บทที่ 3
ปริภูมิเชิงโทโพโลยี
(Topological Space)

3.1 ปริภูมิเชิงโทโพโลยี

Topological Space

จากบทที่ 2 ได้นิยามฟังก์ชันต่อเนื่องในรูปทรงกลมเปิดในปริภูมิเมตริก แต่อย่างไรก็ตามในบางครั้งเราไม่สามารถหาเมตริกที่เหมาะสมหรือเมตริกที่สอดคล้องได้ ดังนั้นเราจึงจำเป็นต้องนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องในรูปของเซตเปิดทั่ว ๆ ไป ในปริภูมิทั่ว ๆ ไป โดยไม่จำเป็นต้องเป็นปริภูมิเมตริก ซึ่งทั้งนี้ในการนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องในปริภูมิทั่ว ๆ ไปได้อาศัยแนวความคิดจากปริภูมิเมตริกนั่นเอง

ปริภูมิที่จะศึกษาต่อไปนี้เรียกว่าปริภูมิเชิงโทโพโลยีซึ่งจะนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 3.1 กำหนดให้ X เป็นเซตใด ๆ $X \neq \varnothing$ และ τ เป็นชั้น (class) ของเซตย่อยของ X เรียก τ ว่าโทโพโลยี (topology) บน X ก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $\varnothing \in \tau$

(2) $X \in \tau$

(3) ถ้า $G_i \in \tau$ สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

(4) ถ้า $G_i \in \tau$ สำหรับทุกค่า $i \in J$ แล้ว $\bigcup_{i \in J} G_i \in \tau$

แล้วเรียก (X, τ) ว่าปริภูมิเชิงโทโพโลยี และเรียกสมาชิกของ τ ว่าเซตเปิด (open set)

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก (metric space) τ เป็นชั้นของเซตเปิดทั้งหลายในปริภูมิเมตริก จะได้ว่า τ เป็นโทโพโลยีบน X เพราะว่าสอดคล้องกับคุณสมบัติทั้ง 4 ข้อของนิยาม 3.1 ตามเหตุผลจากทฤษฎีบท 2.4 และทฤษฎีบท 2.6 ตามลำดับ ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ■

นิยาม 3.2 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี แล้วเรียก (X, τ) ว่า ปริภูมิซึ่งโทโพโลยีมาจากเมตริก (metrizable space) ก็ต่อเมื่อมีเมตริก d ซึ่ง τ เป็นโทโพโลยีที่เกิดจากเมตริก d (topology induced by metric d) โดยทั่ว ๆ ไปใช้ τ_d แทน τ

นิยาม 3.3 ถ้า $X = R$ (เซตของจำนวนจริงทั้งหมด) และ d เป็นเมตริกปกติ แล้วเรียก τ ที่เกิดจากเมตริก d ว่า โทโพโลยีปกติ (usual topology) และเรียก (X, τ) ว่า ปริภูมิปกติ (usual space)

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ X เป็นเซตใด ๆ , $X \neq \varnothing$

$\tau = \{ B \mid B \subseteq X \}$ หรือแทนเพาเวอร์เซตของ X

จงแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

วิธีทำ ต้องการแสดงว่า τ เป็นโทโพโลยีบน X นั่นคือต้องแสดงว่าสอดคล้องกับคุณสมบัติ 4 ข้อ ในนิยาม 3.1

(1) เพราะว่า $\varnothing \subseteq X$

ดังนั้น $\varnothing \in \tau$

(2) เพราะว่า $X \subseteq X$

ดังนั้น $X \in \tau$

(3) ถ้า $A_i \in \tau$ สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น $A_i \subseteq X$

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq X$

ดังนั้น $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

(4) ถ้า $B_i \in \tau$ สำหรับทุกค่า $i \in \tau$

ดังนั้น $B_i \subseteq X$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{i \in J} B_i \subseteq X$

ดังนั้น $\bigcup_{i \in J} B_i \in \tau$

เพราะฉะนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ∎

นิยาม 3.4 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี โดยที่ τ เป็นเพาเวอร์เซตของ X แล้วเรียก (X, τ) ว่าปริภูมิเชิงโทโพโลยีเต็มหน่วย (discrete topolotical space)

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ X เป็นเซตใด ๆ $X \neq \varnothing$

τ เป็นเซตย่อยของ X ที่มีเพียง 2 เซต คือ $\varnothing$ และ X

นั่นคือ $\tau = \{ \varnothing, X \}$

จะเห็นว่า τ สอดคล้องกับคุณสมบัติทั้ง 4 ข้อ ของนิยาม 3.1

ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

นิยาม 3.5 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีโดยที่ τ เป็นเซตของ $\varnothing$ และ X เท่านั้น แล้วเรียก (X, τ) ว่าปริภูมิเชิงโทโพโลยีไม่เต็มหน่วย (indiscrete topological space)

จะเห็นว่าถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีเต็มหน่วย แล้วจะได้ว่าเซตเปิดในปริภูมินี้มีเพียง 2 ตัวเท่านั้นคือ $\varnothing$ และ X

ตัวอย่าง 3.4 กำหนดให้ $X = \{ a, b \}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\} \}$

จะเห็นว่า (1) $\varnothing \in \tau$

(2) $X \in \tau$

(3) เพราะว่า $\varnothing \cap X = \varnothing$ $\varnothing \cap \{a\} = \varnothing$

$X \cap \{a\} = \{a\}$ และ $\varnothing \cap X \cap \{a\} = \varnothing$

นั่นแสดงว่าผลร่วมของสมาชิกใน τ อยู่ใน τ

(4) เพราะว่า $\varnothing \cup X = X$ $\varnothing \cup \{a\} = \{a\}$

$X \cup \{a\} = X$ และ $\varnothing \cup X \cup \{a\} = X$

นั่นแสดงว่าผลผนวกของสมาชิกใน τ อยู่ใน τ

จะได้ว่า τ สอดคล้องคุณสมบัติทั้ง 4 ข้อ ในนิยาม 3.1

ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ■

แต่อย่างไรก็ตามเมื่อกำหนดเซตมาให้โดยที่เซตที่กำหนดให้ไม่เป็นเซตว่างแล้วเราจะหาโทโพโลยีบนเซตนั้นได้หลายแบบด้วยกัน ตัวอย่างเช่น

กำหนดให้ $X = \{ a, b \}$

โทโพโลยีบน X ได้แก่

(1) $\{ \varnothing, X \}$

(2) $\{ \varnothing, X, \{a\} \}$

(3) $\{ \varnothing, X, \{b\} \}$

(4) $\{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\} \}$

ตัวอย่าง 3.5 กำหนดให้ $X = \{ a, b, c \}$

จงหาโทโพโลยีทั้งหมดบนเซต X และยกตัวอย่างเซตที่ไม่เป็นโทโพโลยีบน X

วิธีทำ (1) สมาชิก 1 ตัว

: ไม่มี

(2) สมาชิก 2 ตัว ได้แก่

: $\{ \varnothing, X \}$

(3) สมาชิก 3 ตัว ได้แก่

$\{ \varnothing, X, \{a\} \}$

$\{ \varnothing, X, \{b\} \}$

$\{ \varnothing, X, \{c\} \}$

$\{ \varnothing, X, \{ a, b \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{ a, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{ b, c \} \}$

(4) สมาชิก 4 ตัว ได้แก่

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{ a, b \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{ a, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{ b, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{b\}, \{ a, b \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{b\}, \{ b, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{b\}, \{ a, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{c\}, \{ a, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{c\}, \{ b, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{c\}, \{ a, b \} \}$

(5) สมาชิก 5 ตัว ได้แก่

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{ a, b \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{c\}, \{ a, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{b\}, \{c\}, \{ b, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{ a, b \}, \{ a, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{b\}, \{ a, b \}, \{ b, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{c\}, \{ a, c \}, \{ b, c \} \}$

(6) สมาชิก 6 ตัว ได้แก่

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{ a, b \}, \{ a, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{ a, b \}, \{ b, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{b\}, \{c\}, \{ b, c \}, \{ a, b \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{b\}, \{c\}, \{ b, c \}, \{ a, c \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{c\}, \{ a, c \}, \{ a, b \} \}$

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{c\}, \{ a, c \}, \{ b, c \} \}$

(7) สมาชิก 7 ตัว ได้แก่

: ไม่มี

(8) สมาชิก 8 ตัว ได้แก่

$P(x)$: เพาเวอร์เซตของ X

$\{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \}$

ตัวอย่างเซตซึ่งไม่เป็นโทโพโลยีบน X เช่น

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\} \}$

เพราะว่า $\{a\} \in \tau$, $\{c\} \in \tau$

แต่ $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \notin \tau$

τ ไม่เป็นโทโพโลยีบน X ■

ตัวอย่าง 3.6 กำหนดให้ X เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $X \neq \varnothing$

τ เป็นเซตของ $\varnothing$ และเซตย่อยของ X ซึ่งคอมพลีเมนต์ของเซตเหล่านี้เป็นเซตจำกัด

จงแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

วิธีทำ จากโจทย์ $\tau = \{ \varnothing \} \cup \{ B \mid B \subset X$ และ $X - B$ เป็นเซตจำกัด $\}$

ต้องการแสดงว่าสอดคล้องกับคุณสมบัติ 4 ข้อ

(1) เพราะว่า $X - X = \varnothing$

แต่ $\varnothing$ เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น $X \in \tau$

(2) $\varnothing \in \tau$

(3) ในการพิสูจน์ผลร่วมจำกัด พิจารณาเพียง 2 เซตก็เพียงพอ

สมมุติ $A, B \in \tau$

ดังนั้น $A = \varnothing$ หรือ $X - A$ เป็นเซตจำกัด

$B = \varnothing$ หรือ $X - B$ เป็นเซตจำกัด

ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $A \cap B \in \tau$

ถ้า $A \cap B \neq \varnothing$ แล้ว

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

แต่ $X - A$ และ $X - B$ เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น $(X - A) \cup (X - B)$ เป็นเซตจำกัด

$$A \cap B \in \tau$$

(4) ให้ $\{ G_i \mid i \in J \}$ เป็นชั้นย่อย (subclass) ของ τ

ดังนั้น $G_i \in \tau$ สำหรับทุก ๆ $i \in J$

ดังนั้น $G_i = \varnothing$ หรือ $X - G_i$ เป็นเซตจำกัด

ถ้าทุก ๆ i, $G_i = \varnothing$ จะได้ $\bigcup G_i = \varnothing \in \tau$

ถ้ามีบาง i, $G_i \neq \varnothing$ จะได้ $X - (\bigcup G_i) = \bigcap (X - G_i)$ ซึ่งผลรวมของเซตจำกัดเป็นเซตจำกัด ดังนั้นจะได้ว่า สำหรับบาง i ซึ่ง $G_i \neq \varnothing$ เมื่อนำมาทำผลผนวกกันยังคงเป็นสมาชิกของ τ นั่นคือ $\bigcup G_i \in \tau$

และเมื่อทำผลผนวกกับ G_i ที่เป็นเซตว่างก็จะได้เซตเดิม

ดังนั้น $\bigcup_{i \in J} G_i \in \tau$

จากคุณสมบัติทั้ง 4 ข้อ จะได้ว่า τ เป็นโทโพโลยีบนเซต X

ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ■

นิยาม 3.6 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิโทโพโลยีดังตัวอย่าง 3.6 แล้วเรียก (X, τ) ว่าปริภูมิโคไฟไนต์ (cofinite space)

กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีแล้วเรียกสมาชิกของ τ ว่า เซตเปิด (open set) ตัวอย่างเช่น

$X = \{ a, b, c \}$

$\tau \ \{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{ a, b \} \}$

จะเห็นว่า (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

ดังนั้นเซตเปิด (open set) ใน (X, τ) ได้แก่

$\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{ a, b \}$

นอกจากนั้นไม่ใช่เซตเปิด ตัวอย่างเช่น

$\{c\}, \{ a, c \}, \{ b, c \}$

เราทราบแล้วว่าสมาชิกใน τ เป็นเซตเปิด แต่อย่างไรก็ตามเรานิยามเซตในรูปแบบแบบเดียวกับปริภูมิเมตริกได้ดังนี้

นิยาม 3.7 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X เรียก A ว่าเซตเปิด ก็ต่อเมื่อทุก ๆ $x \in A$ จะมีเซต $G \in \tau$ ซึ่ง $x \in G \subseteq A$

จากนิยาม 3.7 เราจะเห็นว่าสมาชิกทุก ๆ ตัวใน τ เป็นเซตเปิดทั้งนี้เพราะว่าทุก $G \in \tau$ และทุก ๆ $x \in G$ จะได้ว่า

$$x \in G \subseteq G$$

ตัวอย่าง 3.7 กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ a, b \}, \{ a, c, d \}, \{ a, b, c, d \}, \{ a, b, e \} \}$$

(X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

วิธีทำ จะเห็นว่าจากนิยาม 3.7 สมาชิกทุกตัวใน τ เป็นเซตเปิดตัวอย่างเช่น

$$a, b, c, d \in \{ a, b, c, d \} \subseteq \{ a, b, c, d \}$$

แสดงว่า $\{ a, b, c, d \}$ เป็นเซตเปิด

แต่ $\{ a, b, c \}$ ไม่เป็นเซตเปิด เพราะว่ามีสมาชิกในเซตตัวหนึ่งซึ่งสมาชิกใน τ ทุกตัวที่บรรจุสมาชิกตัวนี้ไม่เป็นเซตย่อยของ $\{ a, b, c \}$

$$c \in \{ a, b, c \}$$

สมาชิกใน τ ที่บรรจุ c ได้แก่ $\{ a, c, d \}, \{ a, b, c, d \}, X$

และ

$$\{ a, c, d \} \nsubseteq \{ a, b, c \}$$
$$\{ a, b, c, d \} \nsubseteq \{ a, b, c \}$$
$$X \nsubseteq \{ a, b, c \}$$

■

อย่างไรก็ตามนิยามเซตเปิดในนิยาม 3.7 จะใช้ประโยชน์ในการพิสูจน์ว่าเซตที่ต้องการเป็นเซตเปิดซึ่งจะพบในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป

แบบฝึกหัด 3.1

1. กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d \}$ แล้วเซตใดต่อไปนี้เป็นโทโพโลยีบน X

    (1) $\{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{ a, b \} \}$

    (2) $\{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{ a, b \}, \{ a, c \} \}$

    (3) $\{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{ b, d \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \} \}$

    (4) $\{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$

    (5) $\{ \varnothing, X, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{ a, d \}, \{ b, c, d \}, \{ a, c, d \} \}$

2. กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

    $$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ a, b \}, \{ a, c, d \}, \{ a, b, c, d \}, \{ a, b, e \} \}$$

    จงแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

3. กำหนดให้ τ_1, τ_2 เป็นโทโพโลยีบนเซต X แล้วจงแสดงว่า $\tau_1 \cap \tau_2$ เป็นโทโพโลยีบน X

4. กำหนดให้ τ_1, τ_2 เป็นโทโพโลยีบนเซต X แล้ว $\tau_1 \cup \tau_2$ เป็นโทโพโลยีบน X หรือไม่เพราะเหตุใด

5. กำหนดให้ $X \neq \varnothing$ และ τ เป็นเซตของ $\varnothing$ และเซตย่อยของ X ซึ่งคอมพลีเมนต์เป็นเซตนับได้ (countable set)

    จงแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

3.2 เซตปิดและโคลเชอร์

Closed set and closure

เพราะว่าในปริภูมิเชิงโทโพโลยีเซตที่เป็นสมาชิกของ τ เป็นเซตเปิด ซึ่งคุณสมบัติทั้ง 4 ข้อในนิยาม 3.1 ก็เป็นคุณสมบัติของเซตเปิดที่เราได้เคยศึกษามาแล้วในปริภูมิเมตริก ส่วนเรื่องที่ต้องศึกษาในปริภูมิเชิงโทโพโลยีเราจะได้เริ่มต้นศึกษาจากเซตปิด (closed set) เป็นต้นไป ซึ่งจะนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 3.8 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $F \subseteq X$ แล้วเรียก F ว่า เซตปิด (closed set) ก็ต่อเมื่อ $X - F$ เป็นเซตเปิด

นั่นคือ $X - F \in \tau$

ตัวอย่าง 3.8 กำหนดให้ $X = R$ (เซตของจำนวนจริง)

τ = เซตของ $\varnothing$ และช่วงเปิดทั้งหลายใน R

ดังนั้น τ ประกอบด้วย $\varnothing$, $(-\infty, a)$, (a, ∞), (a, b), R โดยที่ $a, b \in R$

ดังนั้นเซตปิดในที่นี้คือช่วงปิดทั้งหลายใน R รวม $\varnothing$ กับ R ด้วย ■

ตัวอย่าง 3.9 กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\} \}$

จงหาเซตปิดใน X

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned} x - 0 &= X \\ x - x &= \varnothing \\ X - \{a\} &= \{ b,c,d,e \} \\ X - \{a,b\} &= \{c,d,e\} \\ X - \{a,c,d\} &= \{b,e\} \\ X - \{a,b,c,d\} &= \{e\} \\ X - \{ a,b,e\} &= \{c,d\} \end{aligned}$$

ดังนั้นเซตปิดใน X ได้แก่

$\varnothing, X, \{e\}, \{b,e\}, \{c,d\}, \{c,d,e\}, \{b,c,d,e\}$ ■

จากตัวอย่าง 3.8 จะเห็นว่า $\varnothing$, X เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด แต่อย่างไรก็ตามเรามีตัวอย่างของเซตที่ไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด เช่น $\{b\}, \{d,e\}, \{a,b,c\}, \dots$ เป็นต้น แต่สำหรับเซตที่มีคุณสมบัติเป็นทั้งเซตเปิด และเซตปิดนอกจาก $\varnothing$ และ X แล้ว อาจเป็นเซตอื่นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$X = \{a,b,c,d,e\}$

$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$

จะเห็นว่า $\{a\} \in \tau$ ดังนั้น $\{a\}$ เป็นเซตเปิด

แต่ $X - \{a\} = \{b,c,d,e\} \in \tau$ ดังนั้น $\{a\}$ เป็นเซตปิด

ในทำนองเดียวกัน $\{b,c,d,e\}$ เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

พิจารณาทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีแล้วจะได้ว่า

(1) $\varnothing$ เป็นเซตปิด

(2) X เป็นเซตปิด

(3) ถ้า $F_1, F_2, \ldots, F_n$ เป็นเซตปิด แล้ว $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ เป็นเซตปิด

(4) ถ้า F_i เป็นเซตปิด สำหรับ $i \in J$ แล้ว $\bigcap_{i \in J} F_i$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ (1) เพราะว่า $X - \varnothing = X \in \tau$

ดังนั้น $X - \varnothing$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้น $\varnothing$ เป็นเซตปิด

(2) เพราะว่า $X - X = \varnothing \in \tau$

ดังนั้น $X - X$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้น X เป็นเซตปิด

(3) เพราะว่า $F_1, F_2, \ldots, F_n$ เป็นเซตปิด

ดังนั้น $X - F_1, X - F_2, \ldots, X - F_n$ เป็นเซตเปิด

$\bigcap_{i=1}^{n} (X - F_i)$ เป็นเซตเปิด

$X - \bigcap_{i=1}^{n} (X - F_i)$ เป็นเซตปิด

แต่ $X - \bigcap_{i=1}^{n} (X - F_i) = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$

ดังนั้น $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ เป็นเซตปิด

(4) เพราะว่า F_i เป็นเซตปิด สำหรับทุก ๆ $i \in J$

ดังนั้น $X - F_i$ เป็นเซตเปิด สำหรับทุก ๆ $i \in J$

$\bigcup_{i \in J} (X - F_i)$ เป็นเซตเปิด

$X - \bigcup_{i \in J} (X - F_i)$ เป็นเซตปิด

แต่ $X - \bigcup_{i \in J} (X - F_i) = \bigcap_{i \in J} F_i$

ดังนั้น $\bigcap_{i \in J} F_i$ เป็นเซตปิด ■

ในการศึกษาเซตปิดในปริภูมิเมตริกได้กล่าวถึงโคลเชอร์ของเซต และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง สำหรับในปริภูมิเชิงโทโพโลยีก็เช่นเดียวกัน เพียงแต่นิยามของโคลเชอร์เปลี่ยนไปเล็กน้อยคือ แทนที่จะใช้ทรงกลมเปิดจุดศูนย์กลางที่ x เราใช้เซตเปิดที่มี x เป็นสมาชิกแทน ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.9 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $A \subseteq X$, $x \in X$ เรียก x ว่าเป็นจุดในโคลเชอร์ของ A ก็ต่อเมื่อทุก ๆ เซตเปิด G ของ x, $G \cap A \neq \varnothing$

แทนโคลเชอร์ของ A ด้วย $\bar{A}$

ตัวอย่าง 3.10 กำหนดให้ $X = \{a, b, c\}$

$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$

ให้ $A = \{a, b\}$

จงหา $\bar{A}$

วิธีทำ ต้องการแสดงว่า $a \in \bar{A}$ นั่นคือเราต้องแสดงให้ได้ว่าทุก ๆ เซตเปิดที่มี a บรรจุอยู่ตัดกับเซต A แล้ว ไม่เป็นเซตว่าง

เซตเปิดที่มี a บรรจุอยู่คือ $\{a\}$, X

และ $A \cap \{a\} = \{a\} \neq \varnothing$

$A \cap X = \{a, b\} \neq \varnothing$

ดังนั้น $a \in \bar{A}$

ในทำนองเดียวกัน เซตเปิดที่มี b, c บรรจุอยู่คือ $\{b, c\}$, X

และ $A \cap \{b, c\} = \{b\} \neq \varnothing$

$A \cap X = \{a, b\} \neq \varnothing$

ดังนั้น $b, c \in \bar{A}$

จะได้ว่า $\bar{A} = \{a, b, c\} = X$ ■

ตัวอย่าง 3.11 กำหนดให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$

ให้ $A = \{a, b, c\}$ $B = \{c, d\}$

จงหา A และ $\bar{B}$

วิธีทำ จากนิยาม 3.8 และตัวอย่าง 3.9 จะได้ข้อสังเกตว่าทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ $\bar{A}$

ดังนั้นสำหรับ $A = \{a, b, c\}$ จะได้ว่า $a, b, c \in \bar{A}$ ดังนั้นจึงเป็นการเพียงพอที่จะพิจารณาว่า $d, e \in \bar{A}$ หรือไม่

เซตเปิดที่มี d บรรจุอยู่คือ $\{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X$

และ $\{a, b, c\} \cap \{a, c, d\} = \{a, c\} \neq \varnothing$

$\{a, b, c\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b, c\} \neq \varnothing$

$\{a, b, c\} \cap X = \{a, b, c\} \neq \varnothing$

ดังนั้น $d \in \bar{A}$

เซตเปิดที่มี e บรรจุอยู่คือ $\{a, b, e\}, X$

และ $\{a, b, c\} \cap \{, a, b, e\} = \{a, b, \} \neq \varnothing$

$\{a, b, c\} \cap X = \{a, b, c\} \neq \varnothing$

ดังนั้น $e \in \bar{A}$

จะได้ว่า $\bar{A} = \{a, b, c, d, e\} = X$

สำหรับเซต $B = \{c, d\}$ จะได้ว่า $c, d \in \bar{B}$ ดังนั้นจึงเป็นการเพียงพอที่จะพิจารณาว่า $a, b, e \in \bar{B}$

เซตเปิดที่มี a บรรจุอยู่คือ $\{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}, X$

แต่มีเซตเปิดที่ตัดแล้วเป็นเซตว่าง คือ

$\{a\} \cap B = \varnothing$

$\{a, b\} \cap B = \varnothing$

ดังนั้น $a \notin \bar{B}$

เซตเปิดที่มี b บรรจุอยู่คือ $\{a, b\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}, X$

และ $\{a, b\} \cap B = \varnothing$

เพราะฉะนั้น $b \notin \bar{B}$

เซตเปิดที่มี e บรรจุอยู่คือ $\{a, b, e\}, X$

และ $\{a, b, e\} \cap B = \varnothing$

เพราะฉะนั้น $e \notin \bar{B}$

จะได้ว่า $\bar{B} = \{c, d\} = B$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 3.10 จะเห็นว่า B เป็นเซตปิด และได้ว่าโคลเชอร์ของเซตปิดคือตัวมันเองนั่นเอง

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $A \subset X$ จะได้ว่า $A \subseteq \bar{A}$

พิสูจน์ ให้ $x \in A$

ให้ G เป็นเซตเปิดใด ๆ ที่ $x \in G$

ดังนั้น $G \cap A \neq \varnothing$

$x \in \bar{A}$

เพราะฉะนั้น $A \subseteq \bar{A}$ ■

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subset X$

ถ้า F เป็นเซตย่อยปิด (closed subset) ของ X และ $A \subset F$ แล้ว จะได้ว่า $\bar{A} \subseteq F$

พิสูจน์ ให้ F เป็นเซตย่อยปิดของ X

ต้องการพิสูจน์ว่า $\bar{A} \subseteq F$

นั่นคือแสดงว่า ถ้า $x \in \bar{A}$ แล้ว $x \in F$

ซึ่งมีความหมายเดียวกัน กับพิสูจน์ว่า ถ้า $x \notin F$ แล้ว $x \notin \bar{A}$

สมมุติ $x \notin F$

ดังนั้น $x \in X - F$ และ $X - F$ เป็นเซตเปิด

เพราะว่า $A \subseteq F$

ดังนั้น $(X - F) \cap A = \varnothing$

$x \notin \bar{A}$

จะได้ว่า ถ้า $x \notin F$ แล้ว $x \notin \bar{A}$

เพราะฉะนั้น $\bar{A} \subseteq F$ ■

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subseteq X$ จะได้ว่า

$$\bar{A} = \bigcap_{i \in J} F_i$$

โดยที่ $\{ F_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตของเซตปิดทั้งหมดซึ่ง $A \subseteq F_i$

พิสูจน์ (1) โดยทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า

$\bar{A} \subseteq F_i$ สำหรับทุก ๆ $i \in J$

ดังนั้น $\bar{A} \subseteq \bigcap_{i \in J} F_i$

(2) ต้องการพิสูจน์ว่า $\bigcap_{i \in J} F_i \subseteq \bar{A}$

สมมุติ $x \notin \bar{A}$

ดังนั้นจะมีเซตเปิด G ซึ่ง $x \in G$ และ $G \cap A = \varnothing$

ดังนั้น $A \subseteq X - G$ และ $X - G$ เป็นเซตปิด

ให้ $F_{i_0} = X - G$

จะได้ว่า มี $i_0 \in J$ ซึ่ง $x \notin F_{i_0}$

ดังนั้น $x \notin \bigcap_{i \in J} F_i$

นั่นคือ $\bigcap_{i \in J} F_i \subseteq \bar{A}$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$\bar{A} = \bigcap_{i \in J} F_i$$ ■

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า $\bar{A}$ เป็นเซตปิด และจากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ต่อไปอีกว่า $\bar{A}$ เป็นเซตปิดที่เล็กที่สุดซึ่งมี A เป็นเซตย่อย

การหาโคลเชอร์ของเซตโดยอาศัยนิยามจะยุ่งยากเพราะต้องพิจารณาจากสมาชิกใน X ทั้งหมดแต่การหาโคลเชอร์ของเซตโดยอาศัยทฤษฎีบท 3.4 จะสะดวกมากดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.12 กำหนดให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

(X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

จงหาโคลเชอร์ของเซตต่อไปนี้

(1) $\{a\}$

(2) $\{b, c\}$

(3) $\{c, d, e\}$

(4) $\{b, c, d, e\}$

วิธีทำ เซตปิดในปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) ได้แก่

0, X, $\{b, c, d, e\}$, $\{c, d, e\}$, $\{b, e\}$, $\{e\}$, $\{c, d\}$

จากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า

(1) $\overline{\{a\}} = x$

(2) $\overline{\{b, c\}} = X \cap \{b, c, d, e\}$

$= \{b, c, d, e\}$

(3) $\overline{\{c, d, e\}} = X \cap \{b, c, d, e\} \cap \{c, d, e\}$

$= \{c, d, e\}$

(4) $\{ b, c, d, e \} = X \cap \{ b, c, d, e \}$

$= \{ b, c, d, e \}$ ■

ทฤษฎีบท 3.5 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $A \subseteq X$
จะได้ว่า A เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $\bar{A} = A$

พิสูจน์ (1) สมมุติ A เป็นเซตปิด
เพราะว่า $A \subseteq A$
จากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ $\bar{A} \subseteq A$
แต่จากทฤษฎีบท 3.2 $A \subseteq \bar{A}$
ดังนั้น $\bar{A} = A$

(2) สมมุติ $\bar{A} = A$
แต่ $\bar{A}$ เป็นเซตปิด
ดังนั้น A เป็นเซตปิด ■

หมายเหตุ ผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.5 สำหรับเซตปิด $\varnothing$, X และ $\bar{A}$ คือ $\bar{\varnothing} = \varnothing$ $\bar{X} = X$ และ $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

ทฤษฎีบท 3.6 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ แล้วจะได้ว่า
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

พิสูจน์ (1) ต้องการแสดงว่า $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$
เพราะว่า $A \subseteq \bar{A}$ และ $B \subseteq \bar{B}$
ดังนั้น $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$
แต่ $\bar{A}$, $\bar{B}$ เป็นเซตปิด และ $\bar{A} \cup \bar{B}$ เป็นเซตปิด
จากทฤษฎีบท 3.3 จะได้

$$\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$$

(2) ต้องการแสดงว่า $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$
เพราะว่า $A \subseteq A \cup B$ และ $B \subseteq A \cup B$
ดังนั้น $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด)
และ $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$
จะได้ว่า $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ■

จากทฤษฎีบท 3.6 ได้ว่า $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ แต่สำหรับผลร่วมไม่เป็นความจริงนั่นคือ $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $X = R$

τ = โทโพโลยีปกติ

$A = (-1,\ 0)$

$B = (0,\ 1)$

แล้วจะได้ $\bar{A} \cap \bar{B} = [-1, 0] \cap [0, 1]$

$= \{0\}$

ในขณะที่ $\overline{A \cap B} = \overline{(-1,\ 0) \cap (0,\ 1)}$

$= \overline{\varnothing}$

$= \varnothing$

ดังนั้น $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$

นิยาม 3.10 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subseteq X$ เรียก A ว่าหนาแน่น (dense) ใน X ก็ต่อเมื่อ $\bar{A} = X$

ตัวอย่าง 3.13 พิจารณาตัวอย่างเซตที่หนาแน่น (dense)

(1) ให้ $X = R$, τ เป็นโทโพโลยีปกติ

จะได้ $\overline{Q} = R$

ดังนั้น Q หนาแน่นใน R

(2) จากตัวอย่าง 3.9 A หนาแน่นใน X

จากตัวอย่าง 3.10 A หนาแน่นใน X แต่ B ไม่หนาแน่นใน X ■

แบบฝึกหัด 3.2

1. กำหนดให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$

   $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

   จงแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และจงหาเซตปิดทั้งหมดของปริภูมิ (x, τ)

2. กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

3. กำหนดให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$

   $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

   จงหาโคลเชอร์ของเซตต่อไปนี้

   (1) $\{a\}$

   (2) $\{a, b, c\}$

(3) $\{ b, d \}$

(4) $\{ b, c, d, e \}$

4. กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ c, d \}, \{ a, c, d \}, \{ b, c, d, e \} \}$

แล้วเซตต่อไปนี้หนาแน่น (dense) ใน X หรือไม่

(1) $\{ c, d \}$

(2) $\{ a, c \}$

5. กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subseteq X$ แล้วจงพิสูจน์ว่า A หนาแน่นใน X ก็ต่อเมื่อทุก ๆ เซตเปิด G, $A \cap G \neq \varnothing$

3.3 จุดลิมิต

Limit points

สำหรับจุดลิมิตของเซตในปริภูมิ (X, τ) มีนิยามคล้ายคลึงกันในปริภูมิเมตริก เพียงแต่เปลี่ยน $S^*(x_o, r)$ เป็นเซตเปิด $G - \{x_o\}$ เท่านั้น ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.11 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $A \subseteq X$ และ $x \in X$ เรียก x ว่าจุดลิมิตของ A ก็ต่อเมื่อทุก ๆ เซตเปิด G ซึ่ง $x \in G$, $(G - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$

เรียกเซตของจุดลิมิตทั้งหลายว่าเซตอนุพัทธ์ (derived set) แทนด้วยสัญลักษณ์ D(A)

ตัวอย่าง 3.14 กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

และ $\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ c, d \}, \{ a, c, d \}, \{ b, c, d, e \} \}$

เป็นโทโพโลยีบน X

กำหนดให้ $A = \{ a, b, c \}$

จงหาจุดลิมิตทั้งหมดของ A

วิธีทำ พิจารณาจากนิยาม 3.10 ว่า a, b, c, d, e เป็นจุดลิมิตของเซต A หรือไม่

(1) พิจารณา a พบว่าเซตเปิดทั้งหมดที่มี a บรรจุอยู่คือ

$X, \{a\}, \{ a, c, d \}$

และ $(X - \{a\}) \cap A = \{ b, c \} \neq \varnothing$

$(\{ a, c, d \} - (a\}) \cap A = (c\} \neq 0$

แต่ $(\{a\} - \{a\}) \cap A = 0$

ดังนั้น $a \notin D(A)$

(2) พิจารณา b พบว่าเซตเปิดทั้งหมดที่มี b บรรจุอยู่คือ X, { b, c, d, e }

และ $(X-\{b\}) \cap A = \{a, c\} \neq \varnothing$

$(\{b, c, d, e\} - \{b\}) \cap A = \{c\} \neq \varnothing$

ดังนั้น $b \in D(A)$

(3) พิจารณา c พบว่าเซตเปิดทั้งหมดที่มี c บรรจุอยู่ คือ

$X, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}$

จะได้ว่า $c \notin D(A)$ เพราะว่า

$(\{c, d\} - \{c\}) \cap A = \varnothing$

(4) พิจารณา d พบว่าเซตเปิดทั้งหมดที่มี d บรรจุอยู่คือ

$X, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}$

จะได้ว่า $d \in D(A)$ เพราะว่า

$$(X-\{d\}) \cap A = \{a, b, c\} \neq \varnothing$$

$$(\{c, d\} - \{d\}) \cap A = \{c\} \neq \varnothing$$

$$(\{a, c, d\} - \{d\}) \cap A = \{a, c\} \neq \varnothing$$

$$(\{b, c, d, e\} - \{d\}) \cap A = \{b, c\} \neq \varnothing$$

(5) พิจารณา e พบว่าเซตเปิดทั้งหมดที่มี e บรรจุอยู่ คือ

$X, \{b, c, d, e\}$

จะได้ว่า $e \in D(A)$ เพราะว่า

$$(X-\{e\}) \cap A = \{a, b, c\} \neq \varnothing$$

$$(\{b, c, d, e\} - \{e\}) \cap A = \{b, c\} \neq \varnothing$$

สรุปได้ว่า $D(A) = \{b, d, e\}$ ■

ตัวอย่าง 3.15 กำหนดให้ $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

จงหา D(A)

วิธีทำ จาก $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$

จะได้ว่า 0 เป็นจุดลิมิตของ A

ให้ G เป็นเซตเปิดใด ๆ ที่ $0 \in G$

จะมีเซตเปิด $(-r, r) \subseteq G$

และ $[(-r, r) - \{0\}] \cap A \neq \varnothing$

จะเห็นว่า 0 เป็นจุดลิมิตเพียงจุดเดียวของ A ส่วนจุดอื่น ๆ ใน A นอกจาก 0 ไม่เป็นจุดลิมิต

$$D(A) = \{0\}$$ ■

ตัวอย่าง 3.16 กำหนดให้ $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$

จงหา $D(A)$

วิธีทำ ให้ x เป็นจุดใด ๆ ใน R (เซตของจำนวนจริงทั้งหมด)

จะได้ว่ามีเซตเปิด G ซึ่ง $x \in G$ และ $(G - \{x\}) \cap A = \varnothing$

ตัวอย่างเช่น $0 \notin D(A)$ เพราะว่า $[(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \{0\}] \cap A = \varnothing$

$\frac{1}{2} \notin D(A)$ เพราะว่า $[(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) - \{\frac{1}{2}\}] \cap A = \varnothing$

เพราะฉะนั้น $D(A) = \varnothing$

พิจารณาทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับเซตของจุดลิมิตต่อไปนี้ ■

ทฤษฎีบท 3.7 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A และ B เป็นเซตย่อยของ X ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $D(A) \subseteq D(B)$

พิสูจน์ ต้องการพิสูจน์ว่า $D(A) \subseteq D(B)$

ให้ $x \in D(A)$

ให้ G เป็นเซตเปิดซึ่ง $x \in G$

ดังนั้น $(G - \{x\}) \cap A \neq 0$

แต่ $A \subseteq B$

ดังนั้น $(G - \{x\}) \cap B \neq 0$

จะได้ว่า $x \in D(B)$

ดังนั้น $D(A) \subseteq D(B)$ ■

ทฤษฎีบท 3.8 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X แล้ว A เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $D(A) \subseteq A$

พิสูจน์ (1) สมมุติ A เป็นเซตปิด

ต้องการแสดงว่า $D(A) \subseteq A$

โดยวิธีการพิสูจน์แบบขัดแย้งสลับที่ (contrapositive)

สมมุติ $x \notin A$

$x \in X - A$

แต่ A เป็นเซตปิดดังนั้น $X - A$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะได้ว่ามีเซตเปิด $G = X - A$ ซึ่ง $x \in G$ และ $(G - \{x\}) \cap A = \varnothing$

เพราะฉะนั้น $x \notin D(A)$

แสดงว่า ถ้า $x \notin A$ แล้ว $x \notin D(A)$

นั่นคือ ถ้า $x \in D(A)$ แล้ว $x \in A$

ดังนั้น $D(A) \subseteq A$

(2) สมมุติ $D(A) \cup A$

ต้องการแสดงว่า A เป็นเซตปิด

มีความหมายเหมือนกับแสดงว่า $X - A$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in X - A$

ดังนั้น $x \notin A$

เพราะฉะนั้น $x \notin D(A)$

ดังนั้นมีเซตเปิด G ซึ่ง $(G - \{x\}) \cap A = \varnothing$

ดังนั้น $G - \{x\} \subseteq X - A$

จะได้ว่า $G \subseteq X - A$

เพราะฉะนั้น $X - A$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้น A เป็นเซตปิด ■

จากทฤษฎีบท 3.8 จะเห็นว่ามีประโยชน์ในการตรวจสอบว่าเป็นเซตปิดหรือไม่โดยดูว่าจุดลิมิตทุก ๆ ตัวของเซตอยู่ในเซตหรือไม่ ตัวอย่างเช่นในปริภูมิเชิงโทโพโลยีปกติ (R, τ_d) จะเห็นว่า $(0, 1]$ ไม่เป็นเซตปิดเพราะว่า 0 เป็นจุดลิมิตของเซต แต่ 0 ไม่อยู่ในเซตนั้น

ตัวอย่าง 3.17 กำหนดให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$

และ $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ เป็นโทโพโลยีบนเซต X

กำหนด $A = \{a, b, e\}$, $B = \{a, b, c\}$ จงใช้ทฤษฎีบท 3.8 ตรวจสอบว่า A, B เป็นเซตปิดหรือไม่

วิธีทำ (1) พิจารณาเซต $A = \{a, b, e\}$

$a \notin D(A)$ เพราะว่า $(\{a\} - \{a\}) \cap A = \varnothing$

$b \in D(A)$ เพราะว่า เซตเปิด G ที่มี b บรรจุอยู่ คือ $\{b, c, d, e\}$ และ X และ $(\{b, c, d, e\{ - \{b\}) \cap A \neq \varnothing$

$(X - \{b\}) \cap A \neq \varnothing$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$c \notin D(A)$

$d \notin D(A)$

$e \in D(A)$

ดังนั้น $D(A) = \{ b, e \} \subseteq A$

ดังนั้น A เป็นเซตปิด

(2) พิจารณาเซต $B = \{ a, b, c \}$

พิจารณาเซตของจุดลิมิตของ B จะได้ว่า

$a \notin D(B)$

$b \in D(B)$

$c \notin D(B)$

$d \in D(B)$

$e \in D(B)$

ดังนั้น $D(B) = \{ b, d, e \} \nsubseteq B$

ดังนั้น B ไม่เป็นเซตเปิด ■

จากตัวอย่าง 3.17 เราได้ข้อสังเกตอีกอย่างหนึ่งคือจุดลิมิตของเซ็ตใด ๆ ก็ตามอาจอยู่ในเซตหรือไม่อยู่ในเซตก็ได้ แต่ถ้าอยู่ทั้งหมดเมื่อใดเซตนั้นจะเป็นเซตปิดนั่นเอง

ทฤษฎีบท 3.9 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X แล้ว จะได้ว่า $A \cup D(A)$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า $X - (A \cup D(A))$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in X - (A \cup D(A))$

$x \in (X-A) \cap (X-D(A))$

ดังนั้น $x \in X-A$ และ $x \in X-D(A)$

นั่นคือ $x \notin A$ และ $x \notin D(A)$

เพราะว่า $x \notin D(A)$ ดังนั้นจะมีเซตเปิด G ซึ่ง $x \in G$ และ $(G - \{x\}) \cap A = 0$

ดังนั้น $G - \{x\} \subseteq X - A$

เพราะฉะนั้น $G \subseteq X - A$

สำหรับการพิสูจน์ $G \subseteq X-D(A)$ หรือ $G \cap D(A) = 0$ พิสูจน์ได้ดังนี้

ให้ $y \in G$

เพราะว่า $G \cap A = \varnothing$ และ G เป็นเซตเปิด

ดังนั้น $y \notin D(A)$

เพราะฉะนั้น $G \cap D(A) = 0$

หรือ $G \subseteq X-D(A)$

ดังนั้น $G \subseteq (X - A) \cap (X - D(A))$

$G \subseteq X - (A \cup D(A))$

แสดงว่า $X - A \cup D(A)$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้น $A \cup D(A)$ เป็นเซตปิด ■

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ A เป็นเซตย่อยของ X

แล้ว $\bar{A} = A \cup D(A)$

(1) เพราะว่า $A \cup D(A)$ เป็นเซตปิด (ตามทฤษฎีบท 3.9)

และ $A \subseteq A \cup D(A)$

โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า

$$\bar{A} \subseteq A \cup D(A)$$

(2) เพราะว่า $A \subseteq \bar{A}$

ดังนั้น $D(A) \subseteq D(\bar{A})$ (ตามทฤษฎีบท 3.7)

เพราะว่า $\bar{A}$ เป็นเซตปิด

โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.8 จะได้ว่า

$$D(\bar{A}) \subseteq \bar{A}$$

ดังนั้น $D(A) \subseteq \bar{A}$

ดังนั้น $A \cup D(A) \subseteq \bar{A}$

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า

$$\bar{A} = A \cup D(A)$$ ■

จากทฤษฎีบท 3.10 จะเห็นว่าสำหรับเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตปิด เราทำให้เป็นเซตปิดได้โดยนำเซตของจุดลิมิตทั้งหมดผนวกเข้ากับเซตเดิม ตัวอย่างเช่น

ในปริภูมิเชิงโทโพโลยี (R, τ_d)

(1) $A = (0, 1]$ ไม่เป็นเซตปิด

$D(A) = [0, 1]$ ดังนั้น $A \cup D(A) = [0, 1]$ เป็นเซตปิด

(2) $B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$ ไม่เป็นเซตปิด

$D(B) = \{0\}$ ดังนั้น $B \cup D(B) = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$ เป็นเซตปิด

(3) จากตัวอย่าง 3.17 $A = \{ a, b, e \}$

$D(A) = \{ b, e \}$

ดังนั้น $\bar{A} = \{ a, b, e \} \cup \{ b, e \} = A$

A เป็นเซตปิด

(4) จากตัวอย่าง 3.17 $B = \{ a, b, c \}$ ไม่เป็นเซตปิด

$D(B) = \{ b, d, e \}$

ดังนั้น $\bar{B} = \{ a, b, c \} \cup \{ b, d, e \}$

$= \{ a, b, c, d, e \}$

$= X$ ■

ทฤษฎีบท 3.11 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A และ B เป็นเซตย่อยของ X แล้วจะได้ว่า $D(A \cup B) = D(A) \cup D(B)$

พิสูจน์ (1) เพราะว่า $A \subseteq A \cup B$

และ $B \subseteq A \cup B$

ดังนั้น $D(A) \subseteq D(A \cup B)$

และ $D(B) \subseteq D(A \cup B)$

เพราะฉะนั้น $D(A) \cup D(B) \subset D(A \cup B)$

(2) สมมุติ $x \notin D(A) \cup D(B)$

ดังนั้น $x \notin D(A)$ และ $x \notin D(B)$

ดังนั้นจะมีเซตเปิด G_1, G_2 ซึ่ง $x \in G_1$, $x \in G_2$ และ

$(G_1 - \{x\}) \cap A = 0$

$(G_2 - \{x\}) \cap B = 0$

ให้ $G = G_1 \cap G_2$

เพราะฉะนั้น $(G - \{x\}) \cap (A \cup B) = [(G - \{x\}) \cap A] \cup [(G - \{x\}) \cap B]$

$= \varnothing \cup \varnothing$

$= \varnothing$

ดังนั้น $x \notin D(A \cup B)$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x \notin D(A) \cup D(B)$ แล้ว $x \notin D(A \cup B)$

นั่นแสดงว่า ถ้า $x \in D(A \cup B)$ แล้ว $x \in D(A) \cup D(B)$

$D(A \cup B) \subset D(A) \cup D(B)$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$D(A \cup B) = D(A) \cup D(B)$

แบบฝึกหัด 3.3

1. กำหนด $X = \{ a, b, c, d, e \}$

   $\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ c, d \}, \{ a, c, d \}, \{ b, c, d, e \}$

   จงหา D(A) ของเซต A ต่อไปนี้

   (1) $A = \{a\}$

   (2) $A = \{ b, c \}$

   (3) $A = \{ c, d, e \}$

   (4) $A = \{ b, c, d, e \}$

2. กำหนดให้ (X, τ_1) และ (X, τ_2) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X ถ้า $\tau_1 \subseteq \tau_2$ แล้วจงพิสูจน์ว่า D(A) ใน (X, τ_1) เป็นเซตย่อยของ D(A) ใน (X, τ_2)

3. กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A, B เป็นเซตย่อยของ X และข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่เพราะเหตุใด

   (1) $D(A \cap B) = D(A) \cap D(B)$

   (2) $D(A - B) = D(A) - D(B)$

3.4 จุดข้างใน จุดข้างนอก และจุดขอบ

Interior points, exterior points and boundary points.

จุดข้างใน จุดข้างนอก และจุดขอบของเซตในปริภูมิเชิงโทโพโลยีนิยามในรูปแบบที่คล้ายคลึงกับในปริภูมิเมตริก ซึ่งดูได้จากนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.12 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X แล้ว X เป็นจุดข้างใน A ก็ต่อเมื่อมีเซตเปิด G ซึ่ง

$$x \in G \subseteq A$$

แทนเซตของจุดข้างในด้วย Int (A)

ตัวอย่าง 3.18 กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ c, d \}, \{ a, c, d \}, \{ b, c, d, e \} \}$

เป็นโทโพโลยีบน X

ให้ $A = \{ a, c, d \}$, $B = \{ b, c, d \}$

จงหา Int (A), Int (B)

วิธีทำ (1) พิจารณา $A = \{ a, c, d \}$

$a \in \text{Int}(A)$ เพราะว่า $a \in \{a\} \subseteq A$

$c \in \text{Int}(A)$ เพราะว่า $c \in \{c, d\} \subseteq A$

$d \in \text{Int}(A)$ เพราะว่า $d \in \{c, d\} \subseteq A$

เพราะฉะนั้น $\text{Int}(A) = \{a, c, d\}$

(2) พิจารณา $B = \{b, c, d\}$

$b \notin \text{Int}(B)$ เพราะว่าเซตเปิดที่บรรจุ b อยู่คือ $\{b, c, d, e\}$ และ X แต่ทั้ง 2 เซตไม่เป็นเซตย่อยของ A

$c \in \text{Int}(B)$ เพราะว่า $c \in \{c, d\} \subseteq B$

$d \in \text{Int}(B)$ เพราะว่า $d \in \{c, d\} \subseteq B$

ดังนั้น $\text{Int}(B) = \{c, d\}$ ■

จากตัวอย่าง 3.18 พบว่าเซตที่เป็นเซตเปิดจุดทุกจุดในเซตเป็นจุดข้างในส่วนเซตทั่ว ๆ ไปเซตของจุดข้างในจะเป็นเซตย่อยของ A

ทฤษฎีบท 3.12 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X และ G เป็นเซตเปิดซึ่ง $G \subseteq A$ แล้ว $G \subseteq \text{Int}(A)$

พิสูจน์ ต้องการแสดงว่า $G \subseteq \text{Int}(A)$

ให้ $x \in G$

แต่ G เป็นเซตเปิดและ $x \in G \subseteq A$

ดังนั้น $x \in \text{Int}(A)$

เพราะฉะนั้น $G \subseteq \text{Int}(A)$ ■

ทฤษฎีบท 3.13 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X แล้วจะได้ว่า

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{i \in J} G_i$$

เมื่อ $\{G_i \mid i \in J\}$ เป็นเซตของเซตเปิดทั้งหมดซึ่ง $G_i \subseteq A$

พิสูจน์ (1) ต้องการแสดงว่า $\text{Int}(A) \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$

ให้ $x \in \text{Int}(A)$

เพราะฉะนั้น จะมีเซตเปิด G_{i_o} ซึ่ง $x \in G_{i_o} \subseteq A$ และ $i_0 \in J$

เพราะว่า $x \in G_{i_o}$ และ $G_{i_o} \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$

ดังนั้น $x \in \bigcup_{i \in J} G_i$

แสดงว่า $\text{Int}(A) \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$

(2) ต้องการพิสูจน์ว่า $\bigcup_{i \in J} G_i \subseteq \text{Int}(A)$

เพราะว่า $G_i \subseteq A$ และ G_i เป็นเซตเปิดสำหรับทุก ๆ $i \in J$

โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.12 จะได้ว่า

$$G_i \subseteq \text{Int}(A) \text{ สำหรับทุก ๆ } i \in J$$

ดังนั้น $\bigcup_{i \in J} G_i \subseteq \text{Int}(A)$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $\text{Int}(A) = \bigcup_{i \in J} G_i$ ■

จากทฤษฎีบท 3.12 และทฤษฎีบท 3.13 จะได้ข้อสรุปว่า Int (A) เป็นเซตเปิด (3.13) และเป็นเซตเปิดที่โตที่สุดที่เป็นเซตย่อยของ A (3.12) และคุณสมบัติของทฤษฎีบท 3.13 ใช้ประโยชน์ในการหา Int(A) ได้ง่ายขึ้นเพราะได้จากการนำเซตเปิดทั้งหมดที่เป็นเซตย่อยของ A มาทำผลผนวกกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.19 จากตัวอย่าง 3.18 จงหา Int (A) และ Int (B) โดยใช้ผลของทฤษฎีบท 3.13

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.18 $X = \{a, b, c, d, e\}$

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

$A = \{a, c, d\}$, $B = \{b, c, d\}$

(1) พิจารณาเซต A เซตเปิดทั้งหมดที่เป็นเซตย่อยของ A ได้แก่

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{c, d\}$, $\{a, c, d\}$

$$\text{Int}(A) = \varnothing \cup \{a\} \cup \{c, d\} \cup \{a, c, d\}$$
$$= \{a, c, d\}$$

(2) พิจารณาเซต B เซตเปิดทั้งหมดที่เป็นเซตย่อยของ B ได้แก่ $\varnothing$, $\{c, d\}$

$$\text{Int}(B) = \varnothing \cup \{c, d\}$$
$$= \{c, d\}$$ ■

เซต A ในตัวอย่าง 3.19 เป็นเซตเปิดและเราได้ว่า Int (A) เท่ากับเซต A ซึ่งทำให้เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างเซตเปิดกับเซตของจุดข้างในดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.14 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X แล้ว A เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อ $A = \text{Int}(A)$

พิสูจน์ (1) สมมุติ A เป็นเซตเปิด

เพราะว่า $A \subseteq A$ และ A เป็นเซตเปิด

โดยทฤษฎีบท 3.12 จะได้ว่า

$$A \subseteq \text{Int}(A)$$

แต่จากนิยามของจุดข้างในจะได้ว่า

$\mathrm{Int}(A) \subseteq A$

ดังนั้น $A = \mathrm{Int}(A)$

(2) สมมุติ $A = \mathrm{Int}(A)$

แต่จากทฤษฎีบท 3.13 ได้ว่า Int (A) เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น A เป็นเซตเปิด ■

นิยาม 3.13 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X แล้วเรียก x ว่าจุดข้างนอกของ A ก็ต่อเมื่อ $x \in \mathrm{Int}(X-A)$

แทนเซตของจุดข้างนอกด้วย Ext (A)

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง Int (A), Ext (A) และ $\bar{A}$ จะพบว่า

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}(A) &= \mathrm{Int}(X-A) \\ &= X-\bar{A} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.20 กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ c, d \}, \{ a, c, d \}, \{ b, c, d, e \} \}$

และให้ $A = \{ b, c, d \}$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.19 $\mathrm{Int}(A) = \{ c, d \}$

พิจารณา $X-A = \{ a, e \}$

เซตเปิดทั้งหมดที่เป็นเซตย่อยของ $X-A$ คือ $\varnothing, \{a\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}(X-A) &= \varnothing \cup \{a\} \\ &= \{a\} \end{aligned}$$

หรือหา Ext (A) ได้อีกแบบหนึ่งโดยหา $\bar{A}$ ก่อน

เซตปิดทั้งหลายที่คลุม A คือ $X, \{ b, c, d, e \}$

เพราะฉะนั้น $\bar{A} = X \cap \{ b, c, d, e \} = \{ b, c, d, e \}$

เพราะฉะนั้น $X-\bar{A} = \{a\}$

จะเห็นว่า $\mathrm{Ext}(A) = \{a\}$ ■

สำหรับเซตของจุดขอบคือเซตของจุดทั้งหลายที่ไม่ใช่จุดข้างใน และไม่ใช่จุดข้างนอกซึ่งจากตัวอย่าง 3.20 จะเห็นว่าสำหรับเซต A ที่กำหนดให้ จุดขอบของเซต A คือ b, e แต่อย่างไรก็ตามเราสามารถนิยามจุดขอบในรูปโคลเชอร์ได้ดังนี้

นิยาม 3.14 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X x เป็นจุดขอบของเซต A ก็ต่อเมื่อ x เป็นสมาชิกของ $\bar{A}$ และ $\overline{X-A}$

แทนเซตของจุดขอบด้วย Bd (A)

ดังนั้น $Bd(A) = \bar{A} \cap (\overline{X-A})$

ตัวอย่าง 3.21 กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ c, d \}, \{ a, c, d \}, \{ b, c, d, e \} \}$

และ $A = \{ b, c, d \}$

จงหา Bd (A)

วิธีทำ เซตปิดทั้งหมดคือ 0, X, { b, c, d, e }, { a, b, e }, { b, e }, {a}

เซตปิดทั้งหมดที่คลุม A คือ { b, c, d, e }, X

$ii = \{ b, c, d, e \} \cap X$

$= \{ b, c, d, e \}$

เซตปิดทั้งหมดที่คลุม X-A = { a, e } คือ { a, b, e }, X

$X - A = \{ a, b, e \} \cap X$

$= \{ a, b, e \}$

$Bd(A) = \bar{A} \cap (\overline{X-A})$

$= \{ b, c, d, e \} \cap \{ a, b, e \}$

$= \{ b, e \}$

จากตัวอย่าง $X = \{ a, b, c, d, e \}$, $A = \{ b, c, d \}$, เราจะได้ว่า $Int(A) = \{ c, d\}$, $Ext(A) = \{a\}$ และ $Bd(A) = \{ b, e \}$ ซึ่งจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าทั้ง 3 เซตไม่มีสมาชิกร่วมกัน นั่นคือ

$$Int(A) \cap Ext(A) \cap Bd(A) = \varnothing$$

และจากที่นิยามไว้ว่า $Bd(A) = \bar{A} \cap (\overline{X-A})$ จะเห็นว่า Bd (A) เขียนในรูปผลรวมของเซตปิด 2 เซต ดังนั้น Bd (A) เป็นเซตปิด

ในเรื่องจุดลิมิตเรามีทฤษฎีบทเกี่ยวกับโคลเซอร์คือ $\bar{A}$ เขียนได้อยู่ในรูป $A \cup D(A)$ อย่างไรก็ตามในเรื่องจุดขอบ เรามีทฤษฎีบททำนองเดียวกันในการเขียน $\bar{A}$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.15 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี A เป็นเซตย่อยของ X แล้ว $\bar{A} = A \cup Bd(A)$

พิสูจน์ (1) ต้องการแสดงว่า $\bar{A} \subseteq A \cup Bd(A)$

สมมุติ $x \in \bar{A}$

ดังนั้น $x \in A$ หรือ $x \notin A$

ถ้า $x \notin A$ ดังนั้น $x \in X - A \subseteq \overline{X - A}$

ดังนั้น $x \in X - A$

จะได้ว่า $x \in \bar{A} \cap (X\text{-}A)$

แสดงว่า $x \in Bd\ (A)$

ดังนั้น $x \in A \cup Bd\ (A)$

เพราะฉะนั้น $\bar{A} \subseteq A \cup Bd\ (A)$

(2) ต้องการแสดงว่า $A \cup Bd\ (A) \subset \bar{A}$

จากนิยาม $Bd\ (A) = \bar{A} \cap (X\text{-}A)$

ดังนั้น $Bd\ (A) \subset \bar{A}$

แต่ $A \subseteq \bar{A}$

ดังนั้น $A \cup Bd\ (A) \subset$ ii

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$\bar{A} = A \cup Bd\ (A)$$

แบบฝึกหัด 3.4

1. กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d \}$

$\tau = \{ 0, X, \{c\}, \{ a, c \}, \{ b, c \} \}$ เป็นโทโพโลยีบน X

ให้ $A = \{ a, d \}$ จงหา Int (A), Ext (A) และ Bd (A)

2. กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ a, b \}, \{ a, c, d \}, \{ a, b, c, d \}, \{ a, b, e \} \}$

เป็นโทโพโลยีบน X จงหา

(1) Int (A)

(2) Ext (A)

(3) Bd (A)

3. ในปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) A, B เป็นเซตย่อยของ X จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) Int (Int (A)) = Int (A)

(2) Int (0) = 0

(3) Int (X) = X

4. **จงพิสูจน์ว่าถ้าในปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) A เป็นเซตย่อยของ X แล้ว**

(1) A เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $Bd\ (A) \subseteq A$

(2) A เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อ $Bd\ (A) \subseteq X\text{-}A$

5. A เป็นเซตย่อยของปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) แล้วเรียก A ว่าไม่มีที่ใดหนาแน่น (nowhere dense) ก็ต่อเมื่อ $\text{Int}(\bar{A}) = \varnothing$

จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเซตปิดแล้ว Bd (A) ไม่มีที่ใดหนาแน่น

6. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(1) $X - \text{Int}(A) = \overline{X - A}$

(2) $X - \bar{A} = \text{Int}(X - A)$

3.5 ปริภูมิย่อย

Subspace

ในตอนนี้จะได้กล่าวถึงเซตย่อยของปริภูมิเชิงโทโพโลยี ซึ่งเป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีด้วย

ทฤษฎีบท 3.16 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี Y เป็นเซตย่อยของ X ถ้า $\tau_y = \{ G \cap Y \mid G \in \tau \}$ แล้วจะได้ว่า (Y, τ_y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

พิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่าสอดคล้องกับคุณสมบัติทั้ง 4 ข้อในนิยาม 3.1

(1) เพราะว่า $\varnothing \in \tau$

และ $\varnothing \cap Y \in \tau_y$

ดังนั้น $0 \in \tau_y$

(2) เพราะว่า $X \in \tau$

และ $x \cap Y \in \tau_y$

ดังนั้น $Y \in \tau_y$

(3) สมมุติ $G_1', G_2', \ldots, G_n' \in \tau_y$

ดังนั้น $G_1' = G_1 \cap Y,\ G_1 \in \tau$

$G_2' = G_2 \cap Y,\ G_2 \in \tau$

. . . .

. . . .

$G_n' = G_n \cap Y,\ G_n \in \tau$

ดังนั้น $\bigcap_{i=1}^{n} G_i' = (G_1 \cap Y) \cap (G_2 \cap Y) \cap \ldots \cap (G_n \cap Y)$

$= (\bigcap_{i=1}^{n} G_i) \cap Y$

แต่ $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

ดังนั้น $\bigcap_{i=1}^{n} G_i' \in \tau_y$

(4) สมมุติ $G_i' \in \tau_y$ สำหรับทุก ๆ $i \in J$

ดังนั้นสำหรับแต่ละ $i \in J$ จะได้ $G_i' = G_i \cap Y$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{i\in J} G_i' = \bigcup_{i\in J} (G_i \cap Y)$

$= (\bigcup_{i\in J} G_i) \cap Y$

แต่ $\bigcup_{i\in J} G_i \in \tau$

ดังนั้น $\bigcup_{i\in J} G_i' \in \tau_y$

ดังนั้น τ_y เป็นโทโพโลยีบน Y

(Y, τ_y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ■

นิยาม 3.15 กำหนดให้ (X, T) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี Y เป็นเซตย่อยของ x โดยที่โทโพโลยีบน Y คือ $\tau_y = \{G \cap Y \mid G \in T\}$ แล้วเรียก (Y, τ_y) ว่าปริภูมิย่อย (subspace) ของ X

เรียก τ_y ว่าโทโพโลยีสัมพัทธ์ (relative topology) บน Y

เรียก $G' = G \cap Y$ ว่าเซตเปิดสัมพัทธ์ (relative open set) ใน Y

ตัวอย่าง 3.22 กำหนดให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$

และ $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$

และ $Y = \{a, b, d\}$

จงหา τ_y จึงทำให้ (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อยของ (X, τ)

วิธีทำ นำเซตเปิดทั้งหมดมาทำผลร่วมกับ Y จะได้

$$X \cap Y = Y$$
$$\varnothing \cap Y = \varnothing$$
$$\{a\} \cap Y = \{a\}$$
$$\{a, b\} \cap Y = \{a, b\}$$
$$\{a, c, d\} \cap Y = \{a, d\}$$
$$\{a, b, c, d\} \cap Y = Y$$
$$\{a, b, e\} \cap Y = \{a, b\}$$

ดังนั้น τ_y คือ $\{0, Y, \{a\}, \{a, b\}, \{a, d\}\}$ ●

ตัวอย่าง 3.23 กำหนดให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$

และ $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

เป็นโทโพโลยีบน X ถ้า $Y = \{ a, d, e \}$ และ $\tau_y = \{ \varnothing, Y, \{a\}, \{d\}, \{ a, d \}, \{ a, e \}, \{ d, e \} \}$

จงพิจารณาว่า (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อยของ (X, τ) หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาว่าเซตเปิดใน τ_y เขียนในรูป $G \cap Y$ ได้ทุกตัวหรือไม่

$$\begin{aligned}
\varnothing &= \varnothing \cap Y \\
Y &= X \cap Y \\
\{a\} &= \{a\} \cap Y \\
\{d\} &= \{ c, d \} \cap Y \\
\{ a, d \} &= \{ a, c, d \} \cap Y \\
\{ d, e \} &= \{ b, c, d, e \} \cap Y
\end{aligned}$$

แต่ไม่สามารถหา $G \in \tau$ ซึ่ง $G \cap Y = \{ a, e \}$ ได้

แสดงว่า (Y, τ_y) ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ (X, τ) ■

สำหรับปริภูมิย่อยเราจะได้ข้อสังเกตอย่างหนึ่งเพิ่มขึ้นมาคือ เซตเปิดในปริภูมิย่อย (Y, τ_y) ไม่จำเป็นต้องเป็นเซตเปิดในปริภูมิ (X, τ) ดังตัวอย่าง 3.22 จะเห็นว่า $\{ a, d \}$ เป็นเซตเปิดในปริภูมิย่อย (Y, τ_y) แต่ $\{ a, d \}$ ไม่เป็นเซตเปิดในปริภูมิ (X, τ) ตัวอย่างที่เห็นถึงความแตกต่างอีกตัวอย่างหนึ่งของปริภูมิและปริภูมิย่อยคือตัวอย่างในเส้นจำนวนดังนี้

ตัวอย่าง 3.24 กำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยีปกติ (R, τ) และให้ τ_y เป็นโทโพโลยีสัมพัทธ์บนเซต $Y = [1, 4]$

เพราะว่า $[1, 2) = (0, 2) \cap [1, 4]$

ดังนั้น $[1, 2)$ เป็นเซตเปิดสัมพัทธ์ใน Y

แต่ $(2, 3]$ ไม่ใช่เซตเปิดสัมพัทธ์ใน Y ■

อย่างไรก็ตามผลจากนิยาม 3.15 เราจะได้ความสัมพันธ์ในรูปผลร่วมของเซตปิดสัมพัทธ์ จุดลิมิตสัมพัทธ์ และโคลเชอร์สัมพัทธ์ของปริภูมิย่อยดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.17 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อยของ (X,τ) แล้วจะได้ว่า

F' เป็นเซตปิดสัมพัทธ์ใน Y ก็ต่อเมื่อ $F' = F \cap Y$ เมื่อ F เป็นเซตปิดใน X

พิสูจน์ (1) ให้ F' เป็นเซตปิดใน Y

ดังนั้น $Y - F'$ เป็นเซตเปิดใน Y

ดังนั้น $Y - F' = G \cap Y$ โดยที่ G เป็นเซตเปิดใน X

$$F' = Y - G \cap Y$$
$$= Y - G$$
$$= (X - G) \cap Y$$

ให้ $F = X - G$

ดังนั้น F เป็นเซตปิดใน X

จะได้ $F' = F \cap Y$

(2) ให้ $F' = F \cap Y$ โดยที่ F เป็นเซตปิดใน X

$$Y - F' = Y - F \cap Y$$
$$= Y - F$$
$$= (X - F) \cap Y$$
$$= G \cap Y \text{ โดยที่ } G = X - F$$

ดังนั้น $Y - F'$ เป็นเซตเปิดสัมพัทธ์ใน Y

F' เป็นเซตปิดสัมพัทธ์ใน Y ■

ทฤษฎีบท 3.18 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อย $A \subseteq Y$, $D'(A)$ เป็นเซตของจุดลิมิตใน Y แล้วจะได้ว่า

$$D'(A) = D(A) \cap Y$$

โดยที่ $D(A)$ เป็นเซตของจุดลิมิตใน X

พิสูจน์ (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด) ■

ทฤษฎีบท 3.19 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อย และ A เป็นเซตย่อยของ Y $\bar{A}'$ เป็นโคลเชอร์ของเซต A ใน Y แล้วจะได้ว่า

$$\bar{A}' = \bar{A} \cap Y$$

เมื่อ $\bar{A}$ เป็นโคลเชอร์ของเซต A ใน X

พิสูจน์ เพราะว่า
$$\bar{A}' = A \cup D'(A)$$
$$= A \cup (D(A) \cap Y)$$
$$= [A \cup D(A)] \cap (A \cup Y)$$
$$= \bar{A} \cap Y$$

ดังนั้น $\bar{A}' = \bar{A} \cap Y$ ■

แบบฝึกหัด 3.5

1. กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ c, d \}, \{ a, c, d \}, \{ b, c, d, e \} \}$$

ถ้า $Y = \{ a, b, e \}$ จงหา τ_y ที่ทำให้ (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อยของ (X, τ)

2. กำหนดให้ $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ a, b \}, \{ a, c, d \}, \{ a, b, c, d \}, \{ a, b, e \} \}$$

ถ้า $Y = \{ b, d, e \}$ จงหา τ_y ที่ทำให้ (Y, τ_y) เป็นปริภูมิย่อยของ (X, τ)

3. กำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยีปกติ R และ $Y = [3, 8]$
จงพิจารณาว่า เซตต่อไปนี้เป็นเซตเปิดสัมพัทธ์ใน Y หรือไม่

   (1) $[3, 5)$

   (2) $(6, 8]$

   (3) $(3, 7)$

4. กำหนด (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี G เป็นเซตย่อยเปิดของ X และ $A \subseteq G$ จงพิสูจน์ว่า A เป็นเซตเปิดสัมพัทธ์ใน G ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตเปิดใน X

3.6 ฐาน และ ฐานย่อย

Bases and subbases

ในบางครั้งการกำหนดโทโพโลยีบนเซตอาจยุ่งยากหรือไม่สามารถจะเขียนเซตเปิดทั้งหมดในปริภูมิได้ แต่อย่างไรก็ตามเราสามารถกำหนดฐานของโทโพโลยีแทนก็ได้ ซึ่งจะนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 3.16 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี เรียก $\mathcal{B}$ ว่าฐานเปิด (open base) สำหรับ X ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{B}$ เป็นชั้นของเซตเปิดซึ่งมีคุณสมบัติว่าเซตเปิดทุกเซตใน X เขียนได้ในรูปผลผนวกของเซตในชั้นนี้

นิยาม 3.16 อาจกล่าวได้อีกนัยหนึ่งคือ $\mathcal{B}$ เป็นฐานเปิดของ X ก็ต่อเมื่อ ถ้า G เป็นเซตเปิดใด ๆ $G \neq \varnothing$ และ $x \in G$ แล้ว จะต้องมี $B \in \mathcal{B}$ ซึ่ง $x \in B \subset G$

ในบางครั้งเราเรียกฐานเปิดว่าเซตเปิดพื้นฐาน (basic open sets)

ในปริภูมิเมตริกจะได้ว่าเซตของทรงกลมเปิดทั้งหลาย เป็นฐานเปิดสำหรับปริภูมิเมตริกนั้น ๆ

ตัวอย่าง 3.25 กำหนดให้ปริภูมิเชิงโทโพโลยี R ตามปกติ

$\mathcal{B} = \{ (a, b) \mid a, b \in R \}$ แทนเซตของช่วงเปิดทั้งหลายใน R จะเห็นว่าเซตเปิดทั้งหลายใน R เขียนได้ในรูปผลผนวกของช่วงเปิดใน R ทั้งสิ้น

ดังนั้น $\mathcal{B}$ เป็นฐานสำหรับ R

ตัวอย่าง 3.26 กำหนดให้ $X = \{a, b, c\}$

$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\} \}$

จะได้ว่า $\mathcal{B}_1 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$ เป็นฐานเปิดสำหรับ X

เพราะว่าเซตเปิดทุกตัวยกเว้น $\varnothing$ จะมีเซตใน $\mathcal{B}_1$ ซึ่ง

$x \in B \subset G$

เช่น $a \in X$ จะมี $\{a\} \in \mathcal{B}_1$ ซึ่ง $a \in \{a\} \subseteq X$

$b \in X$ จะมี $\{b\} \in \mathcal{B}_1$ ซึ่ง $b \in \{b\} \subseteq X$

$c \in X$ จะมี $\{c\} \in \mathcal{B}_1$ ซึ่ง $c \in \{c\} \subseteq X$

$b \in \{b, c\}$ จะมี $\{b\} \in \mathcal{B}_1$ ซึ่ง $b \in \{b\} \subseteq \{b, c\}$

เป็นต้น

สมมุติ $\mathcal{B}_2 = \{ \{a, b\}, \{b, c\} \}$ จะเห็นว่า $\mathcal{B}_2$ ไม่เป็นฐานสำหรับ X เพราะว่า $\{a\}$ เป็นเซตเปิด ซึ่ง $a \in \{a\}$ แต่ไม่สามารถหา $B \in \mathcal{B}_2$ ซึ่ง $a \in B \cup \{a\}$ ได้

หมายเหตุ ในตัวอย่าง 3.26 สำหรับชั้น B_2 จะเห็นว่าคุณสมบัติการเป็นฐานจริงสำหรับเซตเปิด X, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ แต่ไม่จริงสำหรับ $\{a\}$ และ $\{b\}$ ดังนั้นในการตรวจสอบต้องทดสอบทุก ๆ ตัว

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และแถบสี่เหลี่ยมในระนาบยูคลิด R^2 จะเห็นว่าถ้า (a_1, b_1) และ (a_2, b_2) เป็นช่วงเปิดที่มีขอบเขตบนแกน x_1 และ x_2 ตามลำดับ แล้วผลคูณของ (a_1, b_2) กับ (a_2, b_2) เขียนอยู่ในรูปเซต

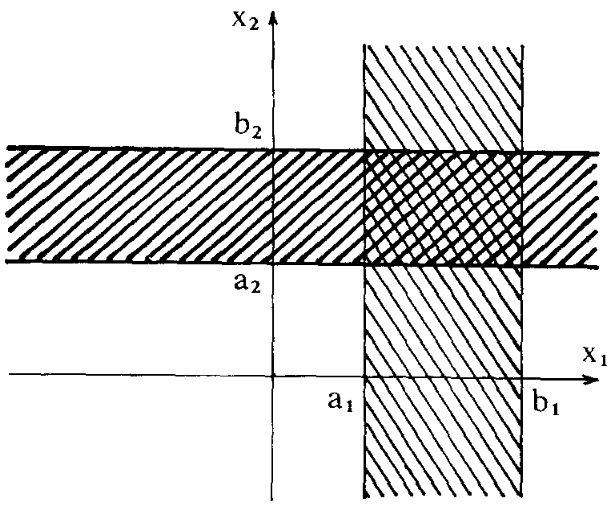
$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \{ (x_1, x_2) \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2 \}$$

ซึ่งจะใช้แทนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเปิดดังรูป 3.1

ในทำนองเดียวกันสำหรับช่วงปิด $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ ผลคูณของ $[a_1, b_1]$ และ $[a_2, b_2]$ เขียนอยู่ในรูปเซต

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{ (x_1, x_2) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2 \}$$

ซึ่งจะใช้แทนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด



รูป 3.1

จะได้ว่าชั้นของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเปิดเป็นฐานเปิดสำหรับระนาบยูคลิด (ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

เราได้ข้อสังเกตอย่างหนึ่งสำหรับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเปิดคือ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเปิดเป็นผลร่วมระหว่างแถบเปิด (open strips) 2 แถบ คือ

(1) $(a_1, b_1) \times R = \{ (x_1, x_2) \mid a_1 < x_1 < b_1$, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ $\}$

(2) $R \times (a_2, b_2) = \{ (x_1, x_2) \mid a_2 < x_2 < b_2$, x_1 เป็นจำนวนจริงใด ๆ $\}$

นั่นคือ $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = [(a_1, b_1) \times R] \cap [R \times (a_2, b_2)]$

ทฤษฎีบท 3.20 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

$\mathcal{B}$ เป็นฐานเปิดสำหรับ X ก็ต่อเมื่อ

(1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(2) สำหรับทุก ๆ $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ถ้า $x \in B_1 \cap B_2$ แล้วจะมี $B_x \in \mathcal{B}$ ซึ่ง $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$

พิสูจน์ (1) สมมุติ $\mathcal{B}$ เป็นฐานเปิดสำหรับ X

เพราะว่า X เป็นสมาชิกของ τ

ดังนั้น X เขียนได้ในรูปผลผนวกของสมาชิกใน $\mathcal{B}$

ดังนั้น $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ . . . . . (*)

เพราะว่า $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$

ดังนั้น $B_1, B_2 \in \tau$

ดังนั้น $B_1 \cap B_2 \in \tau$

ดังนั้น $B_1 \cap B_2$ เขียนได้ในรูปผลผนวกของสมาชิกใน $\mathcal{B}$

หรือกล่าวได้อย่างหนึ่งคือ ถ้า $x \in B_1 \cap B_2$ จะมี $B_x \in \mathcal{B}$

ซึ่ง $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$ . . . . . (**)

(2) สมมุติคุณสมบัติทั้ง 2 ข้อจริง

ต้องการพิสูจน์ว่า $\mathcal{B}$ เป็นฐานเปิดสำหรับ X

สำหรับการพิสูจน์ว่า $\mathcal{B}$ เป็นฐานเปิดสำหรับ X ถ้ากำหนดให้ τ เป็นชั้นของเซตย่อยของ X ซึ่งเป็นผลผนวกของสมาชิกใน $\mathcal{B}$ แล้วเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า τ เป็นโทโพโลยีบน X

การพิสูจน์ว่า τ เป็นโทโพโลยีบน X คือแสดงว่าสอดคล้องคุณสมบัติทั้ง 4 ข้อของนิยาม 3.1 ดังนี้

i) เพราะว่า $X \subset X$

และ $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

ดังนั้น $X \in \tau$

ii) เพราะว่า $\varnothing = \bigcup_{B \in \varnothing \subset \mathcal{B}} B$

เพราะฉะนั้น $\varnothing \in \tau$

iii) ให้ $G_1, G_2 \in \tau$

ดังนั้น $G_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ และ $G_2 = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}} B'$

ดังนั้น $G_1 \cap G_2 = (\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) \cap (\bigcup_{B' \in \mathcal{B}} B')$

$= \bigcup_{B, B' \in \mathcal{B}} (B \cap B')$

แต่จากคุณสมบัติข้อ (2) $B \cap B'$ เขียนได้ในรูปผลผนวกของสมาชิกใน $\mathcal{B}$

ดังนั้น $G_1 \cap G_2$ เขียนในรูปผลผนวกของสมาชิกใน $\mathcal{B}$ ด้วย

จะได้ว่า $G_1 \cap G_2 \in \tau$

iv) ให้ $G_i \in \tau$ สำหรับทุก ๆ $i \in J$

เพราะฉะนั้น $G_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

ดังนั้น $\bigcup_{i \in J} G_i = \bigcup_{i \in J} (\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B)$

จะเห็นว่า $\bigcup_{i \in J} G_i$ เขียนได้ในรูปผลผนวกของสมาชิกใน $\mathcal{B}$

จะได้ว่า $\bigcup_{i \in J} G_i \in \tau$

ดังนั้น τ เป็นโทโพโลยีบน X ■

พิจารณาตัวอย่าง 3.26 จะเห็นว่ากรณีที่ 2 ที่ $\mathcal{B} = \{ \{ a, b \}, \{ b, c \} \}$ จะเห็นว่า $\mathcal{B}$ ไม่เป็นฐานสำหรับ X เพราะว่าขาดคุณสมบัติข้อ 2 ในทฤษฎีบท 3.20 คือ $\{ a, b \}, \{ b, c \} \in \mathcal{B}$ แต่ไม่สามารถหา $B_x \in \mathcal{B}$ ซึ่ง

$$b \in B_x \subseteq \{ a, b \} \cap \{ b, c \} = \{ b \}$$ ได้

สำหรับนิยามของฐานย่อยเปิด (open subbase) จะได้นิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 3.17 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $\mathcal{B}^*$ เป็นชั้นของเซตย่อยเปิดของ X แล้วเรียก $\mathcal{B}^*$ ว่าฐานเปิดย่อยของ X ก็ต่อเมื่อเซตของผลร่วมจำกัดของสมาชิกของ $\mathcal{B}^*$ เป็นฐานเปิดสำหรับ X

ตัวอย่าง 3.27 กำหนดให้ปริภูมิเชิงโทโพโลยีตามปกติ R

$\mathcal{B} = \{ (a, b) \mid a, b \in R \}$ เป็นฐานเปิดสำหรับ R

เพราะว่าสำหรับช่วงเปิด (a, b) ใด ๆ

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$$

ดังนั้นจะเห็นว่าช่วงเปิดอนันต์ทำผลร่วมกันจะได้เซตเปิดซึ่งเป็นสมาชิกของฐานเปิดของ R

ดังนั้น $\mathcal{B}^* = \{ (-\infty, b), (a, \infty) \mid a, b \in R \}$ เป็นฐานเปิดย่อยของ R ■

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงพิสูจน์ว่า เซตของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเปิด ในระนาบยูคลิด เป็นฐานเปิด
2. กำหนดให้ X เป็นเซตใด ให้ B เป็นชั้นย่อยของ X ถ้า B เป็นฐานสำหรับโทโพโลยี τ และ τ' บน X แล้วจงแสดงว่า $\tau = \tau'$
3. จงยกตัวอย่างฐานย่อยเปิดในระนาบ R^2

3.7 ปริภูมิผลคูณ

Product space

ในตอนนี้จะได้กล่าวถึงปริภูมิที่อยู่ในรูปผลคูณคาร์ทีเซียนของปริภูมิเชิงโทโพโลยี แนวความคิดในเรื่องนี้ได้จากปริภูมิ R^2 โดยพิจารณาการคูณของช่วงเปิด (a_1, b_1) กับ (a_2, b_2) ซึ่งได้ $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเปิด ดังนั้นเมื่อขยายแนวความคิดของปริภูมิผลคูณออกไปเป็น $R \times R$ ก็คือปริภูมิ R^2 นั่นเอง

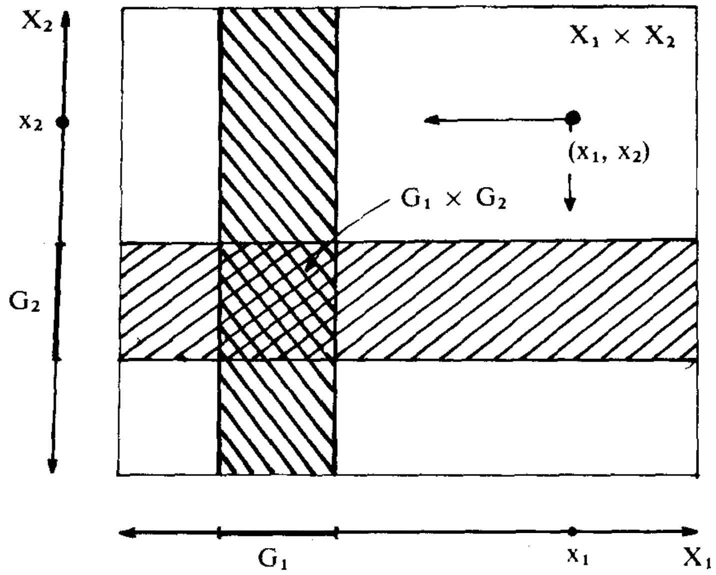
ให้ X_1, X_2 เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

ให้ $X = X_1 \times X_2$ เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต X_1, X_2

พิจารณาชั้นของเซตย่อยของ X ซึ่งอยู่ในรูป $G_1 \times X_2$ และ $X_1 \times G_2$ โดยที่ G_1 และ G_2 เป็นเซตย่อยเปิดของ X_1, X_2 ตามลำดับ โทโพโลยีที่มีเซตของ $G_1 \times X_2$ และ $X_1 \times G_2$ เป็นฐานย่อยเปิดของ X และ $G_1 \times G_2$ เป็นฐานเปิดเรียกว่า โทโพโลยีผลคูณ (product topology)

ดังนั้น $\{ G_1 \times G_2 \mid G_1 \subseteq X_1, G_2 \subseteq X_2 \}$ เป็นฐานเปิดสำหรับ X จะได้ว่าทุก ๆ เซตเปิดใน X เขียนได้ในรูปผลผนวกของสมาชิกในเซตนี้

รูป 3.2



ทฤษฎีบท 3.21 กำหนดให้ $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \ldots, (X_n, \tau_n)$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

τ เป็นเซตของเซตย่อยของ X ซึ่งเขียนอยู่ในรูปผลผนวกของเซตในรูป $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ โดยที่ G_i เป็นเซตย่อยเปิดของ X_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ แล้ว (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

พิสูจน์ แสดงว่า τ สอดคล้องคุณสมบัติ 4 ข้อในนิยาม 3.1

(1) เพราะว่า $\varnothing = \varnothing \times \varnothing \times \ldots \times \varnothing$ n ครั้ง
ดังนั้น $\varnothing \in \tau$

(2) เพราะว่า $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$
และ $X_i \in \tau_i$ เป็นเซตเปิดใน X_i
ดังนั้น $X \in \tau$

(3) ให้ G และ $G' \in \tau$

ดังนั้น $G = \bigcup_{i \in J} (G_{i,1} \times G_{i,2} \times \ldots \times G_{i,n})$

$G' = \bigcup_{j \in J'} (G'_{j,1} \times G'_{j,2} \times \ldots \times G'_{j,n})$

โดยที่สำหรับแต่ละ $i \in J, j \in J'$ $G_{i,k}, G'_{i,k}$ เป็นเซตย่อยเปิดของ X_i

สำหรับแต่ละ $(i, j) \in J \times J'$ และแต่ละ $k = 1, 2, \ldots, n$

$G_{(i,j),k} = G_{i,k} \cap G'_{j,k}$

ดังนั้น $G \cap G' = \bigcup_{(i,j) \in J \times J'} (G_{(i,j),1} \times G_{(i,j),2} \times \ldots \times G_{(i,j),n})$

เพราะฉะนั้น $G_1 \cap G' \in \tau$

(4) ให้ $G_i \in \tau$ สำหรับแต่ละ $i \in J$

$G_i = \bigcup_{j \in J'} (G_{(i,j),1} \times G_{(1,j),2} \times \ldots \times G_{(i,j),n}$

ดังนั้น $\bigcup_{i \in J} G_i = \bigcup_{i \in J} \left(\bigcup_{j \in J'} (G_{(i,j),1} \times G_{(i,j),2} \times \ldots \times G_{(i,j),n}) \right)$

$= \bigcup_{(i,j) \in J \times J'} (G_{(i,j),1} \times G_{(i,j),2} \times \ldots \times G_{(i,j),n})$

ดังนั้น $\bigcup_{i \in J} G_i \in \tau$

เพราะฉะนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ■

นิยาม 3.18 กำหนดให้ $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \ldots, (X_n, \tau_n)$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

τ เป็นเซตของเซตย่อยของ X ซึ่งเป็นผลผนวกของเซตในรูป

$$G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$$

โดยที่แต่ละ G_i เป็นเซตย่อยเปิดของ X_i แล้ว

เรียก (X, τ) ว่าปริภูมิผลคูณ (product space)

3.8 ฟังก์ชันต่อเนื่องในปริภูมิเชิงโทโพโลยี

Continuous functions in topological space

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันในปริภูมิเชิงโทโพโลยีก็อาศัยแนวความคิดในการสร้างนิยามและทฤษฎีบทจากฟังก์ชันต่อเนื่องในระบบจำนวนจริง และในปริภูมิเมตริก

ฟังก์ชัน f จากปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) ไปยังปริภูมิเชิงโทโพโลยี (Y, τ') เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$

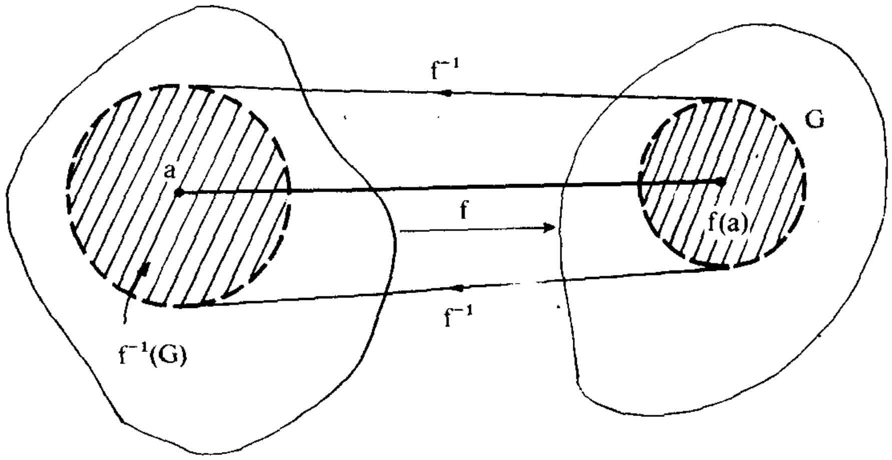
แต่อย่างไรก็ตามในการเขียนบางครั้งเราจะละ τ ไว้ในฐานที่เข้าใจ ดังนั้นอาจเขียนเพียงเป็นฟังก์ชันจากเซต X ไปยัง Y คือ

$$f : X \rightarrow Y$$

นิยาม 3.19 กำหนดปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ), (Y, τ') และ $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $a \in X$ ก็ต่อเมื่อ ทุกเซตเปิด G' ของ $f(a)$ แล้ว $f^{-1}(G')$ เป็นเซตเปิดของ a

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุดบน X



รูป 3.3

ตัวอย่าง 3.28 กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีเต็มหน่วย และ (Y, τ') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีใด ๆ จงแสดงว่า $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

วิธีทำ ให้ $x \in X$ ดังนั้น $f(x) \in Y$

ให้ G เป็นเซตเปิดของ f(x)

ดังนั้น $f^{-1}(G)$ เป็นเซตย่อยของ X

แต่ในปริภูมิเต็มหน่วยทุก ๆ เซตย่อยของ X เป็นเซตเปิด

ดังนั้น $f^{-1}(G)$ เป็นเซตเปิดของ f(x)

จะได้ว่า f ต่อเนื่องบน X ■

ตัวอย่าง 3.29 กำหนดให้
$$X = \{ a, b, c, d \}$$
$$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{ a, b \}, \{ a, b, c \} \}$$
$$Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$
$$\tau' = \{ \varnothing, Y, \{1\}, \{2\}, \{ 1, 2 \}, \{ 2, 3, 4 \} \}$$

ให้ $f = \{ (a, 2), (b, 2), (c, 3), (d, 4) \}$

เพราะว่า $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

$f^{-1}(X) = X$

$f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$

$f^{-1}(\{2\}) = \{ a, b \}$

$f^{-1}(\{ 1, 2 \}) = \{ a, b \}$

$f^{-1}(\{ 2, 3, 4 \}) = X$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X

แต่สมมุติ $f' = \{ (a, 1), (b, 2), (c, 4), (d, 3) \}$

จะเห็นว่า $f'^{-1}(\{ 2, 3, 4 \}) = \{ b, c, d \}$ ซึ่งไม่เป็นเซตเปิดใน X ■

ตัวอย่าง 3.30 จงแสดงว่าถ้าปริภูมิ (X, τ) เป็นปริภูมิไม่เต็มหน่วย (indiscrete space) และ (Y, τ') เป็นปริภูมิไม่เต็มหน่วยแล้ว $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ถ้า (Y, τ') ไม่เป็นปริภูมิไม่เต็มหน่วยแล้ว $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

วิธีทำ (1) $(X, \tau), (Y, \tau')$ เป็นปริภูมิไม่เต็มหน่วย

เซตเปิดใน Y มี 2 เซตคือ $\varnothing$, Y

$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

$f^{-1}(Y) = X$

เช่นเดียวกันเซตเปิดใน X มี 2 เซต คือ $\varnothing$, X

ดังนั้น f^{-1} ส่งเซตเปิดใน Y เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(2) (Y, τ') ไม่เป็นปริภูมิไม่เต็มหน่วย

ดังนั้นแสดงว่า ใน Y มีเซตเปิด G ซึ่ง $G \neq \varnothing$, $G \neq X$

$f^{-1}(G)$ เป็นเซตย่อยของ X แต่ไม่เป็นเซตเปิด

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ■

ทฤษฎีบท 3.22 กำหนดให้ $(X, \tau), (Y, \tau')$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ เซตปิด F ของ Y, $f^{-1}(F)$ เป็นเซตปิดของ X

พิสูจน์ (1) สมมุติ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ F เป็นเซตปิดของ Y

ดังนั้น $Y - F$ เป็นเซตเปิดใน Y

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น $f^{-1}(Y - F)$ เป็นเซตเปิดใน X

เพราะว่า $f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$

ดังนั้น $X - f^{-1}(F)$ เป็นเซตเปิดใน X

จะได้ว่า $f^{-1}(F)$ เป็นเซตปิดใน X

(2) สมมุติ แต่ละเซตย่อยปิด f ของ Y $f^{-1}(F)$ เป็นเซตย่อยปิดของ X

ให้ G เป็นเซตย่อยเปิดใด ๆ ของ Y

ดังนั้น $Y - G$ เป็นเซตย่อยปิดของ Y

จากสมมุติฐานจะได้ว่า $f^{-1}(Y - G)$ เป็นเซตปิดใน X

ดังนั้น $X - f^{-1}(G)$ เป็นเซตปิดใน X

จะได้ว่า $f^{-1}(G)$ เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ■

ทฤษฎีบท 3.23 กำหนดให้ (X, τ), (X, τ') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อทุกเซตย่อย A ของ X

$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

พิสูจน์ (1) สมมุติ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ $A \subseteq X$

เพราะว่า $A \subseteq f^{-1}(\, f(A)\,)$

และ $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$

ดังนั้น $A \subseteq f^{-1}(\, \overline{f(A)}\,)$

เพราะว่า $\overline{f(A)}$ เป็นเซตปิดใน Y และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

อาศัยทฤษฎีบท 3.22 จะได้ว่า $f^{-1}(\, \overline{f(A)}\,)$ เป็นเซตปิด

จากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า

$$\bar{A} \subseteq f^{-1}(\, f(\bar{A})\,)$$

ดังนั้น $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

(2) สมมุติ แต่ละเซตย่อย A ของ X $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

ต้องการแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ F เป็นเซตปิดใด ๆ ใน Y

ดังนั้น $f(\, \overline{f^{-1}(F)}\,) \subseteq \overline{f(\, f^{-1}(F)\,)}$

แต่ $\overline{f(\, f^{-1}(F)\,)} = \bar{F}$

แต่ F เป็นเซตปิด ดังนั้น $F = \overline{F}$

ดังนั้น $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq F$

$f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$

แต่ $f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$

ดังนั้น $f^{-1}(F) = f^{-1}(F)$

จะได้ว่า $f^{-1}(F)$ เป็นเซตปิดใน X

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ■

ในบางครั้งเราอาจกล่าวถึงฟังก์ชันต่อเนื่องในรูปของฐานเปิด และฐานย่อยเปิดได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.24 กำหนดให้ (X, τ) และ (Y, τ') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี
$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องก็ต่อเมื่อทุก ๆ $B \in \mathcal{B}$
เมื่อ $\mathcal{B}$ เป็นฐานเปิดของ Y แล้ว $f^{-1}(B)$ เป็นเซตย่อยเปิดของ X

พิสูจน์ (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด) ■

ทฤษฎีบท 3.25 กำหนดให้ (X, τ) และ (Y, τ') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี
$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องก็ต่อเมื่อทุก ๆ $B^* \in \mathcal{B}^*$ เมื่อ $\mathcal{B}^*$
เป็นฐานเปิดย่อยของ Y แล้ว $f^{-1}(B^*)$ เป็นเซตย่อยเปิดของ X

พิสูจน์ (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด) ■

มีฟังก์ชัน f ซึ่งส่งปริภูมิ (X, τ) ไปยัง (Y, τ') โดยที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก X ไปบน Y แล้วทั้ง f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เราเรียกฟังก์ชันพิเศษแบบนี้ว่าฟังก์ชันคล้ายแบบ (homeomorphism)

นิยาม 3.20 กำหนดให้ (X, τ) และ (Y, τ') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ถ้ามี

$f : (X, \tau) \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} (Y, \tau')$ และ f, f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว เรียก (X, τ), (Y, τ') ว่าเป็นปริภูมิคล้ายแบบกัน (homeomorphic) และเรียก f ว่า ฟังก์ชันคล้ายแบบ (homeomorphism).

ตัวอย่าง 3.31 กำหนดให้ $X = \{a, b, c\}$

$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$

$Y = \{1, 2, 3\}$

$\tau' = \{\varnothing, Y, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$

ให้ $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ โดยที่

$$f = \{ (a, 2), (b, 3), (c, 1) \}$$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก X ไปบน Y และทั้ง f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น (X, τ) และ (Y, τ') คล้ายแบบกัน

แบบฝึกหัด 3.7

1. กำหนดให้ $X = \{ a, b, c \}$

$$\tau = \{ \varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{ a, b \}, \{ a, b, c \} \}$$

$$Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$\tau' = \{ \varnothing, Y, \{1\}, \{2\}, \{ 1, 2 \}, \{ 2, 3, 4 \} \}$$

จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ ซึ่ง

(1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(2) f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

2. กำหนดให้ (X, τ) และ (Y, τ') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ โดยที่ $f(x) = c$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$

จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

3. กำหนดให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ โดยที่ $f(x) = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$

จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

4. จงพิสูจน์ว่าช่วงปิด [0, 1] และ [a, b] คล้ายแบบกัน