บทที่ 1
ความรู้พื้นฐานเบื้องต้น
Some Basic Concepts

เรื่องที่จะกล่าวในบทนี้เป็นความรู้พื้นฐานเบื้องต้นซึ่งจะนำไปใช้อ้างอิงในการศึกษาบทต่อ ๆ ไป ส่วนใหญ่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่เคยศึกษามาแล้วทั้งสิ้น แต่ให้ไว้เป็นการทบทวน และประกอบการศึกษาวิชานี้ในรูปของนิยามและทฤษฎีบทที่สำคัญ ๆ

1.1 ตรรกศาสตร์

Logic

ประพจน์ (proposition) หมายถึงประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่ทราบค่าความจริง (truth value) ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เช่น แดงกำลังดูทีวี 2 เป็นจำนวนเต็มบวก แต่ประโยคคำสั่ง คำถาม หรือประโยคที่มีตัวแปร เช่น จงไปปิดหน้าต่าง x เป็นจำนวนเต็มบวกไม่ถือว่าเป็นประพจน์

เราแทนประพจน์ด้วยตัวอักษร p, q, r, ... โดยการใช้ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์จะทำให้เกิดประพจน์ใหม่ได้

ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์มีดังนี้

(1) นิเสธ (negation) : $\sim p$
"ไม่ p หรือ p เป็นเท็จ"

(2) ตัวเชื่อมการเลือก (disjunction) : $p \vee q$
"p เป็นจริง **หรือ** q เป็นจริง"

(3) ตัวเชื่อมร่วม (conjunction) : $p \wedge q$
"p เป็นจริง **และ** q เป็นจริง"

(4) การแจงเหตุสู่ผล (implication) : $p \rightarrow q$
"**ถ้า** p เป็นจริง **แล้ว** q เป็นจริง"

(5) สมมูล (equivalence) : $p \leftrightarrow q$ หรือ $p \equiv q$
"p เป็นจริง **ก็ต่อเมื่อ** q เป็นจริง"

หมายเหตุ ค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ มีค่าเหมือนกันกับ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

จากตัวเชื่อมข้างต้นจะได้ตารางค่าความจริงดังนี้

p	$\sim p$
T	F
F	T

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q[(p \to q) \wedge (q \to p)]$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

จากการสังเกตตารางค่าความจริงพบว่า $p \to q$ มีค่าความจริงเหมือนกับ $\sim q \to \sim p$ ซึ่งเราเรียกว่าข้อความขัดแย้งสลับที่ (contrapositive statement) ซึ่งมีประโยชน์มากในการพิสูจน์ข้อความที่ไม่สามารถพิสูจน์โดยตรงได้

วลีบอกปริมาณ (quantifier) ใช้ประกอบกับตัวแปร แล้วเขียนนำหน้าประโยคที่มีตัวแปร มี 2 แบบคือ ในความหมาย "ทุก ๆ ตัว" ใช้สัญลักษณ์ "$\forall$" และในความหมาย "มีบางตัว" ใช้สัญลักษณ์ "$\exists$" เช่น ทุก ๆ x ซึ่งเป็นจำนวนจริง $x^2 \geqslant 0$ มีจำนวนจริง a, b ซึ่ง $a^2 + b^2 = 25$ เขียนในรูปสัญลักษณ์คือ

$$\forall x \in R \ (x^2 \geqslant 0)$$

$$\exists a \in R, \exists b \in R \ (a^2 + b^2 = 25)$$

1.2 เซต

Set

คำว่า "เซต" ใช้เมื่อต้องการบ่งบอกถึงพวก, หมู่ หรือกลุ่มของสิ่งของอย่างใดอย่างหนึ่งโดยต้องทราบแน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่มหรือไม่อยู่ในกลุ่ม สิ่งที่อยู่ในกลุ่มเรียกว่าสมาชิก (elements) ของเซต

สมาชิกของเซตอาจเป็นเซตก็ได้

เซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจำกัด หรือบอกจำนวนสมาชิกได้ว่ามีมากน้อยเท่าใด จำนวนสมาชิกอาจเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ก็ได้ เรียกเซตนี้ว่าเซตจำกัด (finite set) ส่วนเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เรียกว่า เซตอนันต์ (infinite set) เซตที่ไม่มีสมาชิกหรือจำนวนสมาชิกเป็น

ศูนย์เรียกว่า เซตว่าง (empty set) ใช้สัญลักษณ์ $\varnothing$ เซตของสิ่งทั้งหมดที่กำลังศึกษาหรือกำลังพิจารณาเรียกว่า เอกภพสัมพัทธ์ (universal set) ใช้สัญลักษณ์ U

เซตใช้ในกรณีที่ทราบว่าสิ่งใดเป็นสมาชิกหรือไม่เท่านั้น การเขียนเซตนิยมใช้อักษรตัวใหญ่ A, B, C,... แทนเซต และอักษรตัวเล็ก a, b, c,... แทนสมาชิกของเซต

สัญลักษณ์ $\in$ ใช้ในความหมาย "เป็นสมาชิกของ" เช่น $a \in A$ หมายความว่า a เป็นสมาชิกของ A

1.3 การเขียนเซต

ในการเขียนเซตเพราะว่าสมาชิกของเซตหนึ่ง ๆ มีคุณสมบัติบางอย่างร่วมกัน ดังนั้นการเขียนเซตจึงมีใช้กัน 2 แบบ คือ

(1) แบบแจกแจงสมาชิก

(2) แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

สำหรับการเขียนเซตทั้ง 2 แบบนี้ แบบแจกแจงสมาชิกใช้เขียนในกรณีที่เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกน้อย ๆ เช่น เซต A เป็นเซตของจำนวนนับที่มากกว่า 3 แต่น้อยกว่า 7

ดังนั้น $A = \{4, 5, 6\}$

ถ้าเซตมีสมาชิกมาก ๆ หรือเป็นเซตอนันต์ หรือเป็นเซตที่ไม่สามารถแจกแจงสมาชิกทั้งหมดได้ จะนิยมเขียนเซตโดยการบอกเงื่อนไขของสมาชิก โดยสมมุติว่าคุณสมบัติร่วมของสมาชิกคือ P(x) ดังนั้น

$$A = \{x|x \text{ มีคุณสมบัติ } P(x)\}$$

อย่างไรก็ตาม จากตัวอย่างของการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกของ A ถ้านำมาเขียนแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกจะได้

$$A = \{x|x \text{ เป็นจำนวนนับ และ } 3 < x < 7\}$$

1.4 ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

Set Relations

กำหนด A, B เป็นเซตใด ๆ

นิยาม 1.1 เซตย่อย (subset)

สำหรับเซต A, B ใด ๆ ซึ่งทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B จะเรียก A ว่าเป็นเซตย่อยของ B แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \subseteq B$$

นั่นคือ $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

ข้อสังเกต (1) สำหรับ A ใด ๆ $\varnothing \subseteq A$

(2) $A \subseteq A$

นิยาม 1.2 เซตย่อยแท้ (proper subset)

ถ้า $A \subseteq B$ โดยที่มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัวใน B ไม่เป็นสมาชิกของ A แล้วจะเรียก A ว่าเป็นเซตย่อยแท้ของ B แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \subset B$$

นิยาม 1.3 การเท่ากันของเซต (set equality)

ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ แล้วจะเรียกว่า A เท่ากันกับ B (คือเซตเดียวกัน) แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A = B$$

นั่นคือ $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ $C = \{3, 2, 1\}$

จะได้ว่า $A \subseteq B$, $C \subseteq B$, $A \subseteq C$

$A \subset B$, $C \subset B$, $A \not\subset C$

$A = C$ แต่ $B \neq C$ ∎

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $A \not\subseteq B$ หมายความว่า A ไม่เป็นเซตย่อยของ B

สัญลักษณ์ $A \not\subset B$ หมายความว่า A ไม่เป็นเซตย่อยแท้ของ B

1.5 การดำเนินการของเซต

Operation of Set

ตัวดำเนินการในเรื่องเซตมีทั้งหมด 4 แบบ ใช้เชื่อมระหว่างเซต 2 เซตขึ้นไป แล้วทำให้เกิดเซตใหม่ มีดังนี้

(1) ผลผนวก (union)

(2) ผลร่วม (intersection)

(3) ผลต่าง (difference)

(4) คอมพลีเมนต์ (complement)

นิยาม 1.4 ผลผนวกของ A และ B คือเซตที่มีสมาชิกอยู่ใน A หรือ B แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \cup B$$

นั่นคือ $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

นิยาม 1.5 ผลร่วมของ A และ B คือเซตที่มีสมาชิกอยู่ใน A และ B แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \cap B$$

นั่นคือ $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$

นิยาม 1.6 ผลต่างของ A, B คือเซตที่มีสมาชิกอยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A - B$$

"อ่านว่าผลต่างของ B เทียบกับ A"

นั่นคือ $A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$

นิยาม 1.7 คอมพลีเมนต์ของ A คือเซตที่สมาชิกไม่เป็นสมาชิกของ A แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A'$$

นั่นคือ $A' = \{x|x \in U \wedge x \notin A\}$

หมายเหตุ (1) $A' = U - A$

(2) ในกรณีทั่ว ๆ ไป สำหรับเซต $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ จะใช้สัญลักษณ์

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{ แทน } A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n$$

และ

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \text{ แทน } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n$$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดให้ $\mathbf{u} = \{1, 2, 3, \ldots) 10\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 5, 7\}$

$c = \{2, 4, 6\}$

$D = \{1, 3\}$

ดังนั้นจะได้

$A \text{ U } B = \{1, 3, 5, 7\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$A \cap B = \{3\}$

$A \cap C = \{2\}$

$A - D = \{2\}$

$B - D = \{5, 7\}$

$A' = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$B' = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$

นิยาม 1.8 ถ้า A, B เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน หรือ $A \cap B = \varnothing$ แล้วเรียก A และ B ว่าเป็นเซตต่างสมาชิก (disjoint set)

จากตัวอย่าง 1.2 $B \cap C = \varnothing$

ดังนั้น B และ C เป็นเซตต่างสมาชิก

1.6 ชั้น เซตกำลัง

Class, Power Set

นิยาม 1.9 เซตที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นเซต เรียกว่า ชั้น (class) ซึ่งจะใช้อักษร $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$ แทนชั้น ตัวอย่างเช่น

กำหนดให้ $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ และ $D = \{0\}$ แล้ว $\mathscr{B} = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{0\}\}$ เป็นชั้นซึ่งมีสมาชิกคือ เซต A, B, C และ D

นิยาม 1.10 เซตกำลังของ A (power set of A) คือเซตซึ่งสมาชิก คือสับเซตทั้งหมดของ A แทนด้วยสัญลักษณ์

$$\mathscr{P}(A)$$

นั่นคือ $\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

ถ้า A เป็นเซตจำกัดซึ่งมีสมาชิก n ตัว แล้ว A มีเซตย่อยทั้งหมด 2^n ตัว นั่นแสดงว่า จำนวนสมาชิกของ $\mathscr{P}(A)$ เท่ากับ 2^n ตัวด้วย

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $A = \{0, 1\}$

จะได้ว่า $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

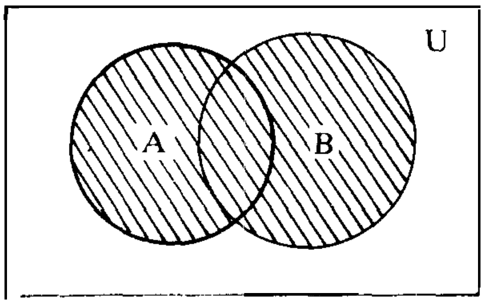
กำหนดให้ $B = \{0, 1, \{0, 1\}\}$

จะได้ว่า $\mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{\{0, 1\}\}, \{0, 1\}, \{0, \{0, 1\}\}, \{1, \{0, 1\}\}, \{0, 1, \{0, 1\}\}\}$ ■

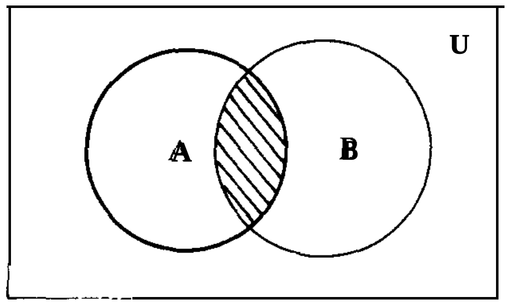
1.7 แผนภาพเวนน์

Venn Diagram

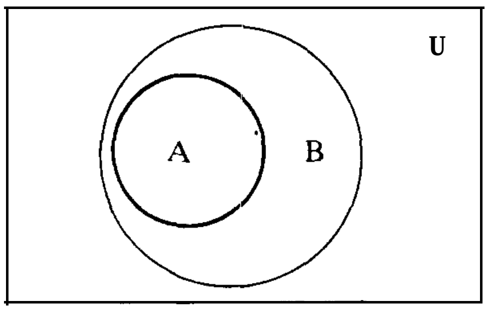
แผนภาพเวนน์ใช้ในการศึกษาแก้ปัญหาเกี่ยวกับเรื่องเซต โดยใช้วงกลม หรือวงรี แทนเซต รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ล้อมรอบแทนเอกภพสัมพัทธ์ U และใช้บริเวณที่แรเงาแทนเซตที่กำลังศึกษา เช่น



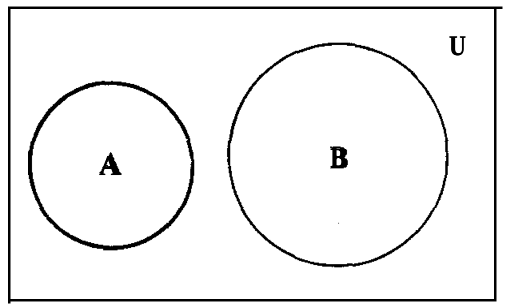
A U B



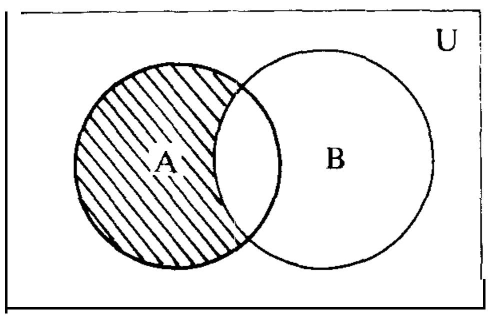
$A \cap B$



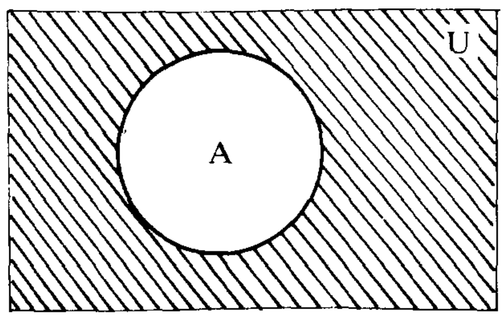
$A \subseteq B$



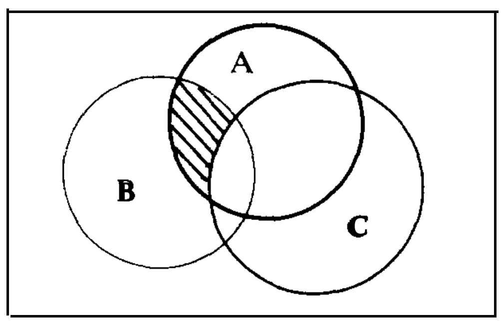
$A \cap B = 0$



A - B



A'



$(A \cap B)-C$

รูป **1.1**

1.8 พีชคณิตของเซต

Algebra of Set

จากการดำเนินการข้างต้น จะได้กฎทางพีชคณิตต่อไปนี้

(1) กฎการซ้ำ (idempotent law)

$$A \text{ U } A = A \qquad A \cap A = A$$

(2) กฎการสลับที่ (commutative law)

$$A \text{ U } B = B \text{ U } A \qquad A \cap B = B \cap A$$

(3) กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative law)

$$A \text{ U } (B \text{ U } C) = (A \text{ U } B) \text{ U } C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(4) กฎการกระจาย (distributive law)

$$A \text{ U } (B \cap C) = (A \text{ U } B) \cap (A \text{ U } C)$$

$$A \cap (B \text{ U } C) = (A \cap B) \text{ U } (A \cap C)$$

(5) กฎเอกลักษณ์ (identity law)

$$A \cap \varnothing = 0 \qquad A \cap U = A$$

$$A \text{ U } 0 = A \qquad A \text{ U } U = U$$

(6) กฎคอมพลีเมนต์ (complement law)

$$(A')' = A \qquad 0' = u$$

$$U' = 0 \qquad `A \text{ U } A' = U$$

$$A \cap A' = 0$$

(7) กฎของเดอ มอร์กอง (De Morgan's law)

$$A-(B \text{ u } C) = (A-B) \text{ n } (A-C)$$

$$A-(B \text{ n } C) = (A-B) \text{ u } (A-C)$$

หมายเหตุ จากกฎของเดอ มอร์กอง ข้อสรุปต่อไปนี้ใช้กันมาก

(1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(2) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(3) $\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)' = \bigcap_{k=1}^{n} A'_k$

ตัวอย่าง 1.4 จงเขียนรูปที่ง่ายที่สุดของ $[(A \cup B') \cap B]'$

วิธีทำ $[(A \cup B') \cap B]' = (A \cup B')' \cup B'$

$= (A' \cap B) \cup B'$

$= (A' \cup B') \cap (B \cup B')$

$= (A' \cup B') \cap U$

$= A' \cup B'$ ■

ข้อสรุปเกี่ยวกับเซต

(1) $0 \subseteq A$, $A \subseteq A$

(2) ถ้า $A \subseteq \varnothing$ แล้ว $A = 0$

(3) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

(4) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

(5) $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$

(6) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$

(7) $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A - B = 0$

(8) $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subseteq A'$

(9) $A - L = A \cap B'$

(10) 61 $A \cap B = 0$ แล้ว $A \subseteq B'$, $B \subseteq A'$

(11) ถ้า $A \cup B = 0$ แล้ว $A = B = 0$

(12) $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$

(13) $A \in \mathscr{P}(A)$, $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$, $\varnothing \subseteq \mathscr{P}(A)$

(14) $A' - B' = B - A$

(15) ถ้า $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

1.9 วิธีการพิสูจน์

Method of Proof

ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีวิธีการพิสูจน์หลายวิธีด้วยกัน แต่ที่สำคัญ ๆ มีดังนี้

(1) จำเป็นและเพียงพอ (necessity and sufficiency)

ใช้ในการพิสูจน์ข้อความที่มีตัวเชื่อม "↔" (ก็ต่อเมื่อ) ตัวอย่างเช่น ต้องการพิสูจน์ทฤษฎีบทซึ่งมีข้อความว่า P เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ Q เป็นจริง จะมีการพิสูจน์แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนดังนี้

1. สมมุติ Q จริง แล้วแสดงให้ได้ว่า P เป็นจริง
2. สมมุติ P จริง แล้วแสดงให้ได้ว่า Q เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.5 จงพิสูจน์ว่า a เป็นเลขคี่ ก็ต่อเมื่อ $a+1$ เป็นเลขคู่

พิสูจน์ (1) สมมุติ $a+1$ เป็นเลขคู่

ดังนั้น $a+1 = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม

$$a = 2m - 1$$
$$= 2(m-1)+1$$

แต่ m เป็นจำนวนเต็ม $m-1$ เป็นจำนวนเต็มด้วย

เพราะฉะนั้น a เป็นเลขคี่

(2) สมมุติ a เป็นเลขคี่

ดังนั้น $a = 2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

$$a+1 = (2k+1)+1$$
$$= 2(k+1)$$

เพราะฉะนั้น $a+1$ เป็นเลขคู่ ■

(2) การแจงเหตุสู่ผล (implication)

ใช้ในการพิสูจน์ประโยค "ถ้า...แล้ว..." พิสูจน์โดยการสมมุติประโยคข้างหน้าแล้วสรุปประโยคข้างหลัง การพิสูจน์แบบนี้เป็นส่วนหนึ่งของการพิสูจน์แบบที่ 1 เช่น จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นเลขคี่ แล้ว a^2 เป็นเลขคี่ด้วย

(3) อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical induction)

วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ใช้พิสูจน์ประโยค $P(n)$ ว่าเป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนธรรมชาติ $n(n \in N)$ มีขั้นตอนพิสูจน์ดังนี้

ถ้า $S \subseteq N$ โดยที่

(1) $1 \in S$

(2) ถ้า $k \in S$ แล้ว $k+1 \in S$

แล้วจะได้ว่า $S = N$

ตัวอย่าง 1.6 จงพิสูจน์ว่า $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

พิสูจน์ พิสูจน์โดยใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $S = \{n | n \in N$ และมีคุณสมบัติ $P(n)\}$ โดยที่ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(1) ต้องการแสดงว่า $1 \in S$ หรือ $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$= 1$$

เพราะฉะนั้น $1 \in s$

(2) ต้องการแสดงว่า ถ้า k ES แล้ว $(k+1) \in S$

สมมุติ k ES

เพราะฉะนั้น $1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

ดังนั้น

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= (k+1)(\frac{k}{2}+1)$$

$$= (k+1)(\frac{k+2}{2})$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

แสดงว่า $k+1 \in S$

จะได้ว่า $$S = N$$

นั่นคือ $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $n \in N$ ■

(4) การพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง (proof by contradiction)

ทฤษฎีบทส่วนใหญ่พิสูจน์ได้โดยวิธีตรง ๆ แต่บางครั้งก็ไม่สามารถพิสูจน์ตรง ๆ ได้ ซึ่งจะต้องอาศัยการพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้งช่วยในการแก้ปัญหา วิธีการพิสูจน์ทำโดยสมมุติข้อความที่ต้องการพิสูจน์ว่าไม่จริงแล้วพิสูจน์หาข้อขัดแย้ง ซึ่งเมื่อได้ข้อขัดแย้งก็แสดงว่าที่สมมุติไว้ไม่จริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.7 จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

พิสูจน์ สมมุติ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะฉะนั้น $\sqrt{2}$ เขียนได้ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ $\frac{a}{b}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$

นั่นคือ $$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$2b^2 = a^2$$

แสดงว่า a^2 เป็นเลขคู่

ดังนั้น a เป็นเลขคู่

ให้ $a = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $2b^2 = (2m)^2$

$$= 4m^2$$

$$b^2 = 2m^2$$

แสดงว่า b^2 เป็นเลขคู่

ดังนั้น b เป็นเลขคู่ด้วย

ให้ $b = 2n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{b} = \frac{2m}{2n}$

$$= \frac{m}{n}$$

ซึ่งแสดงว่า $\frac{a}{b}$ ไม่ใช่เศษส่วนอย่างต่ำ

เกิดข้อขัดแย้ง (contradiction)

เพราะฉะนั้น $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ ■

1.10 ความสัมพันธ์

Relations

ความสัมพันธ์ใช้สำหรับของสองสิ่งหรือมากกว่าสองสิ่งขึ้นไป ความสัมพันธ์ของแต่ละสิ่งขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของสิ่งนั้น เช่น แดงมีความสัมพันธ์กับน้องชายชื่อดำ 2 มีความสัมพันธ์กับ 5 คือ 2 น้อยกว่า 5

สำหรับในทางคณิตศาสตร์จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างเซต 2 เซต หรือมากกว่า 2 เซตขึ้นไป

กำหนด A, B เป็นเซตใด ๆ

นิยาม 1.11 ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product) ของ A, B แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$ คือเซตที่มีสมาชิกอยู่ในรูปคู่อันดับ (a, b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$

นั่นคือ $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

สำหรับคู่อันดับ (a, b) และ (c, d) จะได้ว่า $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

โดยทั่ว ๆ ไป $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ เป็นเซตของอันดับ n จำนวน $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ โดยที่ $a_i \in A_i$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots n$

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2\}$

จงหา $A \times B$ และ $B \times A$

วิธีทำ

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

■

ข้อสังเกต (1) $A \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times A$

(2) $A \times B \neq B \times A$

(3) จำนวนสมาชิกของ $A \times B$ เท่ากับผลคูณของจำนวนสมาชิกของ A และ B

นิยาม 1.12 ถ้า A, B เป็นเซต $r \subseteq A \times B$ แล้วเรียก r ว่าความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ถ้า $(a, b) \in r$ แล้วเรียก a ว่ามีความสัมพันธ์ r กับ b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ a r b

นิยาม 1.13 โดเมน (domain) ของความสัมพันธ์ r คือเซตของสมาชิกของ A ที่มีความสัมพันธ์ r กับสมาชิกใน B อย่างน้อย 1 ตัว แทนด้วยสัญลักษณ์ D_r

เรนจ์ (range) ของความสัมพันธ์ r คือเซตของสมาชิกของ B ซึ่งมีความสัมพันธ์ r กับสมาชิกใน A อย่างน้อย 1 ตัว แทนด้วยสัญลักษณ์ R_r

นั่นคือ $(a, b) \in r \subseteq A \times B$ แล้ว

$$D_r = \{a \mid (a, b) \in r\}$$

$$R_r = \{b \mid (a, b) \in r\}$$

ข้อสังเกต จากนิยามของความสัมพันธ์ทำให้เราทราบว่าลักษณะของความสัมพันธ์ระหว่างเซตมีได้ 3 แบบ คือสมาชิกในโดเมนตัวหนึ่งมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์มากกว่า 1 ตัว สมาชิกในเรจน์ตัวหนึ่งมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในโดเมนมากกว่า 1 ตัว และสมาชิกในโดเมนและเรนจ์มีความสัมพันธ์ชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง

นอกจากนี้ยังพบว่า A, B เป็นเซต $r \subseteq A \times B$ แทนความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B แล้ว D_r อาจเท่ากับเซต A หรือเป็นเซตย่อยของ A เช่นเดียวกันกับ R_r อาจเท่ากันกับ B หรือเซตย่อยของ B ก็ได้

ตัวอย่าง 1.9 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b, c, d\}$

และ $r = \{(1, a), (1, b), (3, b), (2, d)\}$

จงหาโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ r

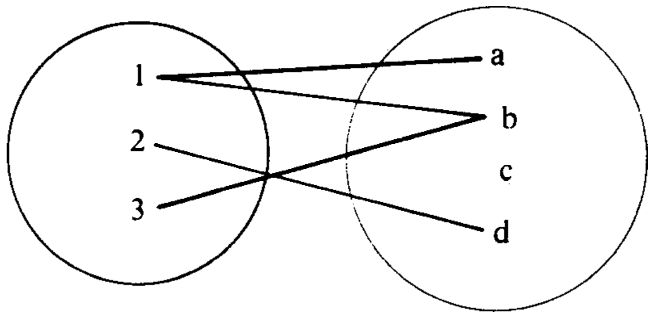
วิธีทำ เพราะว่า

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}$$

จะเห็นว่า $r \subsetneq A \times B$

$$D_r = \{1, 2, 3\} = A$$

$R_r = \{a, b, d\} \subsetneq B$ ดังรูป 1.2,



รูป 1.2

จากรูปจะเห็นว่า 1 r a, 1 r b, 2 r d และ 3 r b ■

1.11 คุณสมบัติของความสัมพันธ์ที่ควรทราบ

กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A นั่นคือ $r \subseteq A \times A$ จะได้คุณสมบัติต่อไปนี้

(1) คุณสมบัติสะท้อน (reflexive)

นิยาม 1.14 ความสัมพันธ์ r เรียกว่ามีคุณสมบัติสะท้อน ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ สมาชิก $a \in A$ แล้ว $(a, a) \in r$

นั่นคือ r มีคุณสมบัติสะท้อน $\leftrightarrow$ (a r a สำหรับทุก ๆ $a \in A$)

(2) คุณสมบัติสมมาตร (symmetric)

นิยาม 1.15 ความสัมพันธ์ r เรียกว่ามีคุณสมบัติสมมาตรก็ต่อเมื่อ ถ้า $(a, b) \in r$ แล้ว $(b, a) \in r$

นั่นคือ r มีคุณสมบัติสมมาตร $\leftrightarrow$ (a r b $\rightarrow$ b r a)

(3) คุณสมบัติถ่ายทอด (transitive)

นิยาม 1.16 ความสัมพันธ์ r เรียกว่ามีคุณสมบัติถ่ายทอดก็ต่อเมื่อ ถ้า $(a, b) \in r$ และ $(b, c) \in r$ แล้ว $(a, c) \in r$

นั่นคือ r มีคุณสมบัติถ่ายทอด $\leftrightarrow$ (a r b $\wedge$ b r c $\rightarrow$ a r c)

(4) ปฏิสมมาตร (antisymmetric)

นิยาม 1.17 ความสัมพันธ์ r เรียกว่ามีคุณสมบัติปฏิสมมาตร ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(a, b) \in r$ และ $(b, a) \in r$ แล้ว $a = b$

นั่นคือ r มีคุณสมบัติปฏิสมมาตร $\leftrightarrow$ $(a\ r\ b \wedge b\ r\ a \rightarrow a = b)$

(5) การเป็นอันดับบางส่วน (partial ordering)

นิยาม 1.18 ความสัมพันธ์ r เป็นอันดับบางส่วนของ A ก็ต่อเมื่อ r มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. r มีคุณสมบัติสะท้อน
2. r มีคุณสมบัติการถ่ายทอด
3. r มีคุณสมบัติปฏิสมมาตร

(6) การเป็นอันดับเชิงเส้น (linear ordering)

นิยาม 1.19 ความสัมพันธ์ r เป็นอันดับเชิงเส้นของเซต A ก็ต่อเมื่อ r มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. r มีคุณสมบัติการเป็นอันดับบางส่วน
2. ถ้า $a, b \in A$ แล้ว $(a, b) \in r$ หรือ $(b, a) \in r$

(7) ความสัมพันธ์สมมูลย์ (equivalence relations)

นิยาม 1.20 ความสัมพันธ์ r เรียกว่า ความสัมพันธ์สมมูลย์ก็ต่อเมื่อ r มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. r มีคุณสมบัติสะท้อน
2. r มีคุณสมบัติสมมาตร
3. r มีคุณสมบัติถ่ายทอด

1.12 ฟังก์ชัน

Function

นิยาม 1.21 ให้ A, B เป็นเซตใด ๆ แล้วฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B คือเซตของคู่อันดับใน $A \times B$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า (a, b) และ (a, b') เป็นสมาชิกของ f แล้ว $b = b'$ แทนด้วยสัญลักษณ์

$$f : A \rightarrow B$$

โดยทั่ว ๆ ไปจะเขียน $y = f(x)$ แทน $(x, y) \in f$ และอ่านว่า "y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด x"

ข้อสังเกต ถ้า $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B แล้วจะได้

(1) $f \subseteq A \times B$

(2) ทุก ๆ สมาชิก $x \in A$ จะมีสมาชิก $y \in B$ ซึ่ง $(x, y) \in f$ และถ้า (x, y_1), $(x, y_2) \in f$ แล้ว $y_1 = y_2$

ถ้า $f : A \rightarrow B$ เรียก A ว่าโดเมนของ f ใช้สัญลักษณ์ D_f และเรียก B ว่าโคโดเมน (co-domain) ของ f ส่วนเรนจ์ของ f ใช้สัญลักษณ์ R_f คือเซตย่อยของ B ซึ่งเป็นภาพ (image) ของสมาชิกใน A

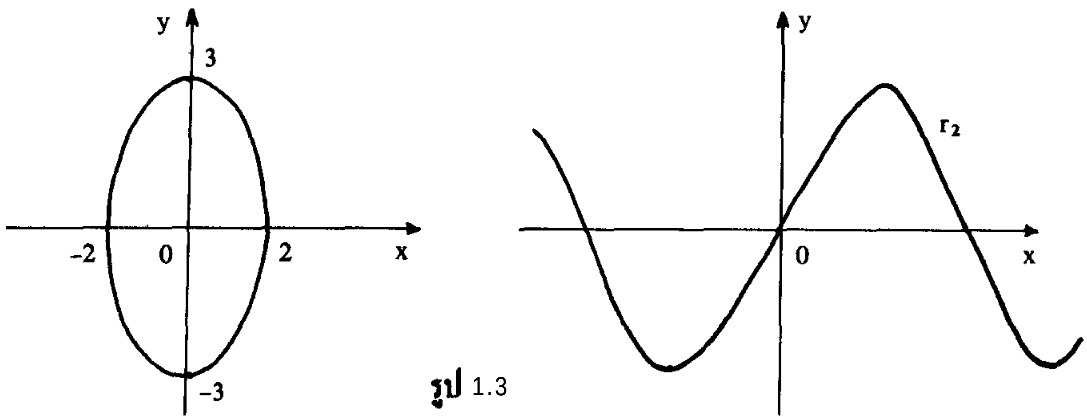
ดังนั้น $\quad R_f = \{f(a) | a \in A\} \subseteq B$

ตัวอย่าง 1.10 กำหนดให้ R แทนเซตของเลขจำนวนจริง และ

$$r_1 = \{(x, y) | x, y \in R, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$$

$$r_2 = ((x, y) | x, y \in R, y = \sin x\}$$

วิธีทำ รูปของ r_1, r_2 คือ



รูป 1.3

r_1 ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะว่ามีคู่ลำดับ x ในโดเมนจับคู่กับสมาชิก 2 ตัว ในเรนจ์ ตัวอย่างเช่น (0, 3), (0, -3) เป็นสมาชิกของ r_1

r_2 เป็นฟังก์ชันโดยมีโดเมนคือ R โคโดเมนคือ R แต่เรนจ์ของฟังก์ชันคือ [-1, 1] ■

กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B จะแบ่งฟังก์ชัน f ออกได้เป็น 3 ลักษณะดังนี้

(1) **ฟังก์ชันทั่วถึง** (surjective function, onto function)

นิยาม 1.22 ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เรียกว่าฟังก์ชันทั่วถึง หรือฟังก์ชันจาก A ไปบน B ก็ต่อเมื่อเรนจ์ของฟังก์ชัน f เท่ากับ B

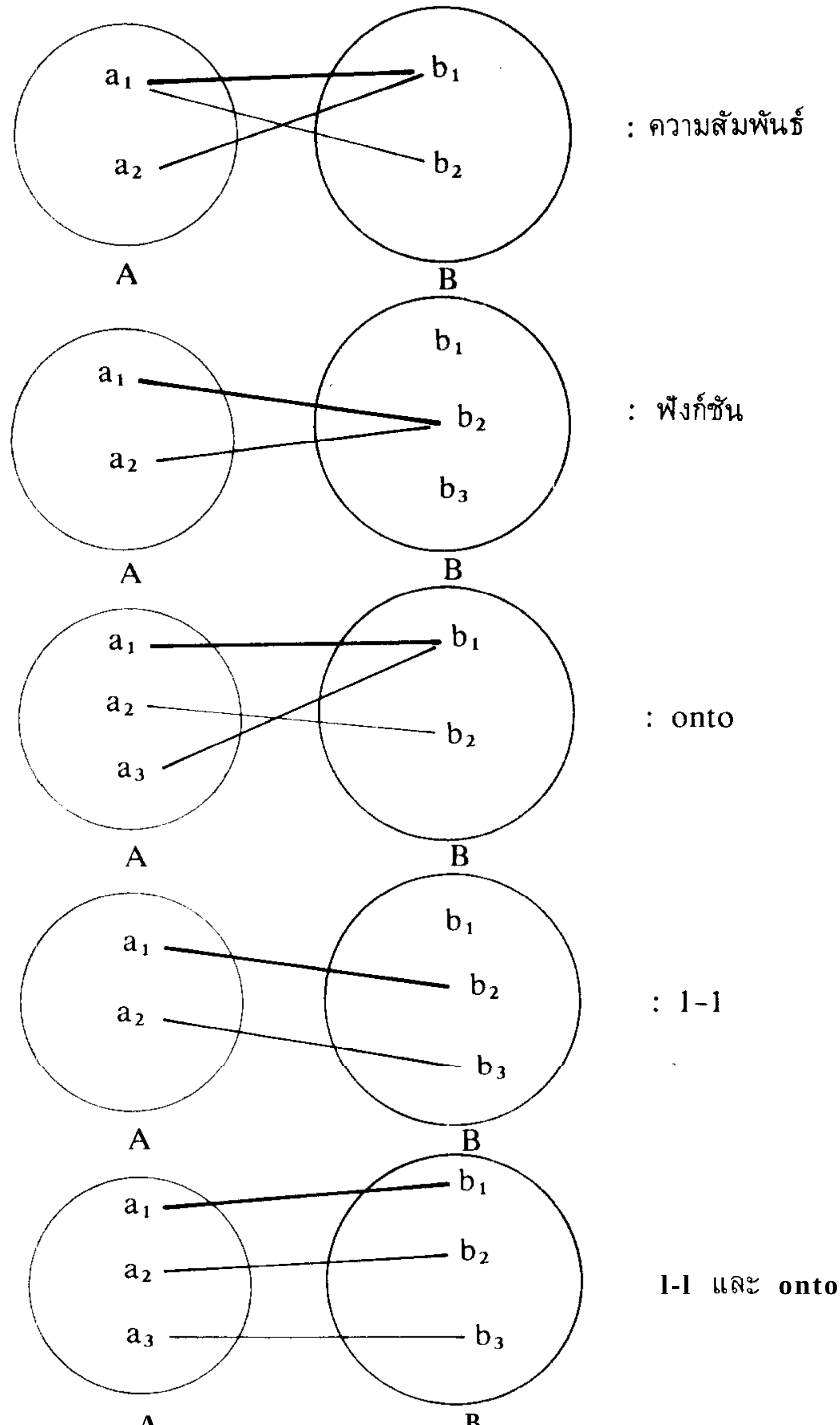
(2) **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (injective function, one to one function)

นิยาม 1.23 ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เรียกว่าฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (1 - 1) จาก A ไปยัง B ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x_1, y), (x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$

(3) **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง** (bijective function)

นิยาม 1.24 ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เรียกว่าฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และเป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

รูปแบบของความสัมพันธ์และฟังก์ชันแบบต่าง ๆ



รูป 1.4

ตัวอย่าง 1.11 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง R^+ แทนเซตของจำนวนจริงบวก และ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = x^2$ จงบอกฟังก์ชันแบบต่าง ๆ

วิธีทำ (1) $f_1 : R \to R$ โดยที่ $f_1(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 และไม่เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

(2) $f_2 : R \to R^+$ โดยที่ $f_2(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แต่เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

(3) $f_3 : R^+ \to R$ โดยที่ $f_3(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แต่ไม่เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

(4) $f_4 : R^+ \to R^+$ โดยที่ $f_4(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และเป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

■

พิจารณาฟังก์ชัน $f : A \to B$ เพราะว่า $f : A \to B$ เป็นเซตของคู่อันดับซึ่งเป็นเซตย่อยของ $A \times B$ ดังนั้นถ้า $C \subseteq A$ จะได้ว่า

$$f(C) = \{f(a) | a \in C \subseteq A\}$$

ซึ่งเรียกว่าภาพตรง (direct image) ของ C ภายใต้ f และจะได้ว่า

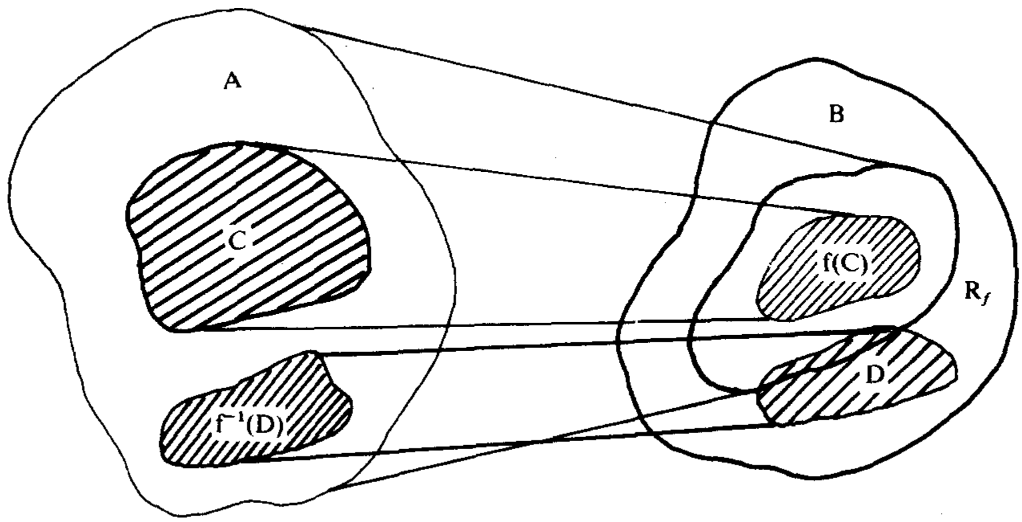
$$f(C) \subseteq R_f$$

ในทำนองเดียวกัน $f : A \to B$ และ $D \subseteq B$ ดังนั้น

$$f^{-1}(D) = \{a | f(a) \in D\}$$

เรียกว่าภาพผกผัน (inverse image) ของ D ภายใต้ f และจะได้ว่า

$f^{-1}(D) \subseteq A$ ดังรูป 1.5



รูป 1.5

จากคุณสมบัติข้างบนจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1 กำหนดให้ f : x → Y, A ⊊ X, B ⊊ X, C ⊊ Y และ D ⊊ Y แล้ว

(1) f(AUB) = f(A) ∪ f(B)

(2) f(AnB) ⊊ f(A) n f(B)

(3) f-'(CUD) = $f^{-1}(C)$ U f-'(D)

(4) $f^{-1}(C \cap D)$ = $f^{-1}(C)$ n f-'(D)

พิสูจน์ (1) พิสูจน์ว่า f(AUB) = f(A) ∪ f(B)

ให้ y ∈ f(AUB)

ดังนั้นจะมี **x ∈ A** หรือ **x ∈ B** ซึ่ง **y =** f(x)

ถ้า x ∈ A ดังนั้น y = f(x) ∈ f(A)

ถ้า x ∈ B ดังนั้น y = f(x) ∈ f(B)

นั่นคือ y ∈ f(A) ∪ f(B)

แสดงว่า f(A∪B) ⊊ f(A) ∪ f(B)

ให้ y ∈ f(A) ∪ f(B)

ดังนั้น y เป็นภาพของ x ที่ x ∈ A หรือ x ∈ B

ดังนั้น y = f(x), x ∈ AUB

ดังนั้น y = f(x) ∈ f(AUB)

จะได้ว่า f(A) ∪ f(B) ⊊ f(AUB)

จะสรุปได้ว่า f(AUB) = f(A) U f(B)

(2) ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

(3) พิสูจน์ว่า f-'(CUD) = f-'(C) ∪ f-'(D)

ให้ x ∈ f-'(CUD)

จะมี y ∈ CUD ซึ่ง y = f(x)

เพราะฉะนั้น f(x) ∈ C หรือ f(x) ∈ D

61 f(x) ∈ c ดังนั้น x ∈ $f^{-1}(C)$

ถ้า f(x) ∈ D ดังนั้น x ∈ f-'(D)

ดังนั้น x ∈ f-'(C) U f-'(D)

แสดงว่า f-'(CUD) ⊊ f-'(C) U f-'(D)

ให้ x ∈ f-'(C) U f-'(D)

ดังนั้น x ∈ f'(C) หรือ x ∈ $f^{-1}(D)$

ถ้า $x \in f^{-1}(C)$ ดังนั้น $f(x) \in c$

ถ้า $x \in f^{-1}(D)$ ดังนั้น $f(x) \in D$

จะได้ว่า $f(x) \in CUD$

ดังนั้น $x \in f$ ‘(CUD)

แสดงว่า $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subseteq f$ ‘(CUD)

จะสรุปได้ว่า $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(4) ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด ■

ตัวอย่าง 1.12 จงยกตัวอย่างที่แสดงว่า $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$

วิธีทำ ให้ $A = (-1, -2\}$, $B = \{1, 2)$

ให้ $f(x) = x^2$ ดังนั้น

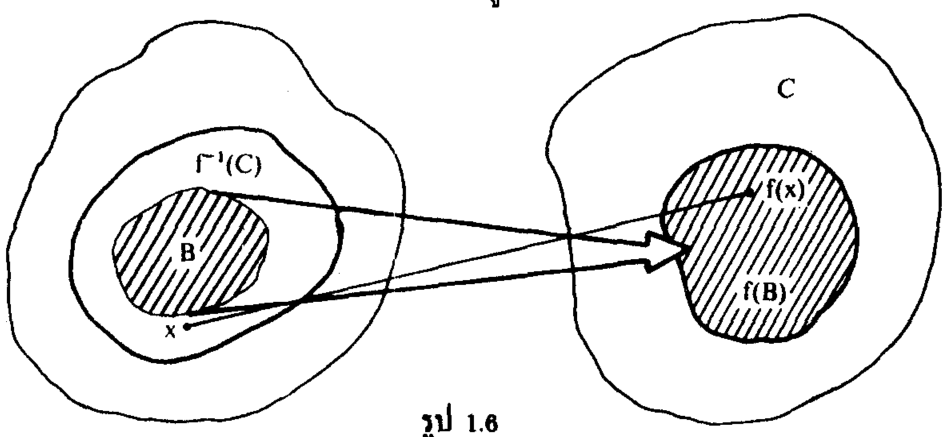
$A \cap B = 0$

เพราะฉะนั้น $f(A \cap B) = 0$

แต่ $f(A) = \{1, 4\}$, $f(B) = \{1, 4\}$

ดังนั้น $f(A) \cap f(B) = \{1, 4\} \neq f(A \cap B)$ ■

ข้อสังเกต ถ้า $f(x) \in C$ แล้ว $x \in f'(C)$ แต่ถ้า $f(x) \in f(B)$ แล้ว x ไม่จำเป็นต้องอยู่ใน B wins ณีข้างต้นเป็นจริงถ้า f เป็นฟังก์ชัน l-1 ดังรูป 1.6



รูป 1.6

1.13 พีชคณิตของฟังก์ชัน

Algebra of Functions

ihu1.26 กำหนดให้ $f : A \rightarrow R$, $g : B \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง แล้ว

(1) $f + g$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) cf เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $(cf)(x) = cf(x)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(3) fg เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $(fg)(x) = f(x)g(x)$

(4) $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$

อนึ่งโดเมนของฟังก์ชันในแต่ละกรณีก็คือผลร่วมของโดเมนของ f และโดเมนของ g ยกเว้นกรณีที่ 4 โดเมนของฟังก์ชันจะไม่รวม x ซึ่ง $g(x) = 0$

ตัวอย่าง 1.13 กำหนดให้ $f(x) = 2x+1$, $g(x) = x^2-1$

จงเขียนพีชคณิตของฟังก์ชัน และบอกโดเมนด้วย

วิธีทำ (1) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$= x^2+2x$

(2) $(cf)(x) = cf(x)$

$= 2cx \ t \ c$

(3) $(fg)(x) = f(x)g(x)$

$= (2x+1)(x^2-1)$

$= 2x3+x^2-2x-1$

(4) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{2x+1}{x^2-1}$

เพราะว่า $D_f = R$, $D_g = R$

ดังนั้น โดเมนของ $f+g$, cf, $f+g$ เท่ากับ $D_f \cap D_g = R$

ส่วนโดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $R - \{-1, 1\}$ (จำนวนจริงทั้งหมดไม่รวม ± 1) ■

1.14 ฟังก์ชันประกอบ

Composite Functions

นิยาม 1.26 กำหนดให้ $f : X \to Y$ และ $g : Y \to Z$ ดังนั้น f และ g จะนิยามฟังก์ชันประกอบจาก X ไปยัง Z โดยใช้สัญลักษณ์ $g \circ f$ $(g \circ f : X \to Z)$ ก็ต่อเมื่อ

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \text{ มี } y \in Y \text{ ซึ่ง } (x, y) \in f \text{ และ } (y, z) \in g\}$$

หมายเหตุ $g \circ f(x) = g(f(x))$

ตัวอย่าง 1.14 กำหนดให้ $f : R \to R$ โดยที่ $f(x) = x^2$ และ $g : R \to R$ โดยที่ $g(x) = x + 1$ จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$

วิธีทำ (1) $g \circ f(x) = g(f(x))$

$= g(x^2)$

$= x^2 + 1$

(2) $f \circ g(x) = f(g(x))$

$= f(x + 1)$

$= (x + 1)^2$

จากตัวอย่าง 1. 14 ได้ข้อสังเกตคือ $g \circ f \neq f \circ g$ ■

1.15 ลักษณะพิเศษของฟังก์ชัน

(1) ให้ $f : A \to B$ ดังนั้นเรียก f ว่าฟังก์ชันคงที่ (constant function) ก็ต่อเมื่อทุก ๆ สมาชิก $a \in A$ จะมี $b_0 \in B$ ซึ่ง $f(a) = b_0$ (เรนจ์มีเพียงตัวเดียว)

(2) ฟังก์ชัน $i_A : A \to A$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ทุก ๆ $a \in A$ $i_A(a) = a$ เรียกว่าฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)

(3) ถ้า $f : X \to Y$ และ $A \subseteq X$ แล้วฟังก์ชัน $f|_A : A \to Y$ เรียกว่าการกำกัด (restriction) ของ f ไปยัง A ถ้า $f|_A(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

(4) ถ้า $f : A \to B$ และ $A \subseteq X$ และถ้ามี $g : X \to B$ โดยที่ $g|_A = f$ แล้วจะเรียก g ว่าเป็นการยืดขยาย (extension) ของ f ไปยัง X

(5) ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นเซต n เซต และ $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ เป็นผลคูณคาร์ทีเซียน แล้วฟังก์ชัน

$\pi_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_i$

โดยที่สำหรับทุก ๆ $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

$\pi_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$

แล้วเรียก π_i ว่าโพรเจกชัน (projection) ที่ i ของ $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

1.16 ระบบจำนวนจริง

Real Number System

ในการศึกษาระบบจำนวนจริง R ต้องพิจารณาตัวดำเนินการ 2 ตัวคือ การบวก และการคูณ ซึ่งสำหรับ $x, y \in R$ แทนการบวกด้วย $x + y$ และแทนการคูณ xy

ในระบบจำนวนจริงการบวกการคูณมีคุณสมบัติปิดบน R
พิจารณาการบวก การคูณ จะได้สัจพจน์ต่อไปนี้
ให้ $x, y, z \in R$

สัจพจน์ 1 กฎการสลับที่ (commutative law)

$$x+y = y+x$$
$$xy = yx$$

สัจพจน์ 2 กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative law)

$$x+(y+z) = (x+y)+z$$
$$x(yz) = (xy)z$$

สัจพจน์ 3 กฎการกระจาย (distributive law)

$$x(y+z) = xy+xz$$
$$(x+y)z = xz+yz$$

สัจพจน์ 4 การมีเอกลักษณ์

สำหรับทุก ๆ $x \in R$ จะมีจำนวนจริง 2 จำนวนคือ 0, 1 ซึ่ง

$$x+0 = x = 0+x$$
$$x.1 = x = 1.x$$

สัจพจน์ 5 การมีนิเสธ

สำหรับทุก ๆ $x \in R$ จะมี $y \in R$ ซึ่ง $x+y = y+x = 0$
ในที่นี้ y คือ $-x$

สัจพจน์ 6 การมีส่วนกลับ

สำหรับทุก ๆ $x \in R - \{0\}$ จะมี $y \in R$ ซึ่ง $xy = yx = 1$
ในที่นี้ y คือ $\frac{1}{x}$

อาศัยสัจพจน์ทั้ง 6 ข้อข้างต้นจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2 ถ้า $a+b = a+c$ แล้ว $b = c$

พิสูจน์ ให้ $a+b = a+c$
จากสัจพจน์ 5 จะได้ว่า มีจำนวนจริง y ซึ่ง $y+a = 0$
แต่ $y+(a+b) = y+(a+c)$

โดยอาศัยสัจพจน์ 2 จะได้

$$(y+a)+b = (y+a)+c$$

$$O+b = 0+c$$

จากสัจพจน์ 4 $O+b = b$ และ $0+c = c$

เพราะฉะนั้น $b = c$ ■

ทฤษฎีบท 1.3 ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะมีจำนวนจริง x เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $x+a = b$ (x ในที่นี้คือ b–a)

พิสูจน์ ให้ $a, b \in R$

เพราะฉะนั้นจะมี $y \in R$ ซึ่ง $y + a = 0$

ให้ $x = b+y$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} x+a &= (b+y)+a \\ &= b+(y+a) \\ &= b+O \\ &= b \end{aligned}$$

จะต้องพิสูจน์ว่ามี x เพียงตัวเดียวเท่านั้น สมมุติมี x' ซึ่ง $x'+a = b$

เพราะฉะนั้น $x+a = x'+a$

ใช้ทฤษฎีบท 1.2 จะได้ $x = x'$ ■

ทฤษฎีบท 1.4 $b-a = b+(-a)$

พิสูจน์ ให้ $x = b-a$ และ $y = b+(-a)$

ต้องการแสดงว่า $x = y$

จากทฤษฎีบท 1.2 $x+a = b$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} y+a &= (b+(-a))+a \\ &= b+((-a)+a) \\ &= b+O \\ &= b \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x+a = y+a$

จะได้ $x = y$ ■

ทฤษฎีบท 1.5 $-(-a) = a$

พิสูจน์ เพราะว่า $a+(-a) = 0$

และ $(-a)+(-(-a)) = 0$

ดังนั้น $a+(-a) = (-a)+(-(-a))$

$= -(-a)+(-a)$

จะได้ $a = -(-a)$ ∎

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ใช้การพิสูจน์แบบข้างต้นโดยอาศัยสัจพจน์ทั้ง 6 ข้อ (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบท 1.6 $a(b-c) = ab-ac$

ทฤษฎีบท 1.7 $0 \cdot a = a.0 = 0$

ทฤษฎีบท 1.8 ถ้า $ab = ac$ และ $a \neq 0$ แล้ว $b = c$

ทฤษฎีบท 1.9 ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \neq 0$ แล้วจะมี x เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ $ax = b$ (x ในที่นี้คือ $\frac{b}{a}$)

ทฤษฎีบท 1.10 ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $\frac{b}{a} = ba^{-1}$

($a^{-1} = \frac{1}{a}$ เรียกว่าส่วนกลับของ a)

ทฤษฎีบท 1.11 ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $(a^{-1})^{-1} = a$

ทฤษฎีบท 1.12 $(-a) = -ab$ และ $(-a)(-b) = ab$

ทฤษฎีบท 1.13 ถ้า $ab = 0$ ดังนั้น $a = 0$ หรือ $b = 0$

ทฤษฎีบท 1.14 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0,\ d \neq 0$

ทฤษฎีบท 1.15 $(\frac{a}{b})(\frac{c}{d}) = \frac{ac}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0, d \neq 0$

ทฤษฎีบท 1.16 $\dfrac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})} = \frac{ad}{bc}$ เมื่อ $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ เรามีความสัมพันธ์ระหว่าง a, b คือ เท่ากับ และไม่เท่ากับ ที่จะกล่าวในตอนนี้คือความสัมพันธ์ไม่เท่ากับซึ่งมีใช้ 4 แบบ คือ น้อยกว่า มากกว่า น้อยกว่าหรือเท่ากับ มากกว่าหรือเท่ากับ โดยใช้สัญลักษณ์ : $<, >, \leqslant$ และ $\geqslant$ ตามลำดับซึ่งนิยามดังนี้

$a < b$ หมายถึง $b - a$ เป็นจำนวนจริงบวก

$a > b$ หมายถึง $b < a$

$a \leqslant b$ หมายถึง $a < b$ หรือ $a = b$

$a \geqslant b$ หมายถึง $b \leqslant a$

จากนิยามข้างบนจะได้ว่า $x > 0$ ก็ต่อเมื่อ x มีค่าบวก ถ้า $x < 0$ บอกได้ทันทีว่า x เป็นค่าลบ ถ้า $x \geqslant 0$ กล่าวไวด้ว่า x ไม่เป็นค่าลบ

จากความสัมพันธ์ข้างบนจะได้สัจพจน์ต่อไปนี้

สัจพจน์ 7 ถ้า $x > 0, y > 0$ แล้ว $x + y > 0, xy > 0$

สัจพจน์ 8 สำหรับ $x \in R - \{0\}$ แล้ว $x > 0$ หรือ $x < 0$

โดยใช้สัจพจน์ 7 – 8 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.17 (Trichotomy law)

สำหรับ $a, b \in R$ แล้ว $a < b$ หรือ $a > b$ หรือ $a = b$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

พิสูจน์ ให้ $x = b - a$

R x $= 0$ ดังนั้น $b\text{-}a = a\text{-}b = 0$ จะได้ว่า $a = b$

ถ้า $x \neq 0$ โดยสัจพจน์ 8 จะได้ว่า $x > 0$ หรือ $x < 0$

ดังนั้น $b\text{-}a > 0$ หรือ $b - a < 0$

จะได้ว่า $a < b$ หรือ $a > b$ ●

ทฤษฎีบท 1.18 (กฎการถ่ายทอด)

ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$

พิสูจน์ ถ้า $a < b$ และ $b < c$ ดังนั้น $b - a > 0$ และ $c - b > 0$

โดยสัจพจน์ 7 จะได้ว่า

$$(b\text{-}a)+(c\text{-}b) > 0$$

$$c\text{-}a > 0$$

นั่นคือ $a < c$ ■

ทฤษฎีบท 1.19 ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$

พิสูจน์ ให้ $a < b$

ดังนั้น $b - a > 0$

ให้ $x = a + c, y = b + c$

ดังนั้น $y - x = (b+c)-(a+c)$

$= b - a > 0$

จะได้ว่า $x < y$

นั่นคือ $a+c < b+c$ ■

ในทำนองเดียวกันโดยอาศัยสัจพจน์และทฤษฎีบทข้างต้นจะพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้

ทฤษฎีบท 1.20 ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$

ทฤษฎีบท 1.21 ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$

ทฤษฎีบท 1.22 ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $a^2 > 0$

ทฤษฎีบท 1.23 $1 > 0$

ทฤษฎีบท 1.24 ถ้า $ab > 0$ แล้ว $a > 0, b > 0$ หรือ $a < 0, b < 0$

ทฤษฎีบท 1.25 ถ้า $ab < 0$ แล้ว $a < 0, b > 0$ หรือ $a > 0, b < 0$

ทฤษฎีบท 1.26 ถ้า $a < c$ และ $b < d$ แล้ว $a+b < c+d$

1.17 ขอบเขตบน ขอบเขตล่าง ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด

Upper bound, Lower bound, Maximum element and Minimum element

นิยาม 1.27 ให้ $S \subseteq R$ ถ้า u เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \leqslant u$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$ แล้วเรียก u ว่าขอบเขตบน (upper bound) ของ S เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ u.b.S

ถ้า u_0 เป็นขอบเขตบนของ S และ $u_0 \leqslant u$ สำหรับทุก ๆ ค่า u ที่เป็นขอบเขตบนของ S แล้วเรียก u_0 ว่าขอบเขตบนต่ำสุด (least upper bound) ของ S เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ l.u.b.S

นิยาม 1.28 ให้ $S \subseteq R$ ถ้า l เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \geqslant l$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$ แล้วเรียก l ว่าขอบเขตล่าง (lower bound) ของ S เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ l.b.S

ถ้า l_0 เป็นขอบเขตล่างของ S และ $l_0 \geqslant l$ สำหรับทุก ๆ ค่า l ที่เป็นขอบเขตล่างของ S แล้วเรียก l_0 ว่าขอบเขตล่างสูงสุด (greatest lower bound) ของ S เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ g.l.b.S

นิยาม 1.29 ถ้า u เป็นขอบเขตบนของ S และ $u \in S$ แล้วเรียก u ว่าค่าสูงสุด (maximum element) ของ S แทนด้วย

$$u = \max. S$$

ถ้า l เป็นขอบเขตล่างของ S และ $l \in S$ แล้วเรียก l ว่าค่าต่ำสุด (minimum element) ของ S แทนด้วย

$$1 = \min. S$$

ตัวอย่าง 1.15 กำหนดให้ $S = [0, 1]$, $T = (0, 1)$ จงบอกค่าของขอบเขตบน ขอบเขตล่าง ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด

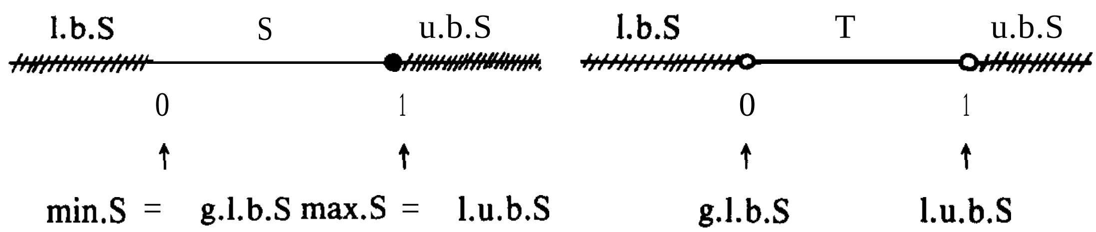
วิธีทำ ขอบเขตบนของ S คือจำนวนจริงซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ 1

ขอบเขตล่างของ S คือจำนวนจริงซึ่งน้อยกว่า หรือเท่ากับ 0

นั่นคือ $\text{l.u.b.}S = 1$

$\text{g.l.b.}S = 0$

สำหรับเซต T มีขอบเขตบนขอบเขตล่างเหมือนกับเซต S แต่แตกต่างกันตรงที่ S มีค่าสูงสุดคือ 1 ค่าต่ำสุดคือ 0 ส่วน T ไม่มีค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด



รูป 1.7

หมายเหตุ บางครั้งใช้สัญลักษณ์ sup.S (supremum of S) แทน l.u.b.S และใช้ inf.S (infimum of S) แทน g.l.b.S

ทฤษฎีบท 1.27 ถ้า $S \subseteq R$ และ $S \neq \emptyset$ แล้วขอบเขตบนต่ำสุดของ S (ถ้ามี) จะมีได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ ให้ u_1, u_2 เป็นขอบเขตบนต่ำสุดของ S

จะได้ว่า $u_1 < u_2$ หรือ $u_1 = u_2$ หรือ $u_1 > u_2$

กรณีที่ 1 ถ้า $u_1 < u_2$

เพราะว่า u_2 เป็นขอบเขตบนต่ำสุดของ S

ดังนั้น u_1 ไม่เป็นขอบเขตบนของ S

เกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้นกรณีที่ 1 เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2 ถ้า $u_1 > u_2$

พิสูจน์ทำนองเดียวกัน จะได้ว่าเป็นไปไม่ได้

ดังนั้นจะได้ว่า $u_1 = u_2$

นั่นคือ มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น ■

ทฤษฎีบท 1.28 ถ้า $S \subseteq R$ และ $S \neq \varnothing$ แล้วขอบเขตล่างของ S (ถ้ามี) จะมีได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด)

เซตโดยทั่ว ๆ ไปถ้าเป็นเซตย่อยของ R อาจมีขอบเขตบน ขอบเขตล่าง หรือไม่มีขอบเขตบนหรือล่าง ถ้าเซต S มีขอบเขตบนและขอบเขตล่างแล้วเรียกเซต S ว่าเซตมีขอบเขตจำกัด (bounded set)

อย่างไรก็ตาม ถ้าเซต S มีขอบเขตบนแล้วจะมีขอบเขตบนต่ำสุด และถ้า S มีขอบเขตล่างแล้วจะมีขอบเขตล่างสูงสุดด้วย

ตัวอย่าง 1.16 จงยกตัวอย่างเซตที่มีขอบเขตบน ขอบเขตล่าง ไม่มีขอบเขตบน ไม่มีขอบเขตล่าง

วิธีทำ (1) $[0, 1)$ มีขอบเขตบน ขอบเขตล่าง

(2) $(0, \infty)$ มีขอบเขตล่าง ไม่มีขอบเขตบน

(3) $(-\infty, 1]$ มีขอบเขตบน ไม่มีขอบเขตล่าง

(4) $(-\infty, \infty)$ ไม่มีทั้งขอบเขตบน และขอบเขตล่าง ■

1.18 ค่าสัมบูรณ์

Absolute Value

นิยาม 1.30 ถ้า x เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ x คือค่าจำนวนจริงบวก ใช้สัญลักษณ์ $|x|$ นิยามดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

ข้อสังเกต (1) $|x| \geqslant 0$

(2) $\sqrt{x^2} = |x|$

ทฤษฎีบท 1.29 สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ

(1) $|-x| = |x|$

(2) $|xy| = |x||y|$

(3) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(4) ถ้า $a \geqslant 0$ แล้ว $|x| \leqslant a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leqslant x \leqslant a$

พิสูจน์ ข้อ (1), (2), (3) พิสูจน์โดยการแบ่งกรณีและอาศัยนิยาม 1.30 ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

(4) ต้องพิสูจน์ข้อความ 2 ตอนคือ ถ้า $|x| \leqslant a$ แล้ว $-a \leqslant x \leqslant a$ และถ้า $-a \leqslant x \leqslant a$ แล้ว $|x| \leqslant a$

(→) ให้ $|x| \leqslant a$

ดังนั้น $-a \leqslant -|x|$

จาก (3) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

ดังนั้น $-a \leqslant -|x| \leqslant x \leqslant |x| \leqslant a$

นั่นคือ $-a \leqslant x \leqslant a$

(←) ให้ $-a \leqslant x \leqslant a$

ดังนั้น เมื่อ $x \geqslant 0,\ |x| = x \leqslant a$

$x < 0,\ |x| = -x \leqslant a$

จะสรุปได้ว่า $|x| \leqslant a$ ■

ทฤษฎีบท 1.30 (อสมการของสามเหลี่ยม : Triangle Inequality)

สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ $|x+y| \leqslant |x|+|y|$

พิสูจน์ จาก $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

$-|y| \leqslant y \leqslant |y|$

ดังนั้น $-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$

โดยทฤษฎีบท 1.29 (4) จะได้ว่า

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|$$ ■

หมายเหตุ ถ้ากำหนดให้ $x = a-c$, $y = c-b$ ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์

$$|a-b| \leqslant |a-c|+|c-b|$$

ซึ่งความสัมพันธ์นี้มีประโยชน์มากในการพิสูจน์ทฤษฎีบทของโทโพโลยี

ทฤษฎีบท 1.31 สำหรับจำนวนจริง $a_1, a_2, \ldots, a_n$ จะได้ว่า

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

โดยที่ $$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\ldots+a_n$$

พิสูจน์ เราพิสูจน์โดยใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

เมื่อ $n = 1$ อสมการเป็นจริงเพราะว่า $|a_1| \leqslant |a_1|$

สมมุติให้อสมการจริงสำหรับ $n = p$

ต้องการแสดงว่าอสมการเป็นจริงสำหรับ $n = p+1$

เพราะว่า $$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |a_k|$$

พิจารณา $\qquad |\sum_{k=1}^{p+1} a_k| = |\sum_{k=1}^{p} a_k + a_{p+1}|$

$$\leqslant |\sum_{k=1}^{p} a_k| + |a_{p+1}|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} |a_k| + |a_{p+1}|$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} |a_k|$$

แสดงว่า $\qquad |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ สำหรับทุก ๆ ค่า n ∎

ทฤษฎีบท 1.32 (อสมการของโคชี-ชวาร์ซ : Cauchy-Schwarz inequality)

ถ้า $a_,, a_2, \ldots, a,$ และ $b_1, b_2, \ldots. b_n$ เป็นจำนวนจริงใด q จะได้ว่า

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2) \qquad \ldots..(*)$$

พิสูจน์ เพราะว่า $(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0$ สำหรับทุกค่า x และทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

เพราะฉะนั้น $\qquad \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geqslant 0$

ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$, $B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ และ $C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

แล้วจะได้ว่า $\qquad \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 = Ax^2 + Bx + C \geqslant 0 \qquad \ldots..(**)$

ถ้า $A = 0$ จะได้ $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$ ซึ่งแสดงว่า $a_k = 0$ สำหรับทุกค่า k ดังนั้น อสมการ (*) เป็นจริง

ถ้า $A \neq 0$ ดังนั้น

$$Ax^2 + Bx + C = A(x + \frac{B}{A})^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$

ซึ่งทางซ้ายมือของสมการมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $x = -\frac{B}{A}$

แทนค่า $x = -\frac{B}{A}$ ใน (**) จะได้

$$A(-\frac{B}{A})^2 + 2B(-\frac{B}{A}) + C \geqslant 0$$

$$-\frac{B^2}{A} + C \geqslant 0$$

$$B^2 \geqslant AC \qquad (\text{เพราะว่า } A \geqslant 0)$$

ดังนั้นจากการแทนค่าจะได้ว่า

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2) \qquad \blacksquare$$

1.19 คุณสมบัติของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 1.33 (คุณสมบัติอาร์คีมีเดียน : Archimedean property)

กำหนดให้ $x \in R$ และ $x > 0$ แล้วจะมี $n \in N$ ซึ่ง $x < n$

พิสูจน์ สมมุติว่าไม่มี $n \in N$ ซึ่ง $x < n$

แสดงว่าทุก ๆ $n \in N$, $n \leqslant x$

ดังนั้น x เป็นขอบเขตบนของ N

เพราะฉะนั้น N มีขอบเขตบนต่ำสุด

ให้ u_0 เป็นขอบเขตบนต่ำสุดของ N

แต่สำหรับ $n \in N$, $n+1 \in N$ ด้วย

เพราะฉะนั้น $n+1 \leqslant u_0$

$n \leqslant u_0 - 1$

ดังนั้น $u_0 - 1$ เป็นขอบเขตบนของ N ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น จะมี $n \in N$ ซึ่ง $x < n$ $\blacksquare$

บทแทรก ถ้า $x \in R$ ซึ่ง $0 \leqslant x < \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $n \in N$ แล้ว $x = 0$

พิสูจน์ อาศัยทฤษฎีบท 1.33 และการพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง

นอกจากคุณสมบัติอาร์คีมีเดียนแล้วในระบบจำนวนจริงมีคุณสมบัติต่าง ๆ อีกมากมายซึ่งไม่ได้กล่าว ณ ที่นี้ เช่น

(1) สำหรับ $a > 0$ ใด ๆ จะมี $x > 0$ ซึ่ง $x^2 = a$

(2) ระหว่างจำนวนจริง 2 จำนวน มีจำนวนตรรกยะ

(3) ระหว่างจำนวนจริง 2 จำนวน มีจำนวนอตรรกยะ

แบบฝึกหัด 1

ตรรกศาสตร์

1. จงใช้ตารางค่าความจริงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(1) $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$

(2) $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

(3) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

(4) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

(5) $p \wedge q \rightarrow p$

2. กำหนดประโยค $p \rightarrow q$ เราเรียก $q \rightarrow p$ ว่าประโยคกลับ (converse) และ $\sim p \rightarrow \sim q$ ว่าประโยคผกผัน (inverse) แล้วจงแสดงว่าประโยคทั้งสองประโยคนี้มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี

3. **นิยาม** ข้อความที่เป็นจริงทุก ๆ กรณี เรียกว่า ทอโทโลยี (tautology) จงพิสูจน์ว่า $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นทอโทโลยี หรือพิสูจน์ว่าการแจงเหตุสู่ผลมีคุณสมบัติถ่ายทอด (transitive)

4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบททางตรรกศาสตร์ต่อไปนี้

   (1) การแจงเหตุตามผล (Modus ponens)

   $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

   (2) การแจงผลค้านเหตุ (Modus tollens)

   $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

เซต

5. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   (1) $\{x | x \in I,\ x*-2x+1 = 0\}$

   (2) $\{x | x \in N,\ 4 \leqslant x \leqslant 10\}$

   (3) $\{x | x \in N,\ x^2 < 10\}$

6. จงเขียนเซตแบบบอกเงื่อนของสมาชิก

   (1) $\{1, 2, 3\}$

   (2) $(1, 2, 4, 8, 16, 32, . ..\}$

7. จงเขียนเซตย่อยทั้งหมดของ $\{1, 2, 3, 4\}$

8. กำหนดให้ U = เซตของตัวอักษรภาษาอังกฤษทั้งหมด $A = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{c, d, e, i, r\}$ และ $C = \{x, y, z\}$ จงหา

(1) A'	(2) AUB	(3) $(AUB)UC$
(4) $A-B$	(5) $B-A$	(6) $A \cap B$
(7) $A' \cap C$	(8) $(AUBUC)'$	(9) $(A \cap B) \cup C$

9. จงใช้แผนภาพเวนน์ แสดงว่ากฎการกระจายและกฎของเดอ มอร์กองเป็นจริง

10. จงพิสูจน์ว่า $A \cap B' = A - B$

11. จงพิสูจน์ว่า $(A-B) \cap B = 0$

วิธีการพิสูจน์

12. จงพิสูจน์ว่า $(A,U\ B)\cap B' = A$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = 0$

13. จงพิสูจน์ว่า $A \subsetneq B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subsetneq A'$

14. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$ แล้ว

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r} \text{ เมื่อ } |r| < 1$$

15. ถ้า $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ แล้วจงพิสูจน์ว่า

$$S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

16. จงแสดงว่า $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ความสัมพันธ์

17. กำหนดให้ $A = \{1, 2)$ $B = \{a, b\}$ และ $C = \{c, d\}$ จงหาค่าของ

(1) $(A \times B) \cup (A \times C)$

(2) $A \times (B \cup C)$

(3) $A \times (B \cap C)$

18. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6)$ และ $B = \{1, 4, 6)$ r แทนความสัมพันธ์ "$<$" จาก A ไปยัง B

(1) จงแจกแจงสมาชิกของ r

(2) เขียนกราฟของ r บนระนาบ xy

19. กำหนดให้ความสัมพันธ์ $r = \{(a, a), (b, c), (c, b)\}$ บน $X = \{a, b, c\}$ แล้ว จงหาว่า r มีคุณสมบัติใดต่อไปนี้

(1) คุณสมบัติสะท้อน

(2) คุณสมบัติสมมาตร

(3) คุณสมบัติถ่ายทอด

20. กำหนดให้ γ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A จงแสดงว่า ถ้า $c\gamma a$ และ $c\gamma b$ แล้ว $a\gamma b$ สำหรับ $a, b, c \in A$

ฟังก์ชัน

21. ถ้า F เป็นฟังก์ชันนิยามบน R โดยที่ $y = F(x) = 1 + x^2$ แล้ว จงหาค่าของ $F(1)$, $F(-1)$, $F(\frac{1}{2})$

22. ให้ $F: N \to N$ นิยามโดย $F(n) = n^2+3$ จงแสดงว่า F เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง แต่ไม่เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

23. พิจารณาฟังก์ชัน $F: N \to N$ โดยที่ $F(n) = n+1$ และ $G: N \to N$ โดยที่ $G(n) = n^2$ จงหาฟังก์ชันประกอบ $F \circ F$, $F \circ G$, $G \circ F$ และ $G \circ G$

24. ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปบน B และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปยัง A แล้วจงแสดงว่า

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

25. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และพิจารณา

$$f = \{(1, 3), (3, 3), (4, 1), (2, 2)\}$$

$$g = \{(1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$$

(1) f และ g เป็นฟังก์ชันหรือไม่

(2) จงหาเรนจ์ของ f และ g

26. จงพิสูจน์ว่า $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

27. จงพิสูจน์ว่า $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

28. ข้อความข้างล่างนี้เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นความจริงจงแสดงการพิสูจน์ ถ้าไม่เป็นความจริง จงยกตัวอย่าง

(1) $f(A-B) = f(A)-f(B)$

(2) $f(A) \subseteq f(B)$ เมื่อ $A \subseteq B$

จำนวนจริง

29. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(1) $-0 = 0$

(2) $1^{-1} = 1$

(3) $-(a+b) = -a-b$

(4) $-(a-b) = -a+b$

(5) $(a-b)+(b-c) = a-c$

(6) ถ้า $a \neq 0, b \neq 0$ แล้ว $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

30. จงพิสูจน์ว่าไม่มี x ใน R ซึ่ง $x^2+1 = 0$

31. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $a > 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > 0$ และ ถ้า $a < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} < 0$

(2) ถ้า $0<a<b$ แล้ว $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

(3) ถ้า $a\leqslant b,\ b\leqslant c$ แล้ว $a\leqslant c$

(4) ถ้า $a\leqslant b,\ b\leqslant c$ และ $a = c$ แล้ว $b = c$

32. สำหรับเซต S ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาขอบเขตบน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบนต่ำสุด ขอบเขตล่างสูงสุด

(1) $S = \{1, 3, 5\}$

(2) $S = \{x|0\leqslant x<7\}$

(3) $S = \{\frac{n}{n+1}|n\in N\}$

(4) $S = \{x|x\in R^{+}, 0<x^2-1\leqslant 2\}$

(5) $S = \{x|x\in R, \frac{x-1}{x-3}\leqslant 0\}$

33. ถ้า $A\subseteq B\subseteq R$ และ B เป็นเซตที่มีขอบเขตจำกัด คือมีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง แล้ว $\sup.A\leqslant\sup.B$ และ $\inf.A\geqslant\inf.B$

34. จงหาจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับอสมการ

(1) $|x-2|<8$

(2) $|x-2|\geqslant 1$

35. สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า.

(1) $|x-y|\leqslant|x|+|y|$

(2) $|x-y| = |y-x|$

(3) $||x|-|y||\leqslant|x-y|$