_1$ ■

พิจารณาตัวอย่าง 4.6 จะเห็นว่า (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_4$ แต่จากปริภูมิอันนี้ $\{c\}$ เป็นเซตโดด แต่ไม่เป็นเซตปิด ดังนั้น (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิ T_1 ดังนั้นถ้าปริภูมิที่เป็นปริภูมิ $-T_4$ โดยเพิ่มเงื่อนไขว่าเป็น T_1 ด้วยจะกลายเป็นปริภูมิใหม่ซึ่งเรียกปริภูมินี้ว่า ปริภูมิปกติ (normal space) ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 4.5 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) เรียกว่าปริภูมิปกติก็ต่อเมื่อ (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_4$ และปริภูมิ $-T_1$

ทฤษฎีบท 4.8 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี แล้ว (X, τ) เป็นปริภูมิ $-T_4$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า F เป็นเซตปิด และ $F \subseteq G$ โดยที่ G เป็นเซตเปิดแล้ว จะมีเซตเปิด U ซึ่ง $F \subseteq U \subseteq U \subseteq G$

พิสูจน์ (1) สมมุติ X เป็นปริภูมิ $-T_4$

ให้ $F \subseteq G$ โดยที่ F เป็นเซตปิด และ G เป็นเซตเปิด

ดังนั้น $X - G$ เป็นเซตปิด

และ $F \cap (X - G) = \varnothing$

จากนิยามของปริภูมิ $-T_4$ จะได้ว่า

มีเซตเปิด U, V ซึ่ง $F \subseteq U$ และ $X - G \subseteq V$ โดยที่ $U \cap V = \varnothing$

ดังนั้น $U \subseteq X - V$

และ $X - V \subseteq G$

แต่ $X - V$ เป็นเซตปิด

จากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ $\overline{U} \subseteq X - V$

ดังนั้น $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X - V \subseteq G$

(2) สมมุติ ถ้า F เป็นเซตปิด G เป็นเซตเปิดซึ่ง $F \subseteq G$ แล้วจะมีเซตเปิด U ซึ่ง

$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq G$

ต้องการพิสูจน์ว่า X เป็นปริภูมิ $-T_4$

ให้ F_1, F_2 เป็นเซตปิดใน X ซึ่ง $F_1 \cap F_2 = \varnothing$

แต่ $X - F_2$ เป็นเซตเปิด และ $F_1 \subseteq X - F_2$

โดยสมมุติฐานจะได้ว่า มีเซตเปิด U ซึ่ง

$F_1 \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X - F_2$

เพราะว่า $\overline{U} \subseteq X - F_2$

ดังนั้น $F_2 \subseteq X - \overline{U}$ ซึ่งเป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะได้ว่า มีเซตเปิด U และ $X - \overline{U}$ ซึ่ง $F_1 \cup U$ และ $F_2 \subseteq X - \overline{U}$

และ $(X - \overline{U}) \cap U = \varnothing$

ดังนั้น X เป็นปริภูมิ $-T_4$ ■

ทฤษฎีบท 4.9 กำหนด (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิปกติแล้ว (X, τ) เป็นปริภูมิเรกกิวลาร์

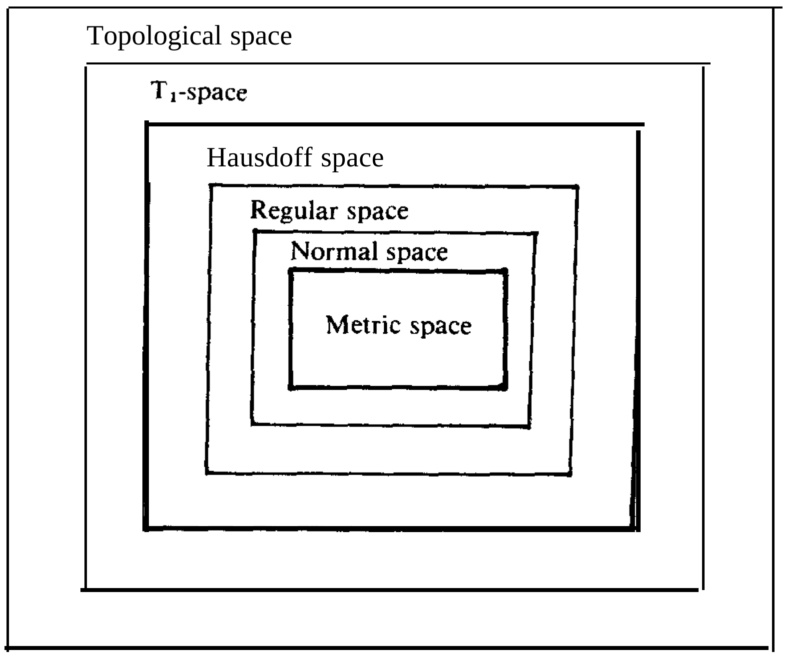
พิสูจน์ ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิปกติ

ดังนั้น X เป็นปริภูมิ $-T_4$ และปริภูมิ $-T_1$

ต้องการพิสูจน์ว่า X เป็นปริภูมิเรกกิวลาร์
เพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า X เป็นปริภูมิ $-T_3$
ให้ F เป็นเซตย่อยปิดของ X และ $x \notin F$
ดังนั้น $x \in X-F$
แต่ $\{x\}$ เป็นเซตปิด (เพราะว่า X เป็น T_1)
จะได้ว่า $\{x\} \cap F = \varnothing$
เพราะว่า X เป็นปริภูมิ $-T_4$
ดังนั้นจะมีเซตเปิด U, V ซึ่ง $\{x\} \subseteq U$ และ $F \subseteq V$
โดยที่ $U \cap V = \varnothing$
ดังนั้นจะมีเซตเปิด U, V ซึ่ง $x \in U$ และ $F \subseteq V$
โดยที่ $U \cap V = \varnothing$
ดังนั้น X เป็นปริภูมิเรกกิวลาร์ ■

สำหรับรายละเอียดที่เกี่ยวกับสัจพจน์แห่งการแบ่งแยกได้กล่าวอย่างกว้างขวางในโทโพโลยีระดับสูงซึ่งไม่ได้นำมากล่าวในที่นี้ แต่อย่างไรก็ตามจะเห็นว่าการแยกแยะปริภูมิออกมาทำให้เราสามารถพิจารณารูปแบบต่าง ๆ ตลอดจนคุณสมบัติของแต่ละปริภูมิได้ง่ายขึ้น สะดวกแก่การพิจารณาปริภูมินั้น ๆ

สำหรับแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของปริภูมิต่าง ๆ เขียนได้ดังรูปข้างล่างนี้



รูป 4.5

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงแสดงว่าปริภูมิย่อยของปริภูมิเรกกิวลาร์ เป็นปริภูมิเรกกิวลาร์ด้วย
2. จงแสดงว่าปริภูมิย่อยของปริภูมิปกติเป็นปริภูมิปกติด้วย
3. จงพิสูจน์ว่าปริภูมิเมตริกเป็นปริภูมิ T_1, T_2, ปริภูมิปกติ และปริภูมิเรกกิวลาร์
4. ถ้า X เป็นปริภูมิเรกกิวลาร์ และ F เป็นเซตย่อยปิดของ X และ $x \notin F$ แล้วจะมีเซตเปิด U, V ซึ่ง $x \in U$, $F \subseteq V$ และ $\bar{U} \cap \bar{V} = \varnothing$
5. กำหนดให้ $X = \{a, b, c\}$

   $$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

   จงพิจารณาว่า X เป็นปริภูมิเรกกิวลาร์หรือไม่ ถ้าไม่เป็นปริภูมิเรกกิวลาร์เป็นปริภูมิ $-T_3$ หรือไม่