บทที่ 2
ปริภูมิเมตริก
Metric Space

ในการศึกษาปริภูมิเชิงโทโพโลยี (topological space) ถ้าศึกษาโดยตรงเลยทีเดียวอาจทำความเข้าใจได้ยาก แต่ถ้าได้ศึกษาปริภูมิเมตริกซึ่งเป็นตัวอย่างหนึ่งของปริภูมิเชิงโทโพโลยีทั่ว ๆ ไปก่อนแล้วจะทำให้เข้าใจปริภูมิเชิงโทโพโลยีได้ดียิ่งขึ้น ดังนั้นในตอนต้นของหนังสือเล่มนี้จะได้กล่าวถึงปริภูมิเมตริกเสียก่อน และค่อยกล่าวถึงปริภูมิเชิงโทโพโลยีภายหลัง

2.1 ปริภูมิเมตริก

Metric Space

กำหนด X เป็นเซตใด ๆ d เป็นฟังก์ชันซึ่งส่ง $X \times X$ ไปยัง R (เซตของจำนวนจริงทั้งหมด) และสำหรับ (x, y) ใด ๆ ซึ่งเป็นสมาชิกของ $X \times X$ แล้วเรียก d(x, y) ว่าระยะทางจาก x ไปยัง y

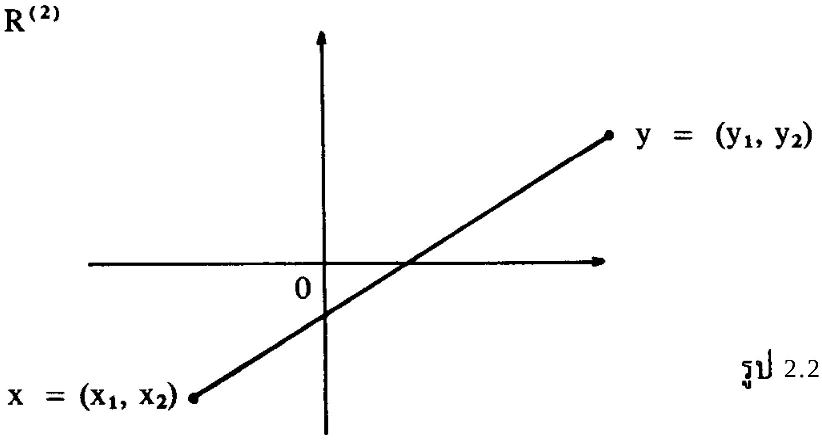
หมายเหตุ d(x, y) เป็นฟังก์ชันค่าจริง (real valued function)

ตัวอย่าง 2.1 ใน $R^{(1)}$

รูป 2.1

$$d(x, y) = \text{ระยะทางระหว่าง } x \text{ กับ } y$$
$$= |x - y|$$

ใน $R^{(2)}$



รูป 2.2

$$d(x, y) = \text{ระยะทางจากจุด } (x_1, x_2) \text{ ไปยัง } (y_1, y_2)$$
$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

ใน $R^{(3)}$ ถ้าให้ $x = (x_1, x_2, x_3)$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

ดังนั้น $d(x, y) = $ ระยะทางจากจุด (x_1, x_2, x_3) ไปยัง (y_1, y_2, y_3)

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \qquad \blacksquare$$

นิยาม 2.1 กำหนดให้ X เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $X \neq \varnothing$ และ d เป็นฟังก์ชันจาก $X \times X$ ไปยัง R (นั่นคือ $d : X \times X \rightarrow R$) แล้ว d เรียกว่า เมตริก (metric) บน X ก็ต่อเมื่อ d มีคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $d(x, y) \geqslant 0$

(2) $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

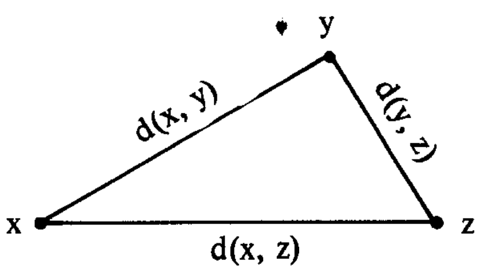
(3) $d(x, y) = d(y, x)$

(4) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in X$

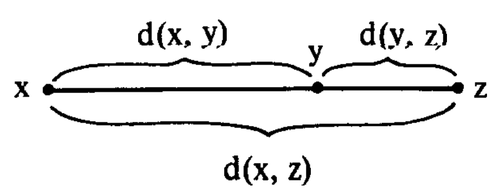
หมายเหตุ คุณสมบัติข้อ (3) เรียกคุณสมบัติสมมาตร ส่วนคุณสมบัติข้อ (4) เรียกคุณสมบัติอสมการอิงสามเหลี่ยม (triangle inequality)

คุณสมบัติอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมแสดงดังรูป 2.3

กำหนด x, y, z เป็นจุดบนระนาบ



(1)



(2)

รูป 2.3

กรณีที่ 1 $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$

กรณีที่ 2 $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$

นิยาม 2.2 กำหนดให้ X เป็นเซตใด ๆ $X \neq \varnothing$ และ d เป็นเมตริก นิยามบน X แล้วเรียกเซต X กับเมตริก d ว่าปริภูมิเมตริก (metric space) แทนด้วยสัญลักษณ์ (X, d)

จะเห็นว่าฟังก์ชัน d กำหนดให้ใช้กับคู่อันดับ (x, y) ซึ่ง x, y เป็นสมาชิกของเซต X เป็นฟังก์ชันค่าจริงและค่าไม่เป็นลบ นอกจากนี้ d(x, y) มีคุณสมบัติสมมาตร (symmetry) นั้นหมายความว่าระยะห่างระหว่าง x, y ไม่ได้ขึ้นอยู่กับอันดับ

สำหรับปริภูมิเมตริก (X, d) ในบางครั้งอาจแทนด้วยสัญลักษณ์ X ซึ่งการแทนด้วยสัญลักษณ์แบบนี้ไม่ได้ทำให้สับสนเพราะว่าเราต้องเข้าใจอยู่เสมอว่าต้องมีเมตริก d สำหรับเซต $X \neq \varnothing$ แต่อย่างไรก็ตามบนเซต X อาจมีเมตริกที่นิยามบน X ได้หลายแบบ ดังนั้นถ้าเมตริกที่นิยามบน X แตกต่างกันแล้วปริภูมิเมตริกที่เกิดขึ้นก็จะแตกต่างกันด้วย

ตัวอย่าง 2.2 กำหนดให้ $X \neq \varnothing$ เมตริกเต็มหน่วย (discrete metric)

$d : X \times X \rightarrow R$ นิยามโดย

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x = y \\ 1 & \text{เมื่อ } x \neq y \end{cases}$$

สำหรับทุก ๆ x, y ซึ่งเป็นสมาชิกของ X

จงแสดงว่า d เป็นเมตริกบน X

วิธีทำ การแสดงว่า d เป็นเมตริกบน X คือแสดงว่า d สอดคล้องกับคุณสมบัติทั้ง 4 ข้อในนิยาม

ให้ x, y, z เป็นสมาชิกของ X

(I) เพราะว่า $d(x, y) = 0$ เมื่อ $x = y$

และ $d(x, y) = 1 < 0$ เมื่อ $x \neq y$

ดังนั้นในทุก ๆ กรณีจะสรุปได้ว่า $d(x, y) \geqslant 0$

(2) จากนิยามของ d(x, y) ในตัวอย่างจะได้ว่า

$d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

(3) เพราะว่า ถ้า $x = y$ แล้ว $y = x$

ดังนั้น $d(x, y) = 0$ และ $d(y, x) = 0$

ถ้า $x \neq y$ แล้ว $y \neq x$

ดังนั้น $d(x, y) = 1$ และ $d(y, x) = 1$

เพราะฉะนั้น $d(x, y) = d(y, x)$

(4) แสดงว่าสอดคล้องกับคุณสมบัติ

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

ซึ่งแยกกรณีได้ดังนี้

4.1 $x = y = z$

ดังนั้น $d(x, z) = 0 = 0+0 = d(x, y) + d(y, z)$

4.2 $x = y$ แต่ $x \neq z, y \neq z$

ดังนั้น $d(x, z) = 1 = 0+1 = d(x, y) + d(y, z)$

4.3 $x \neq y, x \neq z$ แต่ $y = z$

ดังนั้น $d(x, z) = 1 = 1+0 = d(x, y) + d(y, z)$

4.4 $x \neq y, y \neq z$ แต่ $x = z$

ดังนั้น $d(x, z) = 0 < 1+1 = d(x, y) + d(y, z)$

4.5 $x \neq y, y \neq z$ และ $x \neq z$

ดังนั้น $d(x, z) = 1 < 1+1 = d(x, y) + d(y, z)$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ กรณีสรุปได้ว่า $d(x, z) \leqslant d(x,y)+d(y, z)$

เพราะฉะนั้น d เป็นเมตริกบน X ∎

ตัวอย่าง 2.3 กำหนดให้ $X = \mathbb{R}$ (เซตของจำนวนจริง)

$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$d(x, y) = |x - y|$$

จงแสดงว่า d เป็นเมตริกบน $\mathbb{R}$

(เมตริกที่นิยามในตัวอย่างเรียกว่า เมตริกปกติ (usual metric)

วิธีทำ ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(1) เพราะว่า $|x-y| \geqslant 0$

ดังนั้น $d(x, y) \geqslant 0$

(2) ถ้า $d(x, y) = 0$ ดังนั้น $|x-y| = 0$

จะได้ว่า $x-y = 0$ นั่นคือ $x = y$

ในทางกลับกัน ถ้า $x = y$ จะได้ $x-y = 0$

ดังนั้น $|x-y| = 0$ นั่นคือ $d(x, y) = 0$

(3) $d(x, y) = |x-y|$

$= |y-x|$

$= d(y, x)$

(4) $d(x, z) = | x-z |$

$$= | (x-y)+(y-z) |$$
$$\leqslant | x-y | + | y-z |$$
$$= d(x, y) + d(y, z)$$

แสดงว่า d เป็นเมตริกบน R ■

ตัวอย่าง 2.4 กำหนดให้ $X = C$ (เซตของจำนวนเชิงซ้อน)

$d : C \times C \rightarrow R$ นิยามโดย

$$d(z_1, z_2) = | z_1 - z_2 | \quad z_1, z_2 \in C$$

จงแสดงว่า d เป็นเมตริกบน C

วิธีทำ (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด)

จากตัวอย่าง 2.3 – 2.4 จะได้แนวความคิดต่อไปว่า ถ้า $X = R^n$ โดยที่ $R^n = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ ครั้ง}}$ และ d เป็นเมตริกบน R^n นิยามโดย

$$d(x, y) = \| x-y \|$$

โดยที่ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ เป็นสมาชิกของ R^n แล้วจะได้ว่า d เป็นเมตริกบน R^n ซึ่งเรียกว่าเมตริกปกติ (usual metric) บน R^n

ดังนั้น (R^n, d) เป็นปริภูมิเมตริก

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้ X = R”, x, y เป็นจุดใน R” โดยที่ x = (x,, x_2, ... x,) y = (y,, y_2, ... y_n) และ $d : R^n \times R^n \rightarrow R$ นิยามโดย

$$d(x, y) = \| x-y \|$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

แล้ว (R^n, d) เป็นปริภูมิเมตริก

พิสูจน์ (1) เพราะว่า $(x_i - y_i)^2 \geqslant 0$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_1)^2 \geqslant 0$

จะได้ $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \geqslant 0$

เพราะฉะนั้น $d(x, y) \geqslant 0$

(2) ต้องการแสดงว่า $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

2.1 สมมุติ $d(x, y) = 0$

ดังนั้น $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = 0$

เพราะฉะนั้น $(x_i - y_i)^2 = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$x_i = y_i$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

นั่นคือ $x = y$

2.2 สมมุติ $x = y$

เพราะฉะนั้น $x_i = y_i$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$(x_i - y_i)^2 = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = 0$

นั่นคือ $d(x, y) = 0$

(3) เนื่องจาก $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$

ดังนั้น $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$

นั่นคือ $d(x, y) = d(y, x)$

(4) ต้องการแสดงว่า $d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z)$

นั่นคือแสดงว่า

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} [\,(x_i - y_i) + (y_i - z_i)\,]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\,(x_i - y_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i) \\
&\qquad + (y_i - z_i)^2\,] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(y_i - z_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2
\end{aligned}$$

แต่โดยอาศัยทฤษฎีบทประกอบของชวาร์ซ (Schwarz's lemma) ได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-z_i) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(y_i-z_i)^2}\right)^2$$

ดังนั้น

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}$$

นั่นคือ $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

จาก (1) – (4) จะได้ว่า (R'', d) เป็นปริภูมิเมตริก ■

ตัวอย่าง 2.5 กำหนดให้ $X = R^2$ x, y เป็นจุดใน R^2 โดยที่ $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ และ $d : R^2 \times R^2 \rightarrow R$ นิยามโดย

$$d(x, y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

แล้วจงแสดงว่า (x, d) เป็นปริภูมิเมตริก

วิธีทำ ให้ $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ และ $z = (z_1, z_2)$ เป็นจุดใน R^2

(1) เพราะว่า $|x_1-y_1| \geqslant 0$, $|x_2-y_2| \geqslant 0$

ดังนั้น $\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \geqslant 0$

นั่นคือ $d(x, y) \geqslant 0$

(2) 1. สมมุติ $d(x, y) = 0$

ดังนั้น $\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} = 0$

$|x_1-y_1| = 0$ และ $|x_2-y_2| = 0$

$x_1-y_1 = 0$ และ $x_2-y_2 = 0$

$x_1 = y_1$ และ $x_2 = y_2$

ดังนั้น $(x_1, x2) = (y_1, y_2)$

นั่นคือ $x = y$

2. สมมุติ $x = y$

จะได้ว่า $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

ดังนั้น $x_1 = y_1$ และ $x_2 = y_2$

$|x_1 - y_1| = 0$ และ $|x_2 - y_2| = 0$

ดังนั้น $\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} = 0$

นั่นคือ $d(x, y) = 0$

(3) $d(x, y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

$= \max\{|-(y_1-x_1)|, |-(y_2-x_2)|\}$

$= \max\{|y_1-x_1|, |y_2-x_2|\}$

$= d(y, x)$

(4) $d(x, z) = \max\{|x_1-z_1|, |x_2-z_2|\}$

กรณีที่ 1 : ถ้า $\max\{|x_1-z_1|, |x_2-z_2|\} = |x_1-z_1|$

แต่ $|x_1-z_1| \leqslant |x_1-y_1| + |y_1-z_1|$

และ $|x_1-y_1| \leqslant \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

$= d(x, y)$

$|y_1-z_1| \leqslant \max\{|y_1-z_1|, |y_2-z_2|\}$

$= d(y, z)$

ดังนั้น $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

กรณีที่ 2 : ถ้า $\max\{|x_1-z_1|, |x_2-z_2|\} = |x_2-z_2|$

แต่ $|x_2-z_2| \leqslant |x_2-y_2| + |y_2-z_2|$

และ $|x_2-y_2| \leqslant \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

$= d(x, y)$

$|y_2-z_2| = \max\{|y_1-z_1|, |y_2-z_2|\}$

$= d(y, z)$

ดังนั้น $d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z)$

เพราะฉะนั้น (R^2, d) เป็นปริภูมิเมตริก ∎

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $x = \prod_{i=1}^{n} = \underbrace{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n}_{n \text{ ครั้ง}}$

และ (X_i, d_i) เป็นปริภูมิเมตริกสำหรับทุก ๆ ค่า $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ สำหรับ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $y = (y_1 y_2, \ldots y_n)$ เป็นสมาชิกของ X นิยามฟังก์ชัน d จาก $X \times X$ ไปยัง R โดย

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ d_i(x_i, y_i) \}$$

แล้วจะได้ว่า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

พิสูจน์ ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ และ $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ เป็นสมาชิกของ X

(1) เพราะว่า $d_i(x_i, y_i) \geq 0$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{ d_i(x_i, y_i) \} \geq 0$$

นั่นคือ $d(x, y) \geq 0$

(2) 1. สมมุติ $d(x, y) = 0$

ดังนั้น $\max_{1 \leq i \leq n} \{ d_i(x_i, y_i) \} = 0$

จะได้ว่า $d_i(x_i, y_i) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \ldots n$

$x_i = y_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$

เพราะฉะนั้น $x = y$

2. สมมุติ $x = y$

ดังนั้น $x_i = y_i$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots n$

$d_i(x_i, y_i) = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots n$

จะได้ว่า $\max_{1 \leq i \leq n} \{ d_i(x_i, y_i) \} = 0$

เพราะฉะนั้น $d(x,y) = 0$

จะสรุปได้ว่า $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

(3) เพราะว่า $d_i(x_i, y_i) = d_i(y_i, x_i)$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots n$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

(4) ให้ j, k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ d_i(x_i, y_i) \} = d_j(x_j, y_j)$$

$$d(y, z) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ d_i(y_i, z_i) \} = d_k(y_k, z_k)$$

สำหรับทุก ๆ ค่า i, $1 \leq i \leq n$

$$d_i(x_i, y_i) \leq d_j(x_j, y_j)$$

$$d_i(y_i, z_i) \leq d_k(y_k, z_k)$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า} \quad d_i(x_i, z_i) &\leqslant d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) \\ &\leqslant d_j(x_j, y_j) + d_k(y_k, z_k) \\ &= d(x, y) + d(y, z) \\ \text{ดังนั้น} \quad d(x, z) &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{ d_i(x_i, z_i) \} \\ &\leqslant d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก ■

หมายเหตุ สำหรับ $X = R^n$ และ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ถ้า $d : X \times X \rightarrow R$ โดยที่

$$d(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{ | x_i - y_i | \}$$

แล้ว (R^n, d) เป็นปริภูมิเมตริก

ตัวอย่าง 2.6 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงนิยามบนช่วงปิด $[0, 1]$ เรียก f ว่าฟังก์ชันที่มีขอบเขตก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง k ซึ่ง $| f(x) | \leqslant k$ สำหรับทุก ๆ $x \in [0, 1]$

ให้ f, g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีขอบเขตบนช่วง $[0, 1]$ และนิยามการบวก การลบของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (-f)(x) &= -f(x) \end{aligned}$$

สำหรับฟังก์ชันค่าคงตัว (constant function) ซึ่งส่งสมาชิกทุกตัวในช่วง $[0, 1]$ ไปยัง 0 เรียกว่าฟังก์ชันศูนย์ (zero function)

นั่นคือ $$0(x) = 0$$

และนิยามค่าประจำ (norm) ของฟักง์ชัน f โดย

$$\| f \| = \int_0^1 | f(x) | \, dx$$

สำหรับ X = เซตของฟังก์ชันค่าจริงและต่อเนื่องบน $[0, 1]$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $C[0, 1]$ และนิยาม $d : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow R$ โดย

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \| f - g \| \\ &= \int_0^1 | f(x) - g(x) | \, dx \end{aligned}$$

แล้วจงแสดงว่า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

วิธีทำ (1) เพราะว่า $|f(x)-g(x)| \geqslant 0$

ดังนั้น $\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \geqslant 0$

เพราะฉะนั้น $d(f, g) \geqslant 0$

(2) สมมุติ $d(f, g) = 0$

ดังนั้น $\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in [0, 1]$

จะได้ว่า $|f(x)-g(x)| = 0$

$f(x)-g(x) = 0$

$(f-g)(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in [0, 1]$

$f-g = 0$

$f = g$

สมมุติ $f = g$

ดังนั้น $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in [0, 1]$

$|f(x)-g(x)| = 0$

ดังนั้น $\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx = 0$

นั่นคือ $d(f, g) = 0$

(3) เพราะว่า $|f(x)-g(x)| = |g(x)-f(x)|$

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx = \int_0^1 |g(x)-f(x)|\,dx$

$d(f, g) = d(g, f)$

(4) ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีขอบเขตบน [0, 1]

$$\begin{aligned} d(f, h) &= \int_0^1 |f(x)-h(x)|\,dx \\ &= \int_0^1 |(f(x)-g(x)) + (g(x)-h(x))|\,dx \\ &\leqslant \int_0^1 (|f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|)\,dx \\ &= \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x)-h(x)|\,dx \\ &= d(f, g) + d(g, h) \end{aligned}$$

นั่นคือ $d(f, h) \leqslant d(f, g) + d(g, h)$

ดังนั้น (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก ∎

หมายเหตุ ปริภูมิเมตริกซึ่งเกิดจากเมตริกที่แตกต่างกัน ย่อมแตกต่างกัน ตัวอย่างเช่น

ให้ $X = R^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

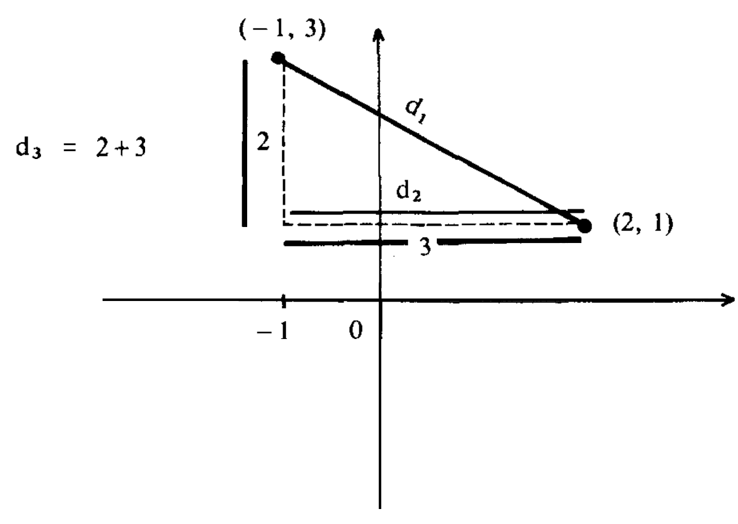
$$d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_2(x, y) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \}$$

$$d_3(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

เพราะว่า d_1, d_2, d_3 เป็นเมตริกดังนั้นจะได้ว่า (R^2, d_1), (R^2, d_2), (R^2, d_3) เป็นปริภูมิเมตริก แต่เป็นปริภูมิเมตริกที่แตกต่างกัน เช่น กำหนดจุด 2 จุดในปริภูมิ คือ $(-1, 3)$, $(2, 1)$

$$d_1((-1, 3), (2, 1)) = \sqrt{9+4}$$
$$= \sqrt{13}$$
$$d_2((-1, 3), (2, 1)) = \max \{ |-3|, |2| \}$$
$$= 3$$
$$d_3((-1, 3), (2, 1)) = |-3| + |2|$$
$$= 5$$



รูป 2.4

นิยาม 2.3 สำหรับปริภูมิเมตริก (X, d) ถ้า $Y \subseteq X$, $Y \neq \varnothing$ และ (Y, d) เป็นปริภูมิเมตริก แล้วเรียก Y ว่าเป็นปริภูมิย่อย (subspace) ของ X

นิยาม 2.4 กำหนดให้ X เป็นเซตใด ๆ , $X \neq \varnothing$ d เป็นฟังก์ชันจาก $X \times X$ ไปยัง R แล้ว d เรียกว่า เมตริกเทียม (pseudometric) ก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $d(x, y) \geqslant 0$

(2) $d(x, x) = 0$

(3) $d(x, y) = d(y, x)$

(4) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in X$

ข้อแตกต่างระหว่างเมตริกกับเมตริกเทียมคือคุณสมบัติในข้อ (2) คุณสมบัติข้อ (2) ของเมตริกกล่าวว่า $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ ซึ่งหมายความว่า ถ้า $d(x, y) = 0$ แล้ว $x = y$ และ ถ้า $x = y$ แล้ว $d(x, y) = 0$ ส่วนคุณสมบัติข้อ (2) ของเมตริกเทียมหมายความว่า ถ้า $x = y$ แล้ว $d(x, y) = 0$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.7 ตัวอย่างของเมตริกเทียม (pseudometric)

ให้ X = เซตของลำดับลู่เข้า (convergence sequence) ของจำนวนจริง

ให้ $(x_n), (y_n)$ เป็นสมาชิกของ X

นิยาม $d : X \times X \rightarrow R$ โดย

$$d\big((x_n), (y_n) \big) = \lim_{n \to \infty} | x_n - y_n |$$

จะได้ว่า d เป็นเมตริกเทียม แต่ไม่เป็นเมตริกเพราะว่า $d(x, y) = 0$ ไม่จำเป็นที่ $x = y$ ดังตัวอย่างเช่น

$$(x_n) = (1, 1, 1, \ldots)$$

$$(y_n) = \left(1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \ldots \right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{n} \right)$$

$$| x_n - y_n | = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} | x_n - y_n | = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$$

$$= 0$$

นั่นคือ $d\,(\,(x_n), (y_n)\,) = 0$ แต่ $(x_n) \neq (y_n)$ ■

แบบฝึกหัด 2.1

1. กำหนดให้ d เป็นฟังก์ชันนิยามจาก $R \times R$ ไปยัง R โดยที่ $d(x, y) = |2x - y|$ และ $x, y \in R$ แล้ว (R, d) เป็นปริภูมิเมตริกหรือไม่
2. กำหนดให้ $d: R \times R \rightarrow R$ นิยามโดย

$$d(x, y) = |3x - 3y|$$

สำหรับ x, y ซึ่งเป็นสมาชิกของ R แล้วจงพิจารณาดูว่า (R, d) เป็นปริภูมิเมตริกหรือไม่

3. กำหนดให้ $d: R^2 \times R^2 \rightarrow R$ นิยามโดย

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

โดยที่ $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ เป็นสมาชิกของ R^2

จงแสดงว่า d เป็นเมตริก

4. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกและ k เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ นิยาม d_k จาก $X \times X$ ไปยัง R โดยที่สำหรับ x, y ซึ่งเป็นสมาชิกของ X

$$d_k(x, y) = kd(x, y)$$

จงแสดงว่า (X, d_k) เป็นปริภูมิเมตริก

5. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก แล้วนิยาม d^* จาก $X \times X$ ไปยัง R โดยที่สำหรับ x, y ทุก ๆ ตัวใน X

$$d^*(x, y) = \min \{ 1, d(x, y) \}$$

จงแสดงว่า d^* เป็นเมตริก

6. ในปริภูมิเมตริก (X, d) จงพิสูจน์ว่า $|d(x, y) - d(y, z)| \leqslant d(x, z)$ สำหรับทุก ๆ x, y และ z ซึ่งเป็นสมาชิกของ X
7. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก ถ้านิยามฟังก์ชัน d' ดังนี้ สำหรับสมาชิก x, y ทุก ๆ ตัวใน X

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

จงพิสูจน์ว่า (X, d') เป็นปริภูมิเมตริก

8. กำหนดให้ X = C (เซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด) และ d เป็นเมตริกปกติบน C แล้วจงแสดงว่า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก
9. กำหนดให้ $X \neq \varnothing$ และ $d: X \times X \rightarrow R$ โดยที่ d สอดคล้องกับคุณสมบัติ

(1) $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

(2) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$

แล้วจงแสดงว่า d เป็นเมตริกบน X

10. กำหนดให้ X = เซตของฟังก์ชันค่าจริงซึ่งต่อเนื่องและมีขอบเขตบน $[0, 1]$ และนิยาม

$$\| f \| = \sup \{ \, | f(x) | \mid x \in [0, 1] \, \}$$

และ

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \| f - g \| \\ &= \sup \{ \, | f(x) - g(x) | \mid x \in [0, 1] \, \} \end{aligned}$$

แล้วจงแสดงว่า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

2.2 เซตเปิด
Open Set

นิยาม 2.5 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $x_o \in X$ และ r เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ทรงกลมเปิด (open sphere, open ball) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ x_o และรัศมีเท่ากับ r แทนด้วย $S(x_o; r)$ หรือ $B(x_o; r)$ นิยามโดย

$$S(x_o; r) = \{ \, x \mid x \in X, \; d(x, x_o) < r \, \}$$

จะเห็นได้ว่า $S(x_o; r)$ เป็นเซตย่อยของ X และนอกจากนั้นจะได้ว่า $S(x_o; r)$ ไม่มีทางเป็นเซตว่างได้เลย เพราะว่าอย่างน้อยต้องมีสมาชิกคือจุดศูนย์กลางอยู่เสมอ

หมายเหตุ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนทรงกลมเปิดในบางตำราใช้ $S_r(x_o)$, $B_r(x_o)$ แทน
พิจารณาตัวอย่างทรงกลมเปิดต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.8 จากตัวอย่าง 2.2 ให้ X เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $X \neq \varnothing$ และ d เป็นเมตริกเต็มหน่วย (discrete metric) นิยามโดย

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x = y \\ 1 & \text{ถ้า } x \neq y \end{cases}$$

สำหรับทุก ๆ สมาชิก x, y ของ X

พิจารณา $S(x_o; r)$ สำหรับเมตริกเต็มหน่วย d

เพราะว่า $S(x_o; r) = \{ \, x \mid d(x, x_o) < r \, \}$

กรณีที่ 1 ถ้า $r \leqslant 1$

จะได้ $d(x, x_o) < 1$

นั่นคือ $d(x, x_o) = 0$ (มีเพียงกรณีเดียวเท่านั้น)

จะได้ $x = x_o$

เพราะฉะนั้น $S(x_o, r) = \{ x_o \}$

กรณีที่ 2 ถ้า $r > 1$

จะได้ $d(x, x_o)$ น้อยกว่าจำนวนจริงที่มากกว่า 1

ดังนั้น $d(x, x_o) = 1$ หรือ $d(x, x_o) = 0$

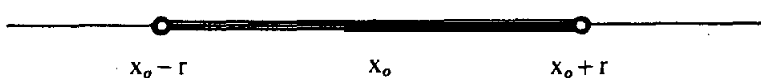
จะได้ $x \neq x_o$ หรือ $x = x_o$

เพราะฉะนั้น $S(x_o, r) = X$ ■

ตัวอย่าง 2.9 กำหนดให้ (R, d) เป็นปริภูมิเมตริก โดยที่ d เป็นเมตริกปกติ (usual metric) พิจารณาทรงกลมเปิดใน (R, d)

$$\begin{aligned} S(x_o; r) &= \{ x \in R \mid d(x, x_o) < r \} \\ &= \{ x \in R \mid |x - x_o| < r \} \\ &= \{ x \in R \mid -r < x - x_o < x \} \\ &= \{ x \in R \mid x_o - r < x < x_o + r \} \\ &= (x_o - r,\ x_o + r) \end{aligned}$$

นั่นคือ $S(x_o; r)$ ใน (R, d) คือช่วงเปิด $(x_o - r, x_o + r)$ ซึ่งมีจุด x_o เป็นจุดศูนย์กลาง และความยาวช่วงเท่ากับ 2r ดังรูป 2.5



รูป 2.5 ■

จากตัวอย่าง 2.9 พบว่าทรงกลมเปิดบนเส้นจำนวนจริง คือช่วงเปิดที่มีขอบเขตจำกัด และในทางกลับกันช่วงเปิดที่มีขอบเขตจำกัดบนเส้นจำนวนจริงเป็นทรงกลมเปิด

จากแนวความคิดของตัวอย่าง 2.9 เราขยายแนวความคิดออกไปสำหรับ $X = R^2$ และ d เป็นเมตริกที่เคยนิยามมาแล้วจากหัวข้อ 2.1 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.10 กำหนดให้ $X = R^2$ พิจารณาเมตริกต่อไปนี้

(1) $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

(2) $d_2(x, y) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \}$

(3) $d_3(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

พิจารณาทรงกลมเปิดใน R^2 สำหรับเมตริก d_1, d_2 และ d_3 ดังนี้

ในที่นี้จะพิจารณา $S((0, 0); 1)$ ใน (R^2, d_1), (R^2, d_2) และ (R^2, d_3) ตามลำดับ

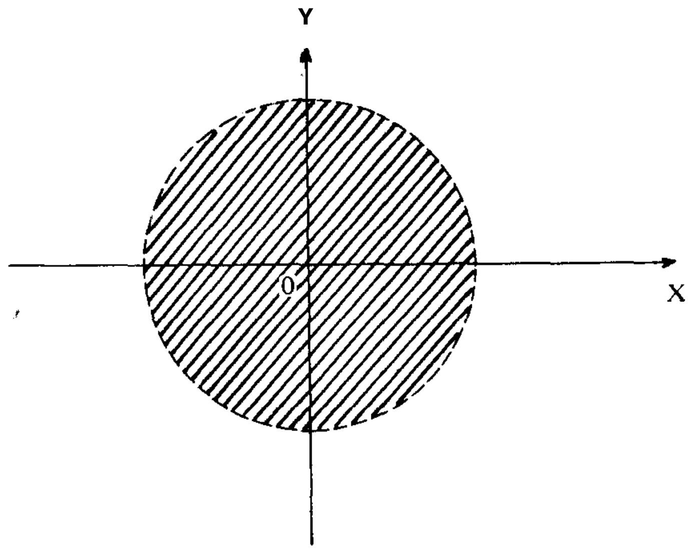
(1) $S((0, 0); 1)$ ใน (R^2, d_1)

เพราะว่า $S((0,0); 1) = \{ (x, y) \in R^2 \mid d_1((x, y), (0, 0)) < 1 \}$

$= \{ (x, y) \in R^2 \mid \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < 1 \}$

$= \{ (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$

เพราะฉะนั้น $S((0, 0); 1)$ เป็นทรงกลมเปิด จุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ และมีรัศมีเท่ากับ 1 ดังรูป 2.6



รูป 2.6

จะเห็นว่าเป็นจุดภายในวงกลมไม่รวมจุดบนขอบ

(2) $S((0, 0); 1)$ ใน (R^2, d_2)

เพราะว่า $S((0,0); 1) = \{ (x, y) \in R^2 \mid d_2((x, y), (0, 0)) < 1 \}$

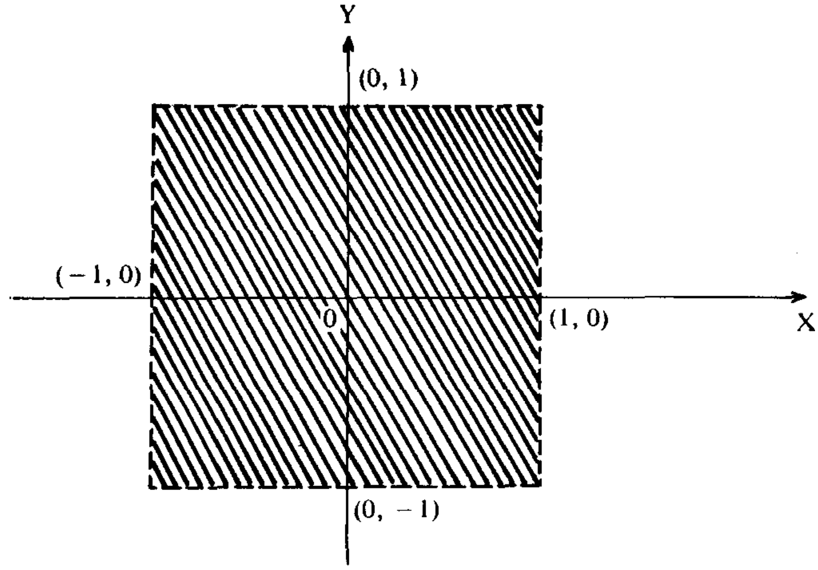
$= \{ (x, y) \in R^2 \mid \max \{ |x-0|, |y-0| \} < 1 \}$

$= \{ (x, y) \in R^2 \mid \max \{ |x|, |y| \} < 1 \}$

$= \{ (x, y) \in R^2 \mid |x| < 1$ และ $|y| < 1 \}$

$= \{ (x, y) \in R^2 \mid -1 < x < 1$ และ $-1 < y < 1 \}$

แสดงได้ดังรูป 2.7



รูป 2.7

จะเห็นว่าเป็นจุดภายในรูปสี่เหลี่ยมเปิด ไม่รวมขอบของรูปสี่เหลี่ยม

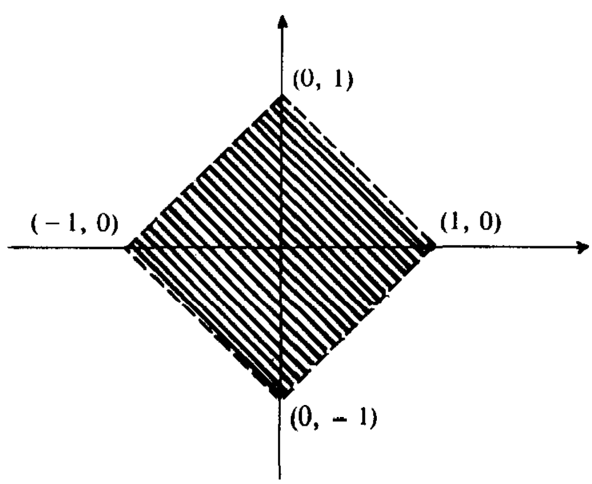
(3) $S(\ (0,0);\ 1\ )$ ใน (R^2, d_3)

เพราะว่า $S(\ (0,0);1) = \{\ (x,y) \in R^2 \mid d_3(\ (x,y),(0,0)\ ) < 1\ \}$

$= \{\ (x,y) \in R^2 \mid |\,x-0\,| + |\,y-0\,| < 1\ \}$

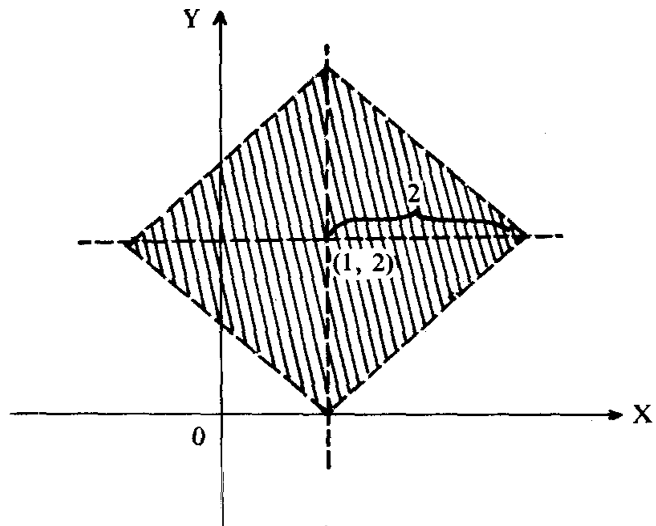
$= \{\ (x,y) \in R^2 \mid |\,x\,| + |\,y\,| < 1\ \}$

แสดงได้ดังรูป 2.8



รูป 2.8 ■

หมายเหตุ เมื่อจุดศูนย์กลางไม่ใช่ (0, 0) และรัศมีไม่เท่ากับ 1 ก็สามารถเขียนรูปทรงกลมเปิดได้เช่นเดียวกันโดยอาศัยแนวความคิดของการย้ายแกน เช่น ต้องการ $S((1, 2); 2)$ ใน (R^2, d_3) จะแสดงได้ดังรูป 2.๙



รูป 2.๙

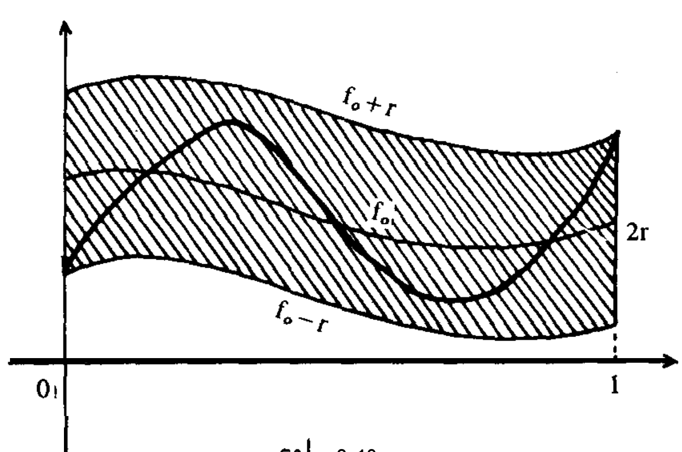
ตัวอย่าง 2.11 กำหนดให้ (C[0, 1], d) เป็นปริภูมิเมตริก โดยที่นิยามเมตริก d บน C[0, 1] ดังนี้

$$d(f, g) = \| f-g \|$$
$$= \sup \{ | f(x) - g(x) | \mid x \in [0, 1] \}$$

พิจารณา $S(f_o; r) = \{ f \in C[0, 1] \mid d(f, f_o) < r \}$

$$= \{ f \in C[0, 1] \mid \sup \{ | f(x) - g(x) | \mid x \in [0, 1] \} < r \}$$

ซึ่งแสดงได้ดังรูป 2.10



รูป 2.10 ■

จากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ทรงกลมเปิดบนเซตเดียวกันจะมีรูปร่างแตกต่างกันออกไป ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับเมตริก d ที่กำหนดให้

จากนิยามของทรงกลมเปิด จะนำมานิยามเซตเปิด (open sets) ได้ดังนี้

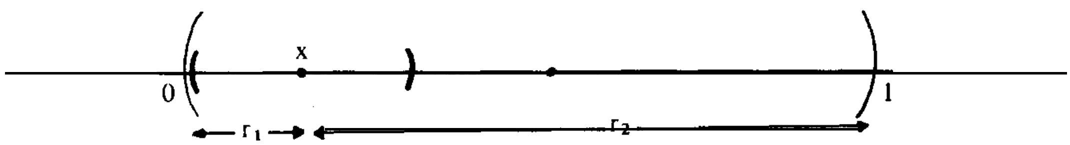
นิยาม 2.6 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ G เป็นเซตย่อยของ X เรียก G ว่าเซตเปิด (open sets) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $x \in G$ จะมีจำนวนจริงบวก r ซึ่ง $S(x; r) \subseteq G$

จากนิยาม 2.6 อาจกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า G เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อทุก ๆ จุดใน G เป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลมเปิดบางอันที่บรรจุใน G

ตัวอย่าง 2.12 ในปริภูมิเมตริก (R, d) เมื่อ d เป็นเมตริกปกติ จะได้ว่า (0, 1) เป็นเซตเปิด

ในการพิสูจน์ว่า (0, 1) เป็นเซตเปิดทำการพิสูจน์ได้โดยอาศัยนิยามของเซตเปิด คือ เมื่อกำหนดจุดใน (0, 1) แล้วต้องหา $r > 0$ ซึ่งทำให้ทรงกลมเปิดจุดศูนย์กลางที่จุดนั้น รัศมี r เป็นเซตย่อยของ (0, 1)

พิจารณาช่วง (0, 1)



รูป 2.11

จากรูป $x \in (0, 1)$ กำหนดระยะทางจาก 0 ไปยัง x และจาก x ไปยัง 1 ในรูป r_1, r_2 ตามลำดับ และพบว่า ถ้า $r_1 < r_2$ แล้วทรงกลมเปิด S(x, r) ต้องใช้ $r = r_1$ จึงจะทำให้ $S(x; r) \subseteq (0, 1)$ ได้ แต่ถ้าใช้ $r = r_2$ แล้ว $S(x; r) \nsubseteq (0, 1)$

พิสูจน์ ให้ $x \in (0, 1)$

เลือก $r = \min \{ |x|, |1-x| \}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $S(x, r) \subseteq (0, 1)$

ให้ $y \in S(x, r)$

ดังนั้น $|y-x| < r$

จะได้ $|y-x| < r \leqslant |x| = x$ .....(1)

และ $|y-x| < r \leqslant |1-x| = 1 - x$ .....(2)

จาก (1) จะได้ $-x < y-x < x$

$0 < y < 2x < 2$ .....(3)

จาก (2) จะได้ $-1+x < y-x < 1-x$

$$-1 < -1+2x < y < 1 \qquad \ldots\ldots (4)$$

ค่า y ที่สอดคล้องกับ (3) และ (4) คือ

$$0 < y < 1$$

นั่นคือ $y \in (0, 1)$

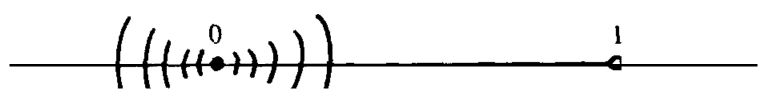
เพราะฉะนั้น $S(x; r) \subseteq (0, 1)$

จะได้ว่า (0, 1) เป็นเซตเปิด ■

การแสดงว่า G ไม่ใช่เซตเปิดได้จากการนิเสธ (negation) นิยามของเซตเปิด ซึ่งจะได้ดังนี้ คือ

"G ไม่ใช่เซตเปิดก็ต่อเมื่อมี $x \in G$ ซึ่งทุก ๆ $r > 0$ $S(x, r) \not\subseteq G$"

ตัวอย่างเช่น [0, 1) ไม่ใช่เซตเปิดเพราะว่ามี $0 \in [0, 1)$ ซึ่งทุก ๆ $r > 0$ $S(0; r) \not\subseteq [0, 1)$



รูป 2.12

หมายเหตุ เซตเปิดบนเส้นจำนวนได้แก่เซตที่อยู่ในรูป (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่าง 2.13 กำหนดให้ (R^2, d) เป็นปริภูมิเมตริกโดยที่ d เป็นเมตริกปกติ

ดังนั้น $S(x; r)$ เป็นเซตเปิด เช่น $S((0, 0); 1)$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } S((0,0); r) &= \{ (x_1, x_2) \mid \| (x_1, x_2) - (0, 0) \| < 1 \} \\ &= \{ (x_1, x_2) \mid \sqrt{(x_1-0)^2+(x_2-0)^2} < 1 \} \\ &= \{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \} \end{aligned}$$

คือเซตของวงกลมเปิดในระนาบ

แต่เซต $\{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \}$ ไม่ใช่เซตเปิด ■

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า ทรงกลมเปิดเป็นเซตเปิด ดังนั้นจึงสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3 ในปริภูมิเมตริกใด ๆ ทรงกลมเปิด เป็นเซตเปิด

นั่นคือ $S(x; r)$ เป็นเซตเปิดสำหรับทุก ๆ $x \in X$, $r > 0$

พิสูจน์ ให้ $S(x; r)$ เป็นทรงกลมเปิดใน X

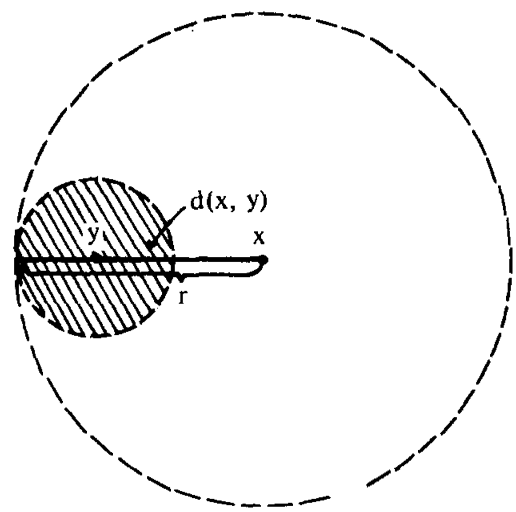
ต้องการแสดงว่า $S(x; r)$ เป็นเซตเปิด

ให้ $y \in S(x; r)$

$d(x, y) < r$

$r-d(x, y) > 0$

เลือก $r' = r-d(x, y)$



รูป 2.13

ต้องการแสดงว่า $S(y; r') \subseteq S(x; r)$

ให้ $z \in S(y; r')$

เพราะฉะนั้น $d(y, z) < r'$

พิจารณา $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

$< d(x, y) + r'$

$= d(x, y) + r - d(x, y)$

$= r$

$z \in S(x; r)$

นั่นคือ $S(y; r') \subseteq S(x; r)$

เพราะฉะนั้น $S(x; r)$ เป็นเซตเปิด ∎

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ (x, d) เป็นปริภูมิเมตริก แล้ว

(1) $\varnothing$ เป็นเซตเปิด

(2) X เป็นเซตเปิด

พิสูจน์ (1) สมมุติ $\varnothing$ ไม่ใช่เซตเปิด

ดังนั้น จะมี $x \in \varnothing$ ซึ่งทุก ๆ $r > 0$ $S(x; r) \subsetneq \varnothing$

เกิดข้อขัดแย้ง (contradiction)

เพราะฉะนั้น $\varnothing$ เป็นเซตเปิด

(2) เพราะว่า X เซตปริภูมิซึ่งเป็นเซตที่ใหญ่ที่สุดแล้ว

ดังนั้น ทุก ๆ $x \in X$ จะมี $r > 0$ ซึ่ง $S(x; r) \subseteq X$ เสมอ

เพราะฉะนั้น X เป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นการกล่าวถึงเซตเปิดในพจน์ของทรงกลมเปิด ■

ทฤษฎีบท 2.5 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $G \subseteq X$ แล้ว G เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อ G เป็นผลผนวกของทรงกลมเปิดที่มีจุดศูนย์กลางใน G

นั่นคือ G เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อ $G = \bigcup_{x \in G} S(x; r_x)$

พิสูจน์ ($\rightarrow$) สมมุติ G เป็นเซตเปิด

ต้องการแสดงว่า G เขียนได้ในรูปผลผนวกของทรงกลมเปิด

กรณีที่ 1 ถ้า $G = \varnothing$ ดังนั้น

$$G = \bigcup \varnothing$$

กรณีที่ 2 ถ้า $G \neq \varnothing$

ให้ $x \in G$

จะมี $r_x > 0$ ซึ่ง $S(x; r_x) \subseteq G$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{x \in G} S(x; r_x) \subseteq G$

แต่ทุก ๆ $x \in G$, $x \in S(x, r_x)$

ดังนั้น $G \subseteq \bigcup_{x \in G} S(x; r_x)$

เพราะฉะนั้น $G = \bigcup_{x \in G} S(x; r_x)$

($\leftarrow$) สมมุติ G เป็นผลผนวกของทรงกลมเปิด

กรณีที่ 1 ถ้า $G = \varnothing$

จากทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า G เป็นเซตเปิด

กรณีที่ 2 ถ้า $G \neq \varnothing$

ให้ $x \in G$

ดังนั้นจะมี $S(x_o; r)$ ซึ่ง $x \in S(x_o; r) \subseteq G$

แต่จากทฤษฎีบท 2.3 $S(x_o; r)$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี $r' > 0$ ซึ่ง $x \in S(x; r') \subseteq S(x_o; r)$

เพราะฉะนั้น $x \in S(x; r') \subseteq G$

ดังนั้น G เป็นเซตเปิด ■

นอกจากทฤษฎีบทดังกล่าวข้างต้นแล้ว โดยอาศัยพีชคณิตของเซต สำหรับเซตเปิดจะได้ข้อสรุปดังทฤษฎีบทข้างล่างนี้

ทฤษฎีบท 2.6 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก แล้วจะได้ว่า

(1) ผลร่วมจำกัดของเซตเปิดเป็นเซตเปิด

นั่นคือ ถ้า $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นเซตเปิดแล้ว $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ เป็นเซตเปิด

(2) ผลผนวกใด ๆ ของเซตเปิดเป็นเซตเปิด

นั่นคือ ถ้า G_i เป็นเซตเปิดสำหรับทุก ๆ i ใน J จะได้ว่า $\bigcup_{i \in J} G_i$ เป็นเซตเปิด

พิสูจน์ (1) ให้ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นเซตเปิด

ต้องการแสดงว่า $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$

เพราะฉะนั้น $x \in G_i$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้นจะมี $r_i > 0$ ซึ่ง

$$x \in S(x; r_i) \subseteq G_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

เลือก $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$

จะได้ว่า $r \leqslant r_i$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น $S(x, r) \subseteq S(x; r_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

เพราะฉะนั้น $S(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} S(x; r_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i$

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ เป็นเซตเปิด

(2) ให้ G_i เป็นเซตเปิดสำหรับทุก ๆ ค่า $i \in J$
ต้องการแสดงว่า $\bigcup_{i \in J} G_i$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in \bigcup_{i \in J} G_i$
เพราะฉะนั้นจะมี $i_o \in J$ ซึ่ง $x \in G_{i_o}$
แต่ G_{i_o} เป็นเซตเปิด
ดังนั้นจะมี $r > 0$ ซึ่ง $S(x, r) \subseteq G_{i_o}$
แต่ $G_{i_o} \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$
จะได้ว่า $S(x, r) \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$
เพราะฉะนั้น $\bigcup_{i \in J} G_i$ เป็นเซตเปิด ■

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 2.6 (1) พบว่าทฤษฎีบทกล่าวเพียงว่า ผลร่วมจำกัด (finite intersection) ของเซตเปิดเป็นเซตเปิดเท่านั้น แต่ถ้าเป็นผลร่วมอนันต์ (infinite intersection) ผลสรุปจะไม่เป็นไปตามทฤษฎีบทดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง เช่น ในปริภูมิเมตริก (R, d), d เป็นเมตริกปกติ

ให้
$$G_1 = (-1, 1)$$
$$G_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$G_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
. . . .
. . . .
. . . .
$$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

แล้ว $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{ 0 \}$ ซึ่งไม่ใช่เซตเปิด

หมายเหตุ เซตบางเซตอาจเป็นเซตเปิดเมื่อเทียบกับเมตริกหนึ่ง แต่ไม่เป็นเซตเปิดเมื่อเทียบกับอีกเมตริกหนึ่ง เช่น

ให้ $X = R$

d = เมตริกปกติ (usual metric)

d' = เมตริกเต็มหน่วย (discrete metric)

$S(x; 1) = \{ x \}$ เมื่อเทียบกับ d'

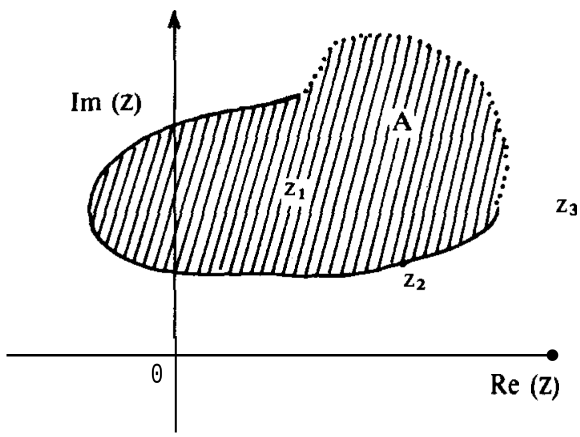
$S(x; 1) = \{ y \mid d(x, y) < 1 \}$ เป็นช่วงเปิดเมื่อเทียบกับ d

แต่ $\{ x \}$ เป็นเซตเปิดเมื่อเทียบกับ d' แต่ไม่ใช่เซตเปิดเมื่อเทียบกับ d

กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกใด ๆ

ให้ $A \subseteq X$

พิจารณา $x \in X$ พบว่า x อาจอยู่ใน A อยู่ข้างนอก A หรืออยู่บนขอบของ A ดังรูป 2.14 เมื่อพิจารณา $A \subseteq C$ (จำนวนเชิงซ้อน)



รูป 2.14

ซึ่งจะได้นิยามจุดข้างใน (interior points) จุดข้างนอก (exterior points) และจุดขอบ (boun--dary point) ของเซต A ดังต่อไปนี้

นิยาม 2.7 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $A \subseteq X$ จุด $x \in A$ เรียกว่าจุดข้างใน (interior points) ของ A ก็ต่อเมื่อ มีทรงกลมเปิดซึ่งเป็นเซตย่อยของ A และ x เป็นจุดศูนย์กลาง

เซตของจุดข้างในทั้งหมดของ A แทนด้วยสัญลักษณ์

$$\text{Int}(A)$$

ดังนั้น $\text{Int}(A) = \{ x \mid x \in A, S(x, r) \subseteq A$ สำหรับ $r > 0$ บางตัว $\}$

นิยาม 2.8 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $A \subseteq X$ จุด $x \in X$ เรียกว่าจุดข้างนอก (exterior points) ของ A ก็ต่อเมื่อ x เป็นจุดข้างในของ $X - A$
เซตของจุดข้างนอกทั้งหมดของ A แทนด้วยสัญลักษณ์

$$\text{Ext}(A)$$

นั่นคือ $\text{Ext}(A) = \{ x \mid x \in X, S(x, r) \subseteq X - A$ สำหรับ $r > 0$ บางตัว $\}$

นิยาม 2.9 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $A \subseteq X$ จุด $x \in X$ เรียกว่าจุดขอบ (boundary points) ของ A ก็ต่อเมื่อ x ไม่เป็นจุดข้างใน และ x ไม่เป็นจุดข้างนอกของ A
เซตของจุดขอบทั้งหมดของ A แทนด้วยสัญลักษณ์

$$\text{Bd}(A)$$

ตัวอย่าง 2.14 กำหนดให้ (C, d) เป็นปริภูมิเมตริก มี d เป็นเมตริกปกติ
ให้ $A = \{ z \mid 1 < |z| \leqslant 4 \}$ แล้วจะได้ว่า

(1) $\text{Int}(A) = \{ z \mid 1 < |z| < 4 \}$

(2) $\text{Ext}(A) = C - \{ z \mid 1 \leqslant |z| \leqslant 4 \}$

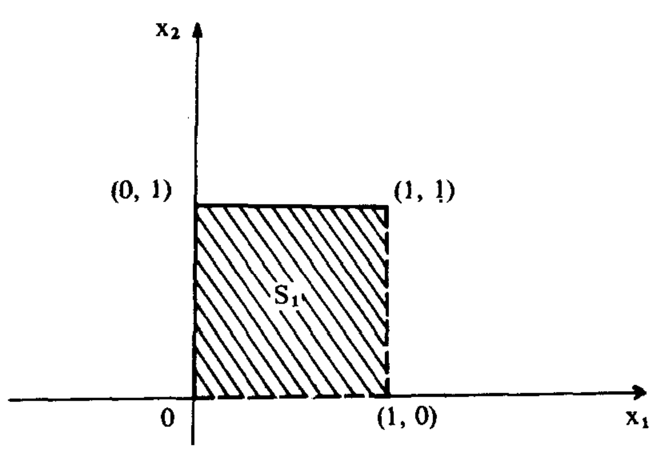
(3) $\text{Bd}(A) = \{ z \mid |z| = 1, |z| = 4 \}$ ■

ตัวอย่าง 2.15 สำหรับ (R^2, d) ซึ่งเป็นปริภูมิเมตริก มี d เป็นเมตริกปกติ
กำหนดให้ $S_1 = \{ (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 < 1, 0 < x_2 \leqslant 1 \}$

$S_2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$ และ $x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$

จงเขียนรูปของ S_1, S_2 พร้อมทั้งบอกจุดข้างใน จุดข้างนอก และจุดขอบของ S_1, S_2 ด้วย

วิธีทำ $S_1 = \{ (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 < 1, 0 < x_2 \leqslant 1 \}$



รูป 2.15

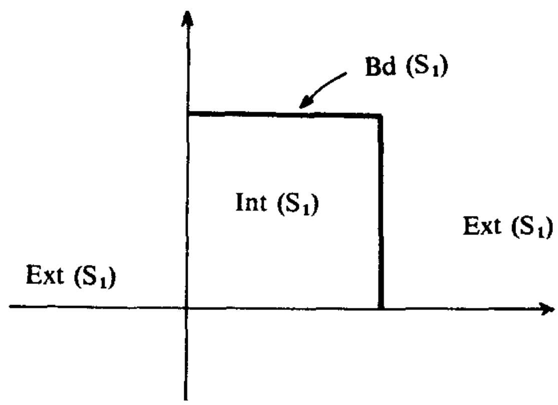
จุดข้างในของ S_1 คือจุดภายในรูปสี่เหลี่ยมซึ่งไม่รวมขอบ

นั่นคือ $\text{Int}(S_1) = \{ (x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \}$

จุดข้างนอกของ S_1 คือจุดภายนอกรูปสี่เหลี่ยมซึ่งไม่รวมขอบ

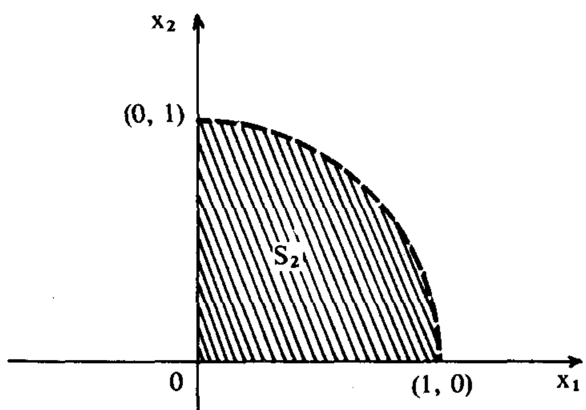
นั่นคือ $\text{Ext}(S_1) = R^2 - \{ (x_1, x_2 \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 \}$

จุดขอบของ S_1 คือจุดทั้งหลายบนด้านของรูปสี่เหลี่ยม



รูป 2.16

$S_2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$ และ $x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$ แสดงได้ดังรูป 2.17



รูป 2.17

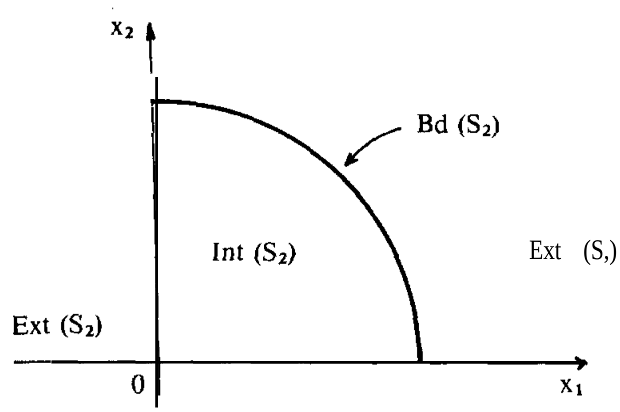
ซึ่งจะได้ว่า จุดข้างในของ S_2 คือจุดภายในรูปไม่รวมขอบ

$$\text{Int}(S_2) = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$$

จุดข้างนอกของ S_2 คือ จุดภายนอกรูปไม่รวมขอบ

$$\text{Ext}(S_2) = R^2 - \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1 \}$$

สำหรับจุดขอบได้แก่จุดบนขอบทั้งหมดของรูป S_2



รูป 2.18 ■

สำหรับเซตของจุดข้างใน จุดข้างนอก และจุดขอบ เซตที่มีความสำคัญในการศึกษาโทโพโลยีคือเซตของจุดข้างใน ซึ่งคุณสมบัติที่ควรทราบของจุดข้างในให้ไว้ในรูปทฤษฎีบทข้างล่างนี้

ทฤษฎีบท 2.7 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $A \subseteq X$ แล้วจะได้ว่า

(1) ถ้า G เป็นเซตเปิดซึ่ง $G \subseteq A$ แล้ว $G \subseteq \text{Int}(A)$

(2) $\text{Int}(A)$ มีค่าเท่ากับผลผนวกทั้งหมดของเซตย่อยของ A ที่เป็นเซตเปิด

(3) A เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อ $A = \text{Int}(A)$

พิสูจน์ (1) ให้ $x \in G$

แต่ G เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี $r > 0$ ซึ่ง $S(x; r) \subseteq G$

แต่ $G \subseteq A$ ดังนั้น

$$x \in S(x; r) \subseteq G \subseteq A$$

จะได้ $x \in \text{Int}(A)$

นั่นคือ $G \subseteq \text{Int}(A)$

(2) ให้ $\{ G_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตของเซตเปิดทั้งหมด ซึ่งเป็นเซตย่อยของ A

นั่นคือ $G_i \subseteq A$ สำหรับทุก ๆ ค่า i

ต้องการแสดงว่า $\text{Int}(A) = \bigcup_{i \in J} G_i$

เพราะว่า $G_i \subseteq A$ สำหรับทุก ๆ ค่า $i \in J$

จาก (1) จะได้ว่า $G_i \subseteq \text{Int}(A)$ สำหรับทุก ๆ ค่า $i \in J$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{i \in J} G_i \subseteq \text{Int}(A)$

ถ้า $x \in \text{Int}(A)$ ตามนิยามของจุดข้างในจะได้ว่า

มี $S(x; r)$ ซึ่ง $x \in S(x; r) \subseteq A$

แต่ $S(x; r)$ เป็นเซตเปิดบางตัวใน $\{ G_i \mid i \in J \}$ โดยที่ $S(x; r) \subseteq A$

เพราะฉะนั้น $S(x; r) = G_{i_0}$ สำหรับ $i_0 \in J$

$$x \in G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$$

เพราะฉะนั้น $\text{Int}(A) \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$

ดังนั้น $$\text{Int}(A) = \bigcup_{i \in J} G_i$$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 2.7 (2) พบว่า $\text{Int}(A) = \bigcup_{i \in J} G_i$ แสดงว่า Int (A) เป็นเซตเปิด และจากทฤษฎีบท 2.7 (1) จะได้ต่อไปอีกว่า Int (A) เป็นเซตเปิดที่ใหญ่ที่สุดที่เป็นเซตย่อยของ A

(3) $(\rightarrow)$ สมมุติ A เป็นเซตเปิด

เพราะว่า $A \subseteq A$ และ A เป็นเซตเปิด

จาก (1) จะได้ว่า $A \subseteq \text{Int}(A)$

แต่จากนิยาม $\text{Int}(A) \subseteq A$

ดังนั้น $A = \text{Int}(A)$

$(\leftarrow)$ สมมุติ $A = \text{Int}(A)$

แต่ Int (A) เป็นเซตเปิด

ดังนั้น A เป็นเซตเปิด ■

แบบฝึกหัด 2.2

1. กำหนด (R, d) เป็นปริภูมิเมตริก d เป็นเมตริกปกติ จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้ ข้อใดเป็นเซตเปิด

   (1) $(-1, 1)$ (2) $(1, \infty)$

   (3) $(-\infty, 3)$ (4) $(1, 3) \cap (5, 7)$

   (5) $(-1, 3] \cup [3, 1)$

2. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก จงพิสูจน์ว่าสำหรับจุด 2 จุดที่แตกต่างกันของ X จะมีทรงกลมเปิดซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดทั้งสอง และทรงกลมเปิดทั้งสองไม่มีสมาชิกร่วมกัน

3. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก ถ้า $\{ x \}$ เป็นเซตย่อยของ X ซึ่งมีเพียงจุดเดียว จงแสดงว่า $X - \{ x \}$ เป็นเซตเปิด
4. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และสำหรับ $k > 0$ นิยามเมตริก d_k ดังนี้

$$d_k(x, y) = kd(x, y)$$

จงพิสูจน์ว่า ถ้า G เปิดเซตเปิดใน (X, d) แล้ว G เป็นเซตเปิดใน (X, d_k)

5. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก นิยาม $d'(x, y)$ สำหรับ $x, y \in X$ ดังนี้

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ถ้า G เป็นเซตเปิดใน (X, d) แล้ว G เป็นเซตเปิดใน (X, d')

6. กำหนดให้ $X = R^2$, d เป็นเมตริกปกติแล้ว จงพิจารณาว่า เซตต่อไปนี้เป็นเซตเปิดใน (X, d) หรือไม่

   (1) $\{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$ (2) $\{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 < x_2 \}$

   (3) $\{ (x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1 \}$ (4) $\{ (x_1, x_2) \mid x_1 = 0, 0 < x_2 < 1 \}$

7. **นิยาม** เส้นผ่าศูนย์กลาง (diameter) ของเซต A นิยามโดย

$$d(A) = \sup \{ d(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in A \}$$

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $S(x; r)$ เป็นทรงกลมเปิดใน X ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ x รัศมีเท่ากับ r ถ้า $A \subseteq X$ โดยที่ $d(A) < r$ และ A มีสมาชิกร่วมกันกับ $S(x; r)$ จงพิสูจน์ว่า $A \subseteq S(x; 2r)$

8. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก ถ้า A เป็นเซตย่อยจำกัดของ X จงแสดงว่า $X - A$ เป็นเซตเปิด
9. จงบอกจุดข้างใน จุดข้างนอก และจุดขอบของเซตต่อไปนี้

   (1) $A = \{ (x_1, x_2) \mid x_1x_2 < 3 \}$

   (2) $B = \{ (x_1, x_2) \mid 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 < 4 \}$

   (3) $C = \{ (x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| < 1 \}$

   (4) $D = \{ (x_1, x_2) \mid |x_1| - |x_2| < 1 \}$

10. ถ้า A, B เป็นเซตย่อยของ X จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   (1) $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$

   (2) $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cap B)$

   (3) จงยกตัวอย่างเซต A, B ซึ่ง $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \neq \text{Int}(A \cup B)$

2.3 เซตปิด

Closed set

ก่อนที่จะให้นิยามของเซตปิดจะต้องทราบนิยามของทรงกลมเปิดที่ไม่รวมจุดศูนย์กลาง และนิยามของจุดลิมิตเสียก่อนดังนี้

นิยาม 2.8 ทรงกลมเปิดที่ไม่รวมจุดศูนย์กลาง แทนด้วยสัญลักษณ์ $S^*(x_o; r)$ โดยที่

$$S^*(x_o; r) = S(x_o; r) - \{ x_o \}$$

ตัวอย่าง 2.16 กำหนดให้ (C, d) เป็นปริภูมิเมตริก d เป็นเมตริกปกติแล้วจะได้ว่า

$\{ z \mid 0 < | z | < 4 \}$ เป็นทรงกลมเปิดที่ไม่รวมจุดศูนย์กลาง ■

นิยาม 2.9 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $A \subseteq X, x \in X$ เรียกว่าจุดลิมิต (limit point) ของ A ก็ต่อเมื่อทุก ๆ S(x; r)

$$S^*(x; r) \cap A \neq \varnothing$$

นั่นแสดงว่าทุก ๆ ทรงกลมเปิดที่มีจุดศูนย์กลางที่ x มีจุดที่ต่างจาก x อยู่ใน A

ตัวอย่าง 2.17 กำหนดให้ (R, d) เป็นปริภูมิเมตริก

(1) $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\}$

จะเห็นว่า $A \subseteq R$ มี 0 เป็นจุดลิมิต

(2) $B = [0, 1)$

จะเห็นว่า 0 เป็นจุดลิมิตของ B ที่อยู่ใน B แต่ 1 เป็นจุดลิมิตของ B ที่ไม่อยู่ใน B แต่อย่างไรก็ตามจุดทั้งหลายที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 เป็นจุดลิมิตของ B ทั้งสิ้น ■

นิยาม 2.10 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $F \subseteq X$ เรียกว่าเซตปิด (closed set) ก็ต่อเมื่อทุก ๆ จุดลิมิตของ F เป็นสมาชิกของ F

นั่นคือ F เป็นเซตปิด $\leftrightarrow \forall x$ (x เป็นจุดลิมิตของ F $\rightarrow x \in F$)

จากนิยามของเซตปิด เราสามารถบอกได้ว่าเซตที่กำหนดให้ไม่เป็นเซตปิดได้ โดยอาศัยการนิเสธนิยามของเซตปิด นั่นคือ F ไม่เป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อมีจุดลิมิตของ F ที่ไม่อยู่ใน F

พิจารณาตัวอย่างเซตต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.18 กำหนด (R, d) เป็นปริภูมิเมตริก

(1) $A = (0, 1]$ ไม่เป็นเซตปิดเพราะว่ามี $0 \in R$ ซึ่งเป็นจุดลิมิตของ A แต่ $0 \notin A$

(2) $B = [0, 1]$ เป็นเซตปิด

กำหนด (R^2, d) เป็นปริภูมิเมตริก

(3) $C = \{ (x, y) \in R^2 \mid d((x, y), (x_o, y_o)) \leqslant r \}$ เป็นเซตปิดเรียกว่า ทรงกลมปิดใน R^2 ■

การพิจารณาเซตปิดในรูปของจุดลิมิตมักจะเกิดปัญหายุ่งยาก แต่ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงการพิจารณาเซตปิดในรูปของคอมพลีเมนต์ของเซตเปิด ซึ่งทฤษฎีบทนี้จะช่วยแก้ปัญหาการพิสูจน์เซตปิดได้ดี

ทฤษฎีบท 2.8 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $F \subseteq X$ แล้ว F เป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อ $X - F$ เป็นเซตเปิด

พิสูจน์ ($\rightarrow$) สมมุติ F เป็นเซตปิด

ต้องการแสดงว่า $X - F$ เป็นเซตเปิด

กรณีที่ 1 ถ้า $X - F = \varnothing$

จากทฤษฎีบท 2.4 จะได้ $X - F$ เป็นเซตเปิด

กรณีที่ 2 ถ้า $X - F \neq \varnothing$

ให้ $x \in X - F$

เพราะฉะนั้น $x \notin F$

เพราะว่า $x \notin F$ และ F เป็นเซตปิด

ดังนั้น x ไม่เป็นจุดลิมิตของ F

เพราะฉะนั้นจะมี $S(x, r)$ ซึ่ง $S^*(x, r) \cap F = \varnothing$

นั่นคือ $S^*(x, r) \subseteq X - F$

แต่ $x \in X - F$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$S(x; r) \subseteq X - F$$

ดังนั้น $X - F$ เป็นเซตเปิด

($\leftarrow$) สมมุติ $X - F$ เป็นเซตเปิด

ต้องการแสดงว่า F เป็นเซตปิด

ให้ x เป็นจุดลิมิตใด ๆ ของ F

ต้องการแสดงว่า $x \in F$

สมมุติ $x \notin F$

เพราะฉะนั้น $x \in X - F$

แต่ $X - F$ เป็นเซตเปิด ดังนั้นจะมี $S(x; r)$ ซึ่ง

$$S(x; r) \subseteq X - F$$

จะได้ว่า $\quad S(x; r) \cap F = \varnothing$

เพราะฉะนั้น $S^*(x; r) \cap F = \varnothing$

ดังนั้น x ไม่เป็นจุดลิมิตของ F

เกิดข้อขัดแย้ง (a contradiction)

เพราะฉะนั้น $x \in F$

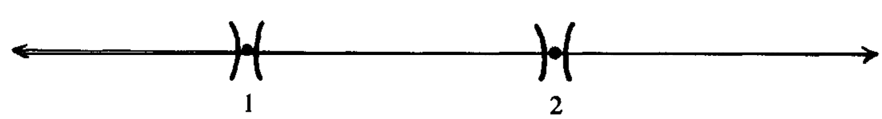
ดังนั้น F เป็นเซตปิด ■

จะเห็นว่าทฤษฎีบท 2.8 กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างเซตเปิดและเซตปิด คือถ้า F เป็นเซตปิดแล้ว $X - F$ เป็นเซตเปิด และถ้า G เป็นเซตเปิดแล้ว $X - G$ จะเป็นเซตปิดด้วยเช่นกัน ซึ่งนำมาใช้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

ในปริภูมิเมตริกสำหรับเมตริกปกติจะได้ว่า เซตของจุดจำนวนจำกัดจะเป็นเซตปิดเสมอ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.19 กำหนดให้ X = R d เป็นเมตริกปกติบน R

$A = \{1, 2\}$ เป็นเซตปิดเพราะว่า $R - A = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$ ซึ่งเป็นผลผนวกของเซตเปิด จึงเป็นเซตปิด



รูป 2.19

■

จากเรื่องเซตเปิดได้กล่าวแล้วว่า $\varnothing$ และ X เป็นเซตเปิดและยังกล่าวต่อไปถึงผลผนวกและผลร่วมของเซตเปิด สำหรับเซตปิดก็มีทฤษฎีบทเช่นเดียวกันกับเซตเปิดดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.9 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

(1) $\varnothing$ เป็นเซตปิด

(2) X เป็นเซตปิด

พิสูจน์ ใช้ทฤษฎีบท 2.8 จะได้ว่า

(1) $\varnothing = X - X$

แต่ X เป็นเซตเปิด ดังนั้น $X - X$ เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้น $\varnothing$ เป็นเซตปิด

(2) $X = X - \varnothing$

แต่ $\varnothing$ เป็นเซตเปิด ดังนั้น $X - \varnothing$ เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้น X เป็นเซตปิด ■

ทฤษฎีบท 2.10 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก แล้วจะได้ว่า

(1) ถ้า $F_1, F_2, \ldots, F_n$ เป็นเซตปิดแล้ว $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ เป็นเซตปิด

(2) ถ้า F_i เป็นเซตปิดสำหรับทุกค่า $i \in J$ จะได้ว่า $\bigcap_{i \in J} F_i$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ อาศัยกฎของเดอมอร์กอง (De Morgan's law)

(1) เพราะว่า

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = X - \bigcap_{i=1}^{n} (X - F_i)$$

แต่ $X - F_i$ เป็นเซตเปิดเพราะว่า F_i เป็นเซตปิด

และ $\bigcap_{i=1}^{n} (X - F_i)$ เป็นเซตเปิดตามทฤษฎีบท 2.5

เพราะฉะนั้น $X - \bigcap_{i=1}^{n} (X - F_i)$ เป็นเซตปิด

นั่นคือ $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ เป็นเซตปิด

(2) เพราะว่า

$$\bigcap_{i \in J} F_i = X - \bigcup_{i \in J} (X - F_i)$$

แต่ $X - F_i$ เป็นเซตเปิด เพราะว่า F_i เป็นเซตปิด

และ $\bigcup_{i \in J} (X - F_i)$ เป็นเซตเปิดตามทฤษฎีบท 2.5

เพราะฉะนั้น $X - \bigcup_{i \in J} (X - F_i)$ เปนเซตปิด

นั่นคือ $\bigcap_{i \in J} F_i$ เป็นเซตปิด ■

จากทฤษฎีบท 2.10 จะเห็นว่าข้อ (1) ใช้เฉพาะกรณีเซตปิดจำนวนจำกัดเท่านั้น ถ้าเป็นจำนวนอนันต์จะไม่ได้ผลสรุปตามทฤษฎีบท ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดให้ (R, d) เป็นปริภูมิเมตริกโดยที่ d คือเมตริกปกติบน R

ให้ $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1 \right], n \in N$

นั่นคือ $F_1 = \{ 1 \}$

$$F_2 = [\tfrac{1}{2}, 1]$$

$$F_3 = [\tfrac{1}{3}, 1]$$

. . . .

. . . .

$$F_n = [\tfrac{1}{n}, 1]$$

. . . .

จะได้ว่า $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$ ซึ่งไม่ใช่เซตปิด

นิยาม 2.11 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $x_o \in X$ r เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ แล้ว ทรงกลมปิด (closed sphere) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ x_o รัศมี r แทนด้วยสัญลักษณ์ $S[x_o; r]$ โดยที่

$$S[x_o; r] = \{ x \mid d(x, x_o) \leqslant r \}$$

เมื่อ r = 0 จะได้ว่า $S[x_o; r]$ คือเซตของจุด ๆ เดียวคือ $\{ x_o \}$ ทรงกลมเปิดบนเส้นจำนวนคือ ช่วงปิด ส่วนทรงกลมปิดบนระนาบคือวงกลมปิดนั่นเอง

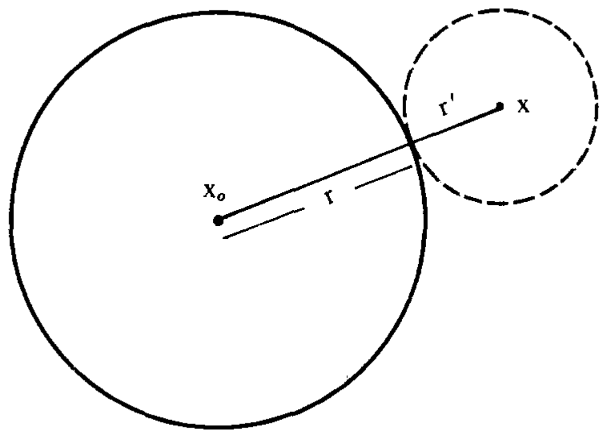
จากตอนที่แล้วกล่าวว่าทรงกลมเปิดเป็นเซตเปิด ในทำนองเดียวกัน ทรงกลมปิดก็เป็นเซตปิดดังทฤษฎีบทข้างล่างนี้

ทฤษฎีบท 2.11 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกใด ๆ ทรงกลมปิดเป็นเซตปิด นั่นคือ $S[x_o; r]$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ ให้ $S[x_o; r]$ เป็นทรงกลมปิดใน X
ต้องการแสดงว่า $S[x_o; r]$ เป็นเซตปิด
นั่นคือแสดงว่า $X - S[x_o; r]$ เป็นเซตเปิด

กรณีที่ 1 $X - S[x_o; r] = \varnothing$ A
ดังนั้น $X - S[x_o; r]$ เป็นเซตเปิด
จะได้ว่า $S[x_o; r]$ เป็นเซตปิด

กรณีที่ 2 $X - S[x_o; r] \neq \varnothing$
ให้ $x \in X - S[x_o; r]$



รูป 2.20

เพราะฉะนั้น $x \notin S[x_o; r]$

จะได้ว่า $d(x, x,) > r$

ดังนั้น $d(x, x,)-r > 0$

เลือก $r' = d(x, x,)-r$

ต้องการแสดงว่า $S(x, r') \subsetneq X-S[x_o; r]$

ให้ $y \in S(x; r')$

ดังนั้น $d(x, y) < r'$

แต่ $d(x, y) + d(y, x_o) \geqslant d(x, x_o)$

ดังนั้น $d(y, x_o) > d(x, x,)-r'$

$= r$

จะได้ว่า $d(y, x_o) > r$

$y \notin S[x_o; r]$

แสดงว่า $y \in X-S[x_o; r]$

เพราะฉะนั้น $S(x, r') \subsetneq X-S[x_o; r]$

เพราะฉะนั้น $X-S[x_o; r]$ เป็นเซตเปิด

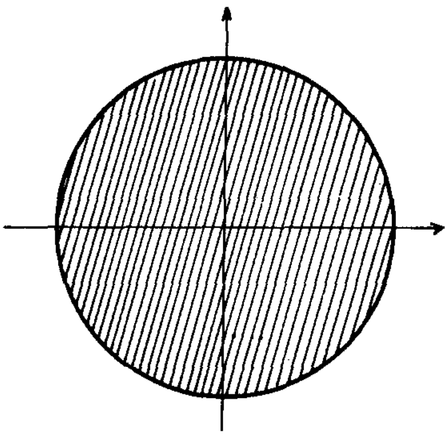
ดังนั้น $S[x_o; r]$ เป็นเซตปิด ■

ตัวอย่าง 2.20 ตัวอย่างของทรงกลมปิดใน R^2

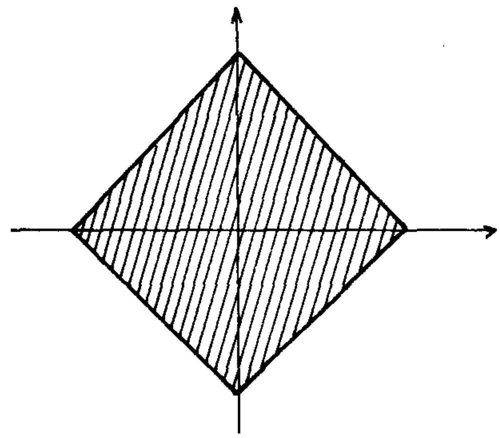
(1) สำหรับเมตริกปกติ

(2) สำหรับเมตริก d นิยามโดย $d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$

$= | x_1-x_2 | + | y_1-y_2 |$



(1)



(2)

รูป 2.21 ■

ในเรื่องเซตปิดเรามีนิยามของคำคำหนึ่งที่ใช้กันมากคือคำว่าโคลเชอร์ (closure) ซึ่งจะนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 2.11 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $A \subseteq X$ โคลเชอร์ของ A แทนด้วย $\bar{A}$ คือผลผนวกของ A กับเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ A

ตัวอย่างเช่นบนเส้นจำนวน $A = (0, 1]$ จะได้ $\bar{A} = [0, 1]$ และในระนาบเชิงซ้อน $B = \{ z \mid |z| < 1 \}$ เป็นเซตของวงกลมเปิดแล้ว $\bar{B} = \{ z \mid |z| \leqslant 1 \}$ เป็นเซตของวงกลมปิดเป็นต้น

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เป็นคุณสมบัติของ $\bar{A}$

ทฤษฎีบท 2.12 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $A \subseteq X$ แล้วจะได้ว่า

(1) ถ้า F เป็นเซตปิดซึ่งเป็นเซตย่อยของ X และ $A \subseteq F$ แล้ว $\bar{A} \subseteq F$
(นั่นคือ $\bar{A}$ เป็นเซตปิดที่เล็กที่สุดที่มี A เป็นเซตย่อย)

(2) $\bar{A}$ เขียนได้ในรูปผลร่วมของเซตปิดทั้งหลายที่มี A เป็นเซตย่อย
(นั่นคือ $\bar{A} = \bigcap_{i \in J} F_i$ โดยที่ $\{ F_i \mid i \in J \}$ เป็นเซตย่อยปิดทั้งหมดของ X และ $A \subseteq F_i$)

(3) A เป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อ $A = \bar{A}$

พิสูจน์ (1) สมมุติ $x \notin F$
จะได้ $x \in X - F$ ซึ่งเป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น จะมี $S(x; r)$ ซึ่ง

$$x \in S(x; r) \subseteq X - F$$

ดังนั้น $\quad S(x; r) \cap F = \varnothing$

แต่ $A \subseteq F$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$S(x; r) \cap A = \varnothing$$

เพราะฉะนั้น $S^*(x; r) \cap A = \varnothing$

ดังนั้น x ไม่ใช่จุดลิมิตของ A

แต่ $x \notin F$ ดังนั้น $x \notin A$

จะได้ว่า $x \notin \bar{A}$

ดังนั้นจะได้ว่า $x \notin F \rightarrow x \notin \bar{A}$

เพราะฉะนั้น $x \in \bar{A} \rightarrow x \in F$

เพราะฉะนั้น $\bar{A} \subseteq F$

(2) จากทฤษฎีบท 2.12 (1) จะได้ว่า $\bar{A} \subseteq F_i$ สำหรับทุก ๆ $i \in J$

ดังนั้น $\quad \bar{A} \subseteq \bigcap_{i \in J} F_i$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\quad \bigcap_{i \in J} F_i \subseteq \bar{A}$

ให้ $x \notin \bar{A}$

เพราะฉะนั้น $x \notin A$ และ x ไม่เป็นจุดลิมิตของ A

เพราะว่า x ไม่เป็นจุดลิมิตของ A ดังนั้นจะได้ว่า มี $S(x; r)$ ซึ่ง

$$S^*(x; r) \cap A = \varnothing$$

แต่ $x \notin A$ ดังนั้น $S(x; r) \cap A = \varnothing$

เพราะฉะนั้น $A \subseteq X - S(x; r)$ ซึ่งเป็นเซตปิด

ให้ $\quad F_{i_o} = X - S(x; r)$

แต่ $x \in S(x, r)$ ดังนั้น $x \notin X - S(x; r)$

นั่นคือ $x \notin F_{i_o}$ สำหรับ i_0 บางตัว

แสดงว่า $x \notin \bigcap_{i \in J} F_i$

เพราะฉะนั้น $\quad \bigcap_{i \in J} F_i \subseteq A$

จะได้ว่า $\quad A = \bigcap_{i \in J} F_i$

(3) ($\rightarrow$) สมมุติ A เป็นเซตปิด

จากนิยาม $A \subseteq \bar{A}$

แต่จากทฤษฎีบท 2.12 (1) จะได้ว่า $\bar{A} \subseteq A$ (เพราะว่า $A \subseteq A$ และ A เป็นเซตปิด)

ดังนั้น $A = \bar{A}$

($\leftarrow$) สมมุติ $A = \bar{A}$

แต่จากทฤษฎีบท 2.12 (2) A เป็นเซตปิด

ดังนั้น A เป็นเซตปิด ■

นอกจากนั้นคุณสมบัติของจุดขอบยังเกี่ยวพันกับโคลเชอร์ได้อีกโดยที่เรานิยามจุดขอบของ A ในรูปของโคลเชอร์ได้ดังนี้

นิยาม 2.12 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $A \subseteq X$ แล้วจะได้ว่า

$$Bd(A) = \bar{A} \cap (\overline{X-A})$$

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้

$$A = \{ z \mid |z| < 1 \}$$
$$\bar{A} = \{ z \mid |z| \leqslant 1 \}$$
$$X-A = \{ z \mid |z| > 1 \}$$
$$\overline{X-A} = \{ z \mid |z| \geqslant 1 \}$$

เพราะฉะนั้น $\bar{A} \cap (\overline{X-A}) = \{ z \mid |z| = 1 \}$

นั่นคือเซตของจุดขอบของ A : $Bd(A) = \{ z \mid |z| = 1 \}$

ทฤษฎีบท 2.13 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $A \subseteq X$ จะได้ว่า

(1) $Bd(A)$ เป็นเซตปิด

(2) $\bar{A} = A \cup Bd(A)$

(3) A เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อ $Bd(A) \subseteq A$

พิสูจน์ (1) เพราะว่า $\bar{A}$ และ $\overline{X-A}$ เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้น $\bar{A} \cap (\overline{X-A})$ เป็นเซตปิด

ดังนั้น $Bd(A)$ เป็นเซตปิด

(2) เพราะว่า $A \subseteq \bar{A}$ และ $Bd(A) \subseteq \bar{A}$

ดังนั้น $A \cup Bd(A) \subseteq \bar{A}$

ต้องการแสดงว่า $\bar{A} \subseteq A \cup Bd(A)$

ให้ $x \in \bar{A}$

เพราะฉะนั้น $x \in A$ หรือ $x \notin A$

ถ้า $x \notin A$ ดังนั้น $x \in X-A$

แต่ $X-A \subseteq \overline{X-A}$

ดังนั้น $x \in X-A$

เพราะฉะนั้น $x \in \bar{A} \cap (X-A)$

$x \in Bd(A)$

ดังนั้น $x \in A \cup Bd(A)$

เพราะฉะนั้น $\bar{A} = A \cup Bd(A)$

(3) ($\rightarrow$) สมมุติ A เป็นเซตปิด

ดังนั้น $A = \bar{A}$

แต่ $Bd(A) \cup A = A$

ดังนั้น $Bd(A) \subseteq A$

($\leftarrow$) สมมุติ $Bd(A) \subseteq A$

ดังนั้น $\bar{A} = A \cup Bd(A)$

$= A$

เพราะฉะนั้น **A** เป็นเซตปิด ■

แบบฝึกหัด 2.3

1. กำหนดให้ **(R, d)** เป็นปริภูมิเมตริก โดยที่ d เป็นเมตริกปกติ แล้วจงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เซตใดเป็นเซตปิด

(1) $[0, 3]$ (2) $(-3, 4]$

(3) $(-\infty, 2]$ (4) $[4, \infty)$

(5) $[-3, 1) \cup (0, 3]$ (6) $(-3, 5] \cap [0, 7)$

2. กำหนดให้ (R^2, d) เป็นปริภูมิเมตริก โดยที่ d เป็นเมตริกปกติ แล้วจงพิจารณาว่าเซตใดต่อไปนี้เป็นเซตปิด

(1) $\{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \}$

(2) $\{ (x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \leqslant 1 \}$

(3) $\{ (x_1, x_2) \mid x_1 x_2 = 1 \}$

(4) $\{ (x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \leqslant 1 \}$

3. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก จงพิสูจน์ว่า

(1) ถ้า $x \in X$, F เป็นเซตย่อยปิดของ X, $x \in F$ แล้ว จะมี G_1, G_2 เป็นเซตเปิดซึ่ง $x \in G_1$ และ $F \subseteq G_2$

(2) ถ้า E, F เป็นเซตย่อยปิดของ X และ $E \cap F = \varnothing$ แล้วจะมีเซตเปิด G_1, G_2 ซึ่ง $E \subseteq G_1$ และ $F \subseteq G_2$

4. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $A \subseteq X$ ถ้า x เป็นจุดลิมิตของ A แล้ว จงพิสูจน์ว่า ทุก ๆ ทรงกลมเปิดที่มีจุดศูนย์กลางที่ x จะมีจุดเป็นจำนวนอนันต์
5. จงยกตัวอย่างเซตที่มีคุณสมบัติต่อไปนี้
   (1) เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด
   (2) ไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด
   (3) มีจุดซึ่งไม่ใช่จุดลิมิตของเซต
   (4) ไม่มีจุดซึ่งไม่ใช่จุดลิมิตของเซต
6. จงพิสูจน์ว่า $X - \bar{A} = \operatorname{Int}(X - A)$
7. **นิยาม** ระยะทางจากจุด x ไปยังเซต A แทนด้วย $d(x, A)$ นิยามโดย

   $$d(x, A) = \inf \{ d(x, a) \mid a \in A \}$$

   จงพิสูจน์ว่า $\bar{A} = \{ x \mid d(x, A) = 0 \}$
8. กำหนดเซต A ต่อไปนี้ จงบอกเซต $\bar{A}$
   (1) A = เซตของจำนวนเต็ม
   (2) A = เซตของจำนวนตรรกยะ
   (3) $A = (0, \infty)$
   (4) $A = (-1, 0) \cup (0, 1)$
9. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกและ G เป็นเซตย่อยเปิดของ X จงพิสูจน์ว่า g เป็นเซตต่างสมาชิกกับ A ก็ต่อเมื่อ G เป็นเซตต่างสมาชิกกับ $\bar{A}$
10. จงบอกเซตของจุดขอบของเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   (1) เซตของจำนวนเต็ม
   (2) เซตของจำนวนตรรกยะ
   (3) $[0, 1)$
   (4) $(0, 1)$
   (5) $\{ z \mid |z| < 1 \}$
   (6) $\{ z \mid |z| \leqslant 1 \}$
   (7) $\{ z \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$

2.4 การลู่เข้า และความสมบูรณ์

Convergence and Completeness

เคยทราบมาแล้วว่าลำดับ (sequence) เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนเต็มบวกไปยังเซตของจำนวนจริง โดยที่เราแบ่งลำดับออกเป็น 2 แบบคือ ถ้าโดเมนเป็นเซตจำกัด เรียกว่าลำดับ

จำกัด แต่ถ้าโดเมนเป็นเซตอนันต์เรียกว่าลำดับอนันต์ แต่ที่นำมาศึกษากันมากได้แก่ลำดับอนันต์

เราเขียนพจน์ที่ 1 ของลำดับอนันต์แทนด้วย a_1

เราเขียนพจน์ที่ 2 ของลำดับอนันต์แทนด้วย a_2

. . . .

. . . .

เราเขียนพจน์ที่ n ของลำดับอนันต์แทนด้วย a_n

. . . .

ในบางครั้งเราเรียกพจน์ที่ n ของลำดับอนันต์ว่า พจน์ทั่วไป (general term) ซึ่งในการเขียนลำดับอนันต์เขียนได้ 2 แบบ คือ แบบแจกแจงพจน์ และแบบเขียนเฉพาะพจน์ทั่วไป คือ

(1) $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \}$

หรือ (2) $\{ a_n \}$

ในระบบจำนวนจริง เราได้ว่าเมื่อกำหนดให้ $\{ a_n \}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงแล้ว $\{ a_n \}$ จะลู่เข้าจำนวนจริง a ก็ต่อเมื่อทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $n_o \in N$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $n \geqslant n_o$ จะได้ว่า $| a_n - a | < \in$

ลำดับ $\{ a_n \}$ ลู่เข้าสู่ค่า a เขียนได้อีกแบบหนึ่งคือ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ หรือ $a_n \to a$

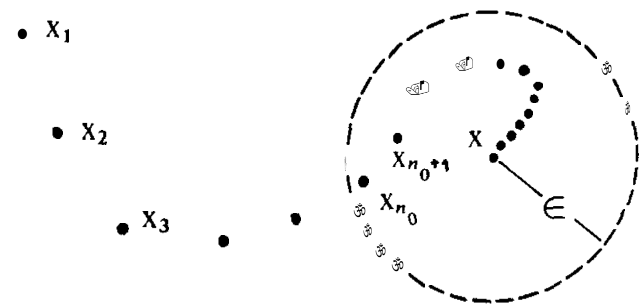
สำหรับในปริภูมิเมตริกจะนิยามการลู่เข้าของลำดับได้แบบเดียวกันกับในระบบจำนวนจริงดังนี้

นิยาม 2.13 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $\{ x_n \} = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \}$ เป็นลำดับของจุดใน X แล้ว $\{ x_n \}$ ลู่เข้าสู่ $x \in X$ ก็ต่อเมื่อทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $n_o \in N$ ซึ่งทุก ๆ $n \geqslant n_o$ จะได้ว่า $d(x_n, x) < \in$

จากนิยาม 2.13 จะเห็นว่าเรานิยามการลู่เข้าในรูปของเมตริก d แต่อย่างไรก็ตามเรายังสามารถนิยามการลู่เข้าอีกแบบหนึ่งในรูปทรงกลมเปิดดังนี้

$\{ x_n \}$ ลู่เข้าสู่ค่า $x \in X$ ก็ต่อเมื่อทุก ๆ ทรงกลมเปิด $S(x; \in)$ จะมี $n_o \in N$ ซึ่งทุก ๆ $n \geqslant n_o$ จะได้ว่า $x_n \in S(x; \in)$

จากนิยามเราสรุปได้ว่าลำดับ $\{ x_n \}$ จะลู่เข้า $x \in X$ ก็ต่อเมื่อไม่ว่ากำหนด $\in > 0$ ใด ๆ มาก็ตามเราสามารถบอกได้ว่าตั้งแต่พจน์ใดเป็นต้นไปที่ระยะระหว่างพจน์นั้นกับ x น้อยกว่า $\in$ หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งคือพจน์เหล่านั้นอยู่ในทรงกลมเปิด $S(x; \in)$ ดังรูป 2.22



รูป 2.22

ตัวอย่าง 2.21 ในปริภูมิเมตริก (R, d) เมื่อ d เป็นเมตริกปกติจะได้ว่า

(1) ลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ลู่เข้าสู่ค่า 0

(2) ลำดับ $3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$ ลู่เข้าสู่ค่า 3

(3) ลำดับ $\left\{ \frac{n+1}{n-1} \right\}$ ลู่เข้าสู่ค่า 1

(4) ลำดับ $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$ ลู่เข้าสู่ค่า 0

(5) ลำดับ $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$ ลู่ออก (diverge) ■

ตัวอย่าง 2.22 กำหนดให้ (R^2, d_1), (R^2, d_2) และ (R^2, d_3) เป็นปริภูมิเมตริก โดยที่ทุก ๆ $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ ใน R^2 นิยามเมตริก d_1, d_2 และ d_3 ดังนี้

$$d_1(x, y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

$$d_2(x, y) = \max \{ |x_1-y_1|, |x_2-y_2| \}$$

และ $$d_3(x, y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

กำหนดให้ $\{ x_n \}$ เป็นลำดับใน x โดยที่

$$x_n = \left(0, \frac{1}{n} \right) \quad n \in N$$

แล้วจงแสดงว่า $\{ x_n \}$ ลู่เข้า (0, 0) ในปริภูมิ (R^2, d_1), (R^2, d_2) และ (R^2, d_3) ตามลำดับ

พิสูจน์ (1) สำหรับ (R^2, d_1)

ให้ $\in > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก n_0 ซึ่ง $n_0 > \frac{1}{\in}$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ซึ่ง $n \geqslant n_0$

จะได้ว่า $d_1(x_n, (0, 0)) = d_1((0, \frac{1}{n}), (0, 0))$

$$= \sqrt{(0-0)^2 + (\frac{1}{n}-0)^2}$$

$$= \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \in$$

เพราะฉะนั้น $\{ x_n \}$ ลู่เข้า $(0, 0)$

(2) สำหรับ (R^2, d_2)

ให้ $\in > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก n_0 ซึ่ง $n_0 > \frac{1}{\in}$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ซึ่ง $n \geqslant n_o$

จะได้ว่า $d_2(x_n, (0, 0)) = d_2 ((0, \frac{1}{n}), (0, 0))$

$$= \max \{ | 0-0 |, | \frac{1}{n}-0 | \}$$

$$= \max \{ 0, \frac{1}{n} \}$$

$$= \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \in$$

เพราะฉะนั้น $\{ x_n \}$ ลู่เข้า $(0, 0)$

(3) สำหรับ (R^2, d_3) ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด ■

ทฤษฎีบท 2.14 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $\{ x_n \}$ เป็นลำดับของจุดใน X
ถ้า x และ y เป็นจุดที่ $\{ x_n \}$ ลู่เข้าสู่ แล้ว $x = y$
นั่นคือ $\{ x_n \}$ ลู่เข้าสู่ค่าเพียงค่าเดียวเท่านั้น

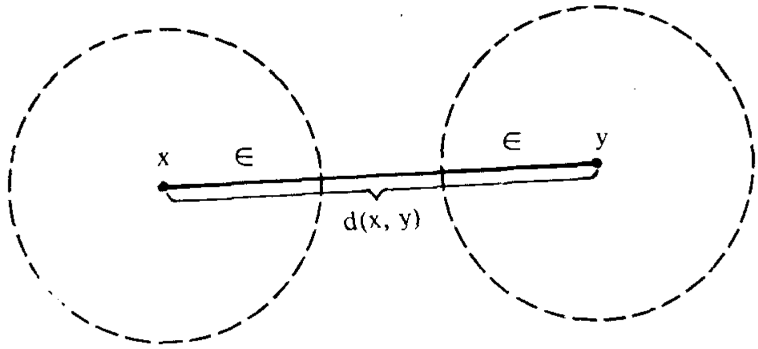
พิสูจน์ ให้ $\{ x_n \} \rightarrow x$ และ $\{ x_n \} \rightarrow y$

สมมุติ $x \neq y$

ดังนั้น $d(x, y) > 0$

ให้ $\in = \frac{d(x, y)}{3}$

จะได้ $S(x; \in) \cap S(y; E) = 0$



รูป 2.23

เพราะว่า x เป็นลิมิตของลำดับ $\{ x_n \}$

เพราะฉะนั้น จะมี $n_0 \in N$ ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก $n \geqslant n_0$ จะได้ว่า

$$x_n \in S(x; \in)$$

ดังนั้นสำหรับ $n \geqslant n_o$, $x_n \notin S(y; \in)$

เพราะฉะนั้น y ไม่เป็นลิมิตของลำดับ $\{ x_n \}$

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $x = y$ ■

นิยาม 2.4 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $\{ x_n \}$ เป็นลำดับของจุดใน X แล้ว เรียกลำดับ $\{ x_n \}$ ว่าลำดับโคชี (cauchy sequence) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\in > 0$ จะมีจำนวนเต็ม n_0 ซึ่งทุก ๆ จำนวนเต็ม $m, n \geqslant n_0$ จะได้ว่า $d(x_m, x_n) < \in$

มีทฤษฎีบทเกี่ยวกับลำดับลู่เข้า (convergent sequence) และลำดับโคชี (cauchy sequence) คือลำดับที่ลู่เข้าจะเป็นลำดับโคชี แต่อย่างไรก็ตามบทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่เป็นความจริง

ทฤษฎีบท 2.15 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

$\{ x_n \}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว $\{ x_n \}$ เป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ ให้ $\{ x_n \}$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยที่ $\{ x_n \}$ ลู่เข้าสู่ค่า $x \in X$

ให้ $\in > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

จะมี $n_0 \in N$ ซึ่งทุก ๆ $n \geqslant n_0$ จะได้ $d(x_n, x) < \frac{\in}{2}$

เพราะฉะนั้นสำหรับทุก ๆ $m, n \geqslant n_0$ จะได้

$$d(x_m, x) < \frac{\in}{2}$$

$$d(x_n, x) < \frac{\in}{2}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x) + d(x, x_n) \\ &= d(x_m, x) + d(x_n, x) \\ &< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} \\ &= \in \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\{ x_n \}$ เป็นลำดับโคชี ■

บทกลับของทฤษฎีบท 2.15 ไม่เป็นความจริง ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $X = (0, 1]$ และ $\{ x_n \} = \frac{1}{n}$ จะเห็นว่า $\{ x_n \}$ เป็นลำดับโคชีใน X แต่ $\{ x_n \}$ ไม่ได้ลู่เข้า เพราะว่าจุดที่ $\{ x_n \}$ ลู่เข้าคือ 0 แต่ $0 \notin X$

นิยาม 2.15 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก แล้วเรียก (X, d) ว่าปริภูมิเมตริกสมบูรณ์ (complete metric space) ก็ต่อเมื่อทุก ๆ ลำดับโคชีใน X เป็นลำดับลู่เข้าใน X

ปริภูมิ (0, 1] ไม่เป็นปริภูมิเมตริกสมบูรณ์เพราะมีลำดับโคชีที่ไม่ลู่เข้าจุดใน (0, 1] แต่เราสามารถทำให้เป็นปริภูมิเมตริกสมบูรณ์ได้โดยการเติมจุดบางจุดลงปริภูมิเดิม ตัวอย่างของปริภูมิเมตริกสมบูรณ์ที่ง่ายที่สุดคือ (R, d) เช่นเดียวกันเราจะได้ว่า (C, d) เป็นปริภูมิเมตริกด้วย

แบบฝึกหัด 2.4

1. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และถ้า $\{ x_n \} \rightarrow x$, $\{ y_n \} \rightarrow y$ แล้วจงพิสูจน์ว่า $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$
2. จงพิจารณาลำดับในปริภูมิต่อไปนี้ ว่าลำดับใดลู่เข้า

   (1) $x_n = \frac{n+1}{n}$ ในเมตริกปกติ (R, d)

   (1) $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ ในเมตริกปกติ (R, d)

   (3) $x_n = \left(0, \frac{n-1}{2n}\right)$ ในเมตริกปกติ (R^2, d)

   (4) $x_n = (2, 2)$ ในเมตริกเต็มหน่วย (R^2, d)

(5) $x_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ในปริภูมิ (R^2, d) โดยที่ d เป็นเมตริก นิยามโดย

$d(x, y) = |x| + |y|$

3. ในปริภูมิเมตริก (R^2, d) เมื่อ d นิยามโดย $d(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ จงพิสูจน์ว่า ลำดับ $x_n = (a_n, b_n)$ จะลู่เข้าสู่จุด (a, b) ก็ต่อเมื่อ $a_n \to a$ และ $b_n \to b$

4. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(1) ปริภูมิเมตริก (X, d) โดยที่สำหรับ $x, y \in X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ เมื่อ } x = y \\ 1 \text{ เมื่อ } x \neq y \end{cases}$$

เป็นปริภูมิเมตริกสมบูรณ์

(2) ปริภูมิเมตริก (I, d) โดยที่ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และ d เป็นเมตริกปกติ เป็นปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์

5. จงยกตัวอย่างปริภูมิเมตริกที่ไม่สมบูรณ์มา 2 ตัวอย่าง

2.5 ฟังก์ชันต่อเนื่อง

Continuous function

เช่นเดียวกันกับในหัวข้อ 2.4 เรานิยามความต่อเนื่องในปริภูมิเมตริกโดยอาศัยแนวความคิดจากความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f: R \to R$ ซึ่งนิยามดังนี้

"$f: R \to R$ ต่อเนื่องที่ $x_o \in R$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $|x - x_0| < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(x_o)| < \epsilon$

และ f ต่อเนื่องบน R ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่จุดทุก ๆ จุดบน R"

เรานิยามฟังก์ชันต่อเนื่องในปริภูมิเมตริกดังต่อไปนี้

นิยาม 2.16 กำหนดให้ (X, d), (Y, d′) เป็นปริภูมิเมตริก และ $x_o \in X$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง Y แล้ว f ต่อเนื่องที่ x_o ก็ต่อเมื่อทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $d(x, x_o) < \delta$ แล้ว $d'(f(x), f(x_o)) < \epsilon$

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุดบน X

ตัวอย่าง 2.23 กำหนดให้ (X, d), (Y, d′) เป็นปริภูมิเมตริก $f : (X, d) \to (Y, d')$ นิยามโดย

$$f(x) = c \quad (c \text{ เป็นค่าคงที่}),\ c \in Y$$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X

พิสูจน์ ให้ $x_o \in X$

ต้องการแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ x_o

ให้ $\in > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก δ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

ให้ $d(x, x_o) < \delta$

พิจารณา $d'(f(x), f(x_o)) = d'(c, c)$

$= 0$

$< \in$

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ x_o

แต่ x_0 เป็นจุดใด ๆ บน X

ดังนั้น f ต่อเนื่องบน X ■

ตัวอย่าง 2.24 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

$f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ นิยามโดย

$f(x) = x$ สำหรับทุก ๆ ค่า $x \in X$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X

พิสูจน์ ให้ $x_o \in X$

ต้องการแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ x_o

ให้ $\in > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \in$

ให้ $d(x, x_0) < \delta$

พิจารณา $d(f(x), f(x_0)) = d(x, x_0))$

$< \delta = \in$

จะได้ว่า $d(f(x), f(x_o)) < \in$

f ต่อเนื่องที่ x_0

แต่ x_o เป็นจุดใด ๆ บน X

ดังนั้นจะได้ว่า f ต่อเนื่องบน X ■

ตัวอย่าง 2.25 กำหนดให้ (R^2, d) และ (R^2, d') เป็นปริภูมิเมตริก ซึ่ง d เป็นเมตริกปกติ และ d' เป็นเมตริกที่นิยามโดย

$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \}$$

ให้ $f: (R^2, d) \rightarrow (R^2, d')$ นิยามโดย

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

จงแสดงว่า f ต่อเนื่องที่จุด (0, 0)

พิสูจน์ ให้ $\in > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \in$

ให้ $d((x_1, x_2), (0, 0)) < \delta$

ดังนั้น $\sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} < \delta$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \delta$$

จะได้ $|x_1| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2} < \delta$

และ $|x_2| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \delta$

พิจารณา
$$\begin{aligned} d'(f(x_1, x_2), f(0, 0)) &= d'((x_1, x_2), (0, 0)) \\ &= \max\{|x_1 - 0|, |x_2 - 0|\} \\ &= \max\{|x_1|, |x_2|\} \\ &< \delta = \in \end{aligned}$$

จะได้ $d'(f(x_1, x_2), f(0, 0)) < \in$

แสดงว่า f ต่อเนื่องที่จุด (0, 0) ■

ในวิชาการวิเคราะห์จำนวนจริง (Real Analysis) มีทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องและฟังก์ชันประกอบซึ่งกล่าวว่าฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย ในปริภูมิเมตริกก็เช่นเดียวกันจะได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.16 กำหนดให้ (X, d), (Y, d') และ (W, d'') เป็นปริภูมิเมตริกโดยที่ $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$, $g: (Y, d') \rightarrow (W, d'')$ และ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันประกอบ ซึ่ง $g \circ f: (X, d) \rightarrow (W, d'')$ ถ้า f ต่อเนื่องที่ x_o และ g ต่อเนื่องที่ $f(x_0)$ แล้ว $g \circ f$ ต่อเนื่องที่ x_o

พิสูจน์ ให้ $\in > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า g ต่อเนื่องที่ $f(x_o)$

ดังนั้น จะมี $\delta' > 0$ ซึ่งกำหนด $y \in Y$ ถ้า $d'(y, f(x_o)) < \delta'$ แล้วจะได้ว่า

$d''(g(y), g(f(x_o))) < \in$

แต่ $y = f(x)$

เพราะฉะนั้น ถ้า $d'(f(x), f(x_o)) < \delta'$ แล้วจะได้ว่า

$d''(g(f(x)), g(f(x_0))) < \in$

เพราะว่า $\delta' > 0$ และ f ต่อเนื่องที่ x_o

ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุก ๆ $x \in X$ ถ้า $d(x, x_o) < \delta$ แล้วจะได้ว่า

$d'(f(x), f(x_o)) < \delta'$

นั่นคือ สำหรับ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุก ๆ $x \in X$

ถ้า $d(x, x_o) < \delta$ แล้ว $d''(g(f(x)), g(f(x_o))) < \in$

หรือ ถ้า $d(x, x_o) < \delta$ แล้ว $d''(g \circ f(x), g \circ f(x_o)) < \in$

เพราะฉะนั้น $g \circ f$ ต่อเนื่องที่ x_o ■

ทฤษฎีบท 2.17 กำหนดให้ (X, d), (Y, d′) และ (W, d″) เป็นปริภูมิเมตริก และ $f: (X, d) \to (Y, d'), g: (Y, d') \to (W, d'')$ และ $g \circ f: (X, d) \to (W, d'')$ แล้วจะได้ว่า ถ้า f และ g ต่อเนื่อง แล้ว $g \circ f$ ต่อเนื่อง

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.16 ■

จากหัวข้อ 2.4 เรานิยามลำดับลู่เข้าในรูปทรงกลมเปิด เช่นเดียวกันสำหรับความต่อเนื่อง เรานิยามในรูปทรงกลมเปิดได้ดังนี้

จากนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่อง, $f: (X, d) \to (Y, d')$ f ต่อเนื่องที่ x_o ใน X ก็ต่อเมื่อทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $d(x, x_0) < \delta$ แล้ว $d'(f(x), f(x_o)) < \in$

ดังนั้น $x \in S(x_o; \delta) \to f(x) \in S(f(x_o); \in)$

$f(x) \in f(S(x_o; \delta)) \to f(x) \in S(f(x_o); \in)$

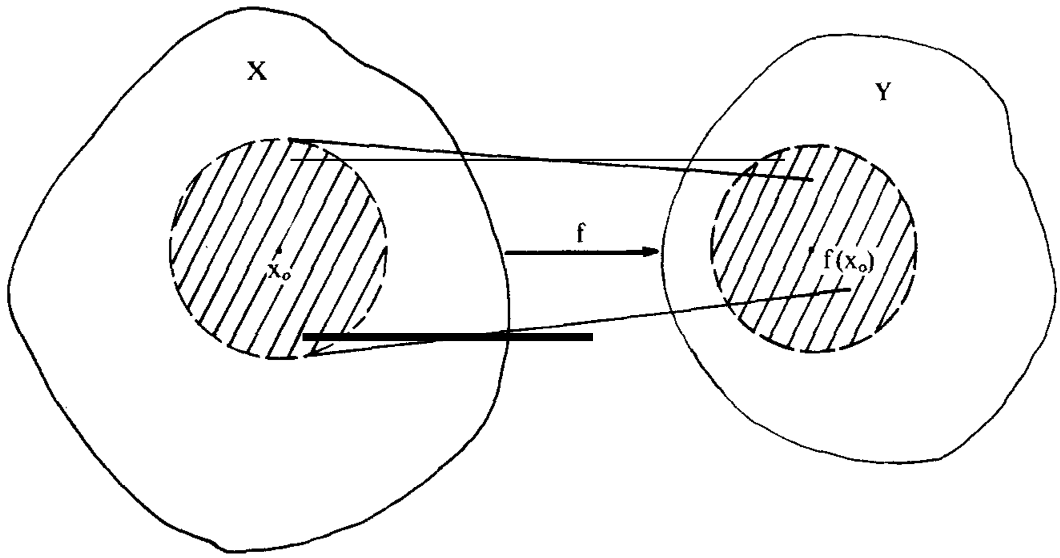
นั่นคือ $f(S(x_o; \delta)) \subseteq S(f(x_o); \in)$

ดังนั้นจะสรุปนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่องในรูปของทรงกลมเปิดได้ดังนี้

นิยาม 2.17 กำหนดให้ (X, d), (Y, d′) เป็นปริภูมิเมตริก $f: (X, d) \to (Y, d')$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ $x_o \in X$ ก็ต่อเมื่อทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$f(S(x_o; \delta)) \subseteq S(f(x_o); \in)$$

ดังรูป 2.24



รูป 2.24

จากนิยามของความต่อเนื่องในรูปเซตเปิดได้นำมาใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเซตเปิด เซตปิด และการลู่เข้าของลำดับ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.18 กำหนดให้ (X, d), (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริก และ $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x_o \in X$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ ทรงกลมเปิด $S(f(x_o); \in)$ ของ $f(x_o)$ $f^{-1}(S(f(x_o); \in))$ เป็นทรงกลมเปิดของ x_o

พิสูจน์ $(\rightarrow)$ สมมุติ f ต่อเนื่องที่ $x_o \in X$

ให้ $S(f(x_o); \in)$ เป็นทรงกลมเปิดใด ๆ ของ $f(x_o)$

จากนิยามของความต่อเนื่อง f ต่อเนื่องที่ x_o ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $d(x, x_o) < \delta$ แล้ว $d'(f(x), f(x_o)) < \in$

นั่นคือ ถ้า $x \in S(x_o; \delta)$ แล้ว $f(x) \in S(f(x_o); \in)$

ถ้า $f(x) \in f(S(x_o; \delta))$ แล้ว $f(x) \in S(f(x_o); \in)$

จะได้ว่า $f(S(x_o; \delta)) \subseteq S(f(x_o); \in)$

แต่จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับเซตจะได้ว่า

$$S(x_o; \delta) \subseteq f^{-1}(S(f(x_o); \in))$$

นั่นคือ $f^{-1}(S(f(x_o); \in))$ เป็นทรงกลมเปิดของ x_o

$(\leftarrow)$ สมมุติทุก ๆ ทรงกลมเปิด $S(f(x_o); \in)$ ของ $f(x_o)$ $f^{-1}(S(f(x_o); \in))$ เป็นทรงกลมเปิดของ x_o

ให้ $\in$ >o เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะฉะนั้น $S(f(x_o); \in)$ เป็นทรงกลมเปิดของ $f(x_o)$

จากสมมุติฐาน $f^{-1}(S(f(x_o); E))$ เป็นทรงกลมเปิดของ x_o

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(S(f(x_o); \in))$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี $d > 0$ ซึ่ง $x_0 \in S(x_o; \delta) \subseteq f^{-1}(S(f(x_o); \in))$

นั่นคือ $f(S(x_o; \delta) \subseteq S(f(x_o); \in)$

ดังนั้นถ้า $f(x) \in f(S(x_o; \delta))$ แล้ว $f(x) \in S(f(x_o); \in)$

หรือ ถ้า $x \in S(x_o; \delta)$ แล้ว $f(x) \in S(f(x_o); \in)$

ถ้า $d(x, x,) < d$ แล้ว $d'(f(x), f(x_o)) < \in$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ∎

ทฤษฎีบท 2.19 กำหนดให้ (X, d) และ (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริก f เป็นฟังก์ชัน จาก (X, d) ไปยัง (Y, d') แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องก็ต่อเมื่อทุก ๆ เซตย่อยเปิด G ของ Y $f^{-1}(G)$ เป็นเซตย่อยเปิดของ X

พิสูจน์ $(\rightarrow)$ สมมุติ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ G เป็นเซตย่อยเปิดของ Y

ให้ x_o เป็นจุดใด ๆ ใน $f^{-1}(G)$

ดังนั้น $f(x_o) \in G$

เพราะว่า G เป็นเซตเปิดใน Y

ดังนั้นจะมี $\in > 0$ ซึ่ง $f(x_o) \in S(f(x_o); \in) \subseteq G$

จากทฤษฎีบท 2.18 จะได้ว่า $f^{-1}(S(f(x_o); \in))$ เป็นทรงกลมเปิดของ X

แต่ $f^{-1}(S(f(x_o); \in)) \subseteq f^{-1}(G)$

ดังนั้น $f^{-1}(G)$ เป็นเซตเปิดของ X

$(\leftarrow)$ สมมุติ ทุก ๆ เซตย่อยเปิด G ของ Y $f^{-1}(G)$ เป็นเซตย่อยเปิดของ X

ให้ x_o เป็นจุดใด ๆ ใน X และ $S(f(x_o); \in)$ เป็นทรงกลมเปิดใน Y

เพราะว่า $S(f(x_o); \in)$ เป็นเซตเปิด

โดยสมมุติฐานจะได้ว่า $f^{-1}(S(f(x_o); \in))$ เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $x_o \in S(x_o; \delta) \subseteq f^{-1}(S(f(x_o); \in))$

จะได้ว่า $f(S(x_o; \delta) \subseteq S(f(x_o); \in)$

แสดงว่า ถ้า $f(x) \in f(S(x_o; \delta)$ แล้ว $f(x) \in S(f(x_o); \in)$

หรือถ้า $x \in S(x_o; \delta)$ แล้ว $f(x) \in S(f(x_o); \in)$

นั่นคือ ถ้า $d(x, x_o) < \delta$ แล้ว $d'(f(x), f(x_o)) < \in$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ■

ทฤษฎีบท 2.20 กำหนดให้ (X, d), (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริก f เป็นฟังก์ชันจาก (X, d) ไปยัง (Y, d') แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละเซตย่อยปิด F ของ Y จะได้ว่า $f^{-1}(F)$ เป็นเซตปิดของ X

พิสูจน์ เพราะว่า $F \subseteq Y$ ดังนั้น $Y - F$ เป็นเซตเปิด

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ $Y - F$ เป็นเซตเปิดแล้ว $f^{-1}(Y - F)$ เป็นเซตเปิด

แต่ $f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$ (พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ $Y - F$ เป็นเซตเปิดแล้ว $X - f^{-1}(F)$ เป็นเซตเปิด

หรือ f ต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ F เป็นเซตปิด แล้ว $f^{-1}(F)$ เป็นเซตปิด ■

ทฤษฎีบท 2.21 กำหนดให้ (X, d) และ (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริก f เป็นฟังก์ชันจาก (X, d) ไปยัง (Y, d') แล้ว f ต่อเนื่องที่ x_o ก็ต่อเมื่อ ถ้า $\{x_n\}$ ลู่เข้า x_o แล้ว $\{f(x_n)\}$ ลู่เข้า $f(x_o)$

พิสูจน์ (→) สมมุติ f ต่อเนื่องที่ x_o

ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน X ที่ลู่เข้า x_o

ต้องการแสดงว่า $\{f(x_n)\}$ ลู่เข้า $f(x_o)$

ให้ $S(f(x_o); \in)$ เป็นทรงกลมเปิดซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $f(x_o)$

เพราะว่า f ต่อเนื่องดังนั้นจะมีทรงกลมเปิด $S(x_o; \delta)$ จุดศูนย์กลางที่ x_o

ซึ่ง $f(S(x_o; \delta)) \subseteq S(f(x_o); \in)$

เพราะว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้า x_o

ดังนั้น $x_n \in S(x_o; \delta)$

เพราะฉะนั้น $f(x_n) \in f(S(x_o; \delta)) \subseteq S(f(x_o); \in)$

ดังนั้น $\{f(x_n)\}$ ลู่เข้า $f(x_o)$

(←) สมมุติถ้า $\{x_n\}$ ลู่เข้า x_o แล้ว $f(x_n)$ ลู่เข้า $f(x_o)$

ต้องการแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ x_o

สมมุติ f ไม่ต่อเนื่องที่ x_o และต้องการแสดงว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้า x_o แต่ $f(x_n)$ ไม่ลู่เข้า $f(x_o)$

จากสมมุติฐาน จะได้ว่ามี $S(f(x_o); \in)$ ซึ่งทุก ๆ ทรงกลมเปิด $S(x_o; \delta)$
$f(S(x_o; \delta)) \nsubseteq S(f(x_o); \in)$

เลือก x_1 จาก $S(x_o; 1)$

x_2 จาก $S\left(x_o; \frac{1}{2}\right)$

x_3 จาก $S\left(x_o, \frac{1}{3}\right)$

. . . .

. . . .

x_n จาก $S\left(x_o; \frac{1}{n}\right)$

. . . .

ดังนั้นจะมีลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \in S\left(x_o; \frac{1}{n}\right)$ และ $f(x_n) \notin S(f(x_o); \in)$

ดังนั้นจะได้ว่า x_n ลู่เข้า x_o แล้ว $f(x_n)$ ไม่ลู่เข้า $f(x_o)$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x_o ■

แบบฝึกหัด 2.5

1. กำหนดให้ (X, d) และ (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริก f เป็นฟังก์ชันจาก (X, d) ไปยัง (Y, d') จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

   (1) $X = Y = R$, $d = d'$ = เมตริกปกติ และ
   $f(x) = 2x-1$

   (2) $X = Y = R^2$, d = เมตริกปกติ d' = เมตริกเต็มหน่วย และ
   $f(x, y) = x+y$

   (3) $X = Y = R^2$, d = เมตริกเต็มหน่วย d' = เมตริกปกติ และ
   $f(x, y) = 2x-y$

   (4) $X = Y = R^2$, d = เมตริกปกติ d' นิยามโดย
   $d'(x, y) = \max\{ |x_1-y_1|, |x_2-y_2| \}$ และ
   $f(x, y) = x-y$

2. กำหนดให้ (X, d) และ (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริก f เป็นฟังก์ชันจาก (X, d) ไปยัง (Y, d') ถ้า f เป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function) แล้วจงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

   ใช้ผลจากข้างต้นแสดงว่าฟังก์ชันต่อเนื่องไม่จำเป็นต้องใช้เงื่อนไขภาพ (image) ของเซตเปิดต้องเป็นเซตเปิด

3. กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก มี d เป็นเมตริก ให้ x_o เป็นจุดตรึงใน X จงแสดงว่าฟังก์ชันค่าจริง (real function) f_{x_o} นิยามบน X โดยที่ $f_{x_o}(x) = d(x, x_o)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

4. กำหนดให้ (X, d) และ (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริก $A \neq \varnothing$, $A \subseteq X$ ถ้า f และ g เป็นฟักง์ชันต่อเนื่องจาก (X, d) ไปยัง (Y, d') โดยที่ $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$ แล้ว $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in \bar{A}$

5. กำหนดให้ (X, d) และ (Y, d) เป็นปริภูมิเมตริก f เป็นฟังก์ชันจาก (X, d) ไปยัง (Y, d') จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลย์กัน

   (1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

   (2) ถ้า F เป็นเซตปิดบน Y แล้ว $f^{-1}(F)$ เป็นเซตปิดบน X

   (3) สำหรับ $A \subseteq X$, $f(\bar{A}) \subseteq f(\bar{A})$