บทที่ 6

พัฒนาการของเรขาคณิตแนวใหม่

เค้าโครงเรื่อง

6.1 จุด เส้น และระนาบ

6.2 สัจพจน์ของจุดและเส้น

- 6.2.1 สัจพจน์กลุ่มที่ 1 สัจพจน์เกี่ยวกับจุดและเส้น
- 6.2.2 สัจพจน์กลุ่มที่ 2 สัจพจน์ของการอยู่ระหว่าง
- 6.2.3 สัจพจน์กลุ่มที่ 3 การลงรอยกันเชิงเส้น

6.3 การตัดกันของเซตของจุด

6.4 การอยู่ระหว่าง การแยกและผลผนวกของเซตของจุด

6.5 เส้นโค้งปิดเชิงเดียว

สาระสำคัญ

1. ความสัมพันธ์ระหว่างเซตของจุดเช่น การอยู่ระหว่าง การลงรอยกัน การอยู่บน ฯลฯ ความหมายของระนาบขนาน เส้นขนาน มุมที่เกิดจากเส้นขนานคู่หนึ่งมีเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งเป็นเส้นผ่า
2. สัจพจน์เกี่ยวกับจุดและเส้น สัจพจน์ของการอยู่ระหว่าง การลงรอยกันเชิงเส้น
3. ผลตัดของเส้นตรงสองเส้น ผลตัดของระนาบสองระนาบ ผลตัดของเส้นตรงกับระนาบ
4. ผลผนวกของเซตของจุด
5. เส้นโค้งเชิงเดียว เส้นโค้งปิด เส้นโค้งปิดเชิงเดียว

วัตถุประสงค์

เมื่อจบบทเรียนนี้แล้วนักศึกษาจะสามารถ

1. อธิบายความหมายของ ความสัมพันธ์ระหว่างเซตของจุดได้ความสัมพันธ์นี้ได้แก่ การอยู่ระหว่าง การลงรอยกัน การอยู่บน ผลตัด ผลผนวก เป็นต้น
2. พิสูจน์ปัญหาบางประการทางเรขาคณิตโดยอาศัยเหตุผลจากสัจพจน์ของจุดและเส้น
4. บอกผลลัพธ์ที่ได้ของ ผลตัดและผลผนวกของเซตของจุด
5. จำแนกชนิดของเส้นโค้งในระนาบว่าเป็นเส้นโค้งชนิดเส้นโค้งปิด เส้นโค้งเชิงเดียวหรือเส้นโค้งปิดเชิงเดียว

พัฒนาการของเรขาคณิตที่จะกล่าวถึงในบทนี้ เป็นพัฒนาการด้านแนวคิดของคำและข้อความต่าง ๆ ในวิชาเรขาคณิตพบว่ามีการใช้คำต่าง ๆ เช่น สามเหลี่ยม วงกลม มุม และใช้ข้อความ **ซึ่งแบ่งเส้นตรงออกเป็น 2 ส่วน (bisector) ซึ่งตั้งฉากได้ (perpendicular)** ล้วนแล้วแต่สามารถให้นิยามโดยตรงและชัดเจนได้ แต่เราก็ต้องใช้จุด เส้นและระนาบซึ่งเป็นอนิยามศัพท์ ในการให้นิยามคำและข้อความข้างต้นนี้ การพัฒนาเรขาคณิตด้านแนวความคิดนั้น เราจำต้องพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ ที่เราเกี่ยวข้องด้วย พบเสมอว่าบางครั้งก็ไม่สามารถให้นิยามคำบางคำหรือข้อความบางข้อความที่เกี่ยวกับเรขาคณิต เรียกข้อความที่ยอมรับโดยไม่ต้องพิสูจน์ว่าสัจพจน์ส่วนข้อความที่สามารถพิสูจน์ได้เรียกว่าทฤษฎี

6.1 จุด เส้น และระนาบ

จุด

เราใช้คำว่าจุดเสมอ ๆ และพูดกันถึงเรื่องจุดราวกับว่าเรารู้ว่ามันคืออะไร แต่ที่จริงแล้วไม่มีใครเคยเห็นจุดเลยเราเพียงแต่ใช้ dot แทนจุดเท่านั้น ดังนั้นจุดคืออะไรแน่ คำตอบที่ควรจะเป็นก็คือ จุดเป็นสิ่งที่สร้างขึ้นด้วยสติปัญญาของมนุษย์เราจินตนาการว่าจุดควรจะเป็นสิ่งที่เล็กที่ไม่สามารถจะแตกเป็นชิ้นเล็กต่อไปได้อีก

ตามข้อเท็จจริงของยุคลิดเขาได้พยายามให้นิยาม "จุด" แต่นิยามนั้นไม่ได้ช่วยให้เราเข้าใจดีขึ้นแต่อย่างใดตามระบบใหม่ถือว่า "จุด" เป็น อนิยามศัพท์สิ่งที่เราจะให้นิยามต้องเป็นความสัมพันธ์ระหว่างจุดหรือเซตของจุด

เส้นและระนาบ

เรามีความจำเป็นที่จะต้องเกี่ยวข้องกับเส้นและส่วนของเส้นตรง แต่ไม่มีใครเลยเห็นเส้นและระนาบเลย ยังมีบาง ๆ ของแสงหรือเส้นทาง ๆ บนขอบเป็นเพียงการจินตนาการที่ใกล้เคียงว่าเส้นควรจะเหมือนอะไร และทุก ๆ พื้นผิวภาพที่เหมือนกระจกเงาเราก็จินตนาการให้เป็นระนาบ สรุปแล้วในพัฒนาการของเรขาคณิตแนวใหม่ถือคำว่า จุด เส้น ระนาบ เป็นอนิยามศัพท์ ยกเว้นกรณีที่เส้นและระนาบเป็นเซตของจุด ทรงทางเรขาคณิตต่าง ๆ ก็หมายถึงเซตของจุดเช่นกัน

การศึกษาเรขาคณิตเริ่มต้นเมื่อกำหนดว่าจุดและเส้นเหล่านี้แต่ละอย่างสัมพันธ์กัน

อย่างไร จำเป็นต้องระมัดระวังเกี่ยวกับคุณสมบัติที่ได้สร้างไว้ เริ่มต้นด้วยความรู้ที่เกี่ยวกับจุด เส้น และคุณสมบัติอื่น ๆ ของจุดและเส้นก็จะทำให้สามารถพิสูจน์ได้ การพิสูจน์นั้นไม่ง่ายเสมอไป บางครั้งพบว่าไม่อาจพิสูจน์เกี่ยวกับจุดและเส้นได้นอกเสียจากว่าจะได้ตกลงเกี่ยวกับคุณสมบัติบางประการที่ควรจะมีคือเป็นคุณสมบัติที่สมมุติขึ้น ซึ่งเรียกว่า **สัจพจน์**

ในการพิสูจน์ต้องถือหลักว่า "การพิสูจน์จะสมบูรณ์ทั้งหมดนั้นจะต้องเป็นอิสระจากรูป" โดยจะไม่พูดว่าถูกหรือเป็นจริงตามรูปนั้น ๆ แต่จะใช้เหตุผลตามสัจพจน์

ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ก็เป็นอนิยาม เช่น ระหว่าง (between) ลงรอยกัน (congruent) และบน (on)

ถ้าจุด B อยู่ระหว่าง A และ C ก็เป็นที่เข้าใจว่า A,B และ C เป็นจุด 3 จุด ที่อยู่ต่างตำแหน่งกันและอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

คำว่า "ลงรอยกัน" ไม่ใช้ในความหมายซ้อนกันได้สนิทเสมอไป

คำว่า "บน" ใช้ใน 2 กรณี

กรณีที่ 1 กล่าวว่า "จุดอยู่บนเส้น"
"เส้นอยู่บนจุด"

กรณีที่ 2 กล่าวว่า "เส้นอยู่บนระนาบ"
"ระนาบอยู่บนเส้น"

คำว่า "สอง" ทำให้เข้าใจผิดบ่อย ๆ เช่น ถ้าเรากล่าวว่า "จุดสองจุด A และ B" อาจจะทำให้เราเข้าใจความหมายผิดไป ซึ่งอาจคิดว่า จุดสองจุดนี้เป็นจุดเดียวกันก็ได้ ในกรณีนี้จะทำให้เรากล่าวได้ว่า จุด A คือ B($A = B$) แต่ในทางกลับกัน เราเจตนาที่จะพิจารณาจุดสองจุดที่ต่างตำแหน่งกัน เราจะต้องกล่าวว่า "จุดสองจุดที่ต่างกัน A และ B" หรือกล่าวว่าจุด A ไม่ใช่จุด B($A \neq B$)

อีกกรณีหนึ่งที่เป็นไปได้เรากล่าวเลยว่าจุดสองจุดนั้นเป็นจุดเดียวกัน

ตามวิธีของยุคลิดซึ่งไม่มีข้อสงสัยในการพิจารณาปัญหาเพียงแต่เน้นว่า "เราจะสามารถเขียนรูปได้อย่างไร" ภายใต้วิธีการใหม่คำถามนี้จะเปลี่ยนไปอีกอย่างหนึ่งคือไม่จำเป็นเลยที่จะรู้ว่า "เราจะสามารถเขียนรูปได้อย่างไร" แต่สิ่งที่สำคัญที่สุดก็คือ จุด เส้น ฯลฯ อะไรที่เกิดขึ้น ตัวอย่างเช่น

ในสัจพจน์อันแรกของยุคลิดกล่าวว่า "เส้นสามารถลากจากจุดใด ๆ ไปยังจุดอื่น ๆ ได้ในขณะที่วิธีใหม่กล่าวว่า "จุดสองจุดที่ต่างกันที่กำหนดให้ จะทำให้เกิดเส้นขึ้นเส้นหนึ่ง"

สิ่งที่ยุคลิดเรียกว่า เส้น นั้นในปัจจุบันนี้เรียกว่า เซกเมนต์ ซึ่งให้นิยามเซกเมนต์ว่า ประกอบด้วยจุดที่ต่างกันสองจุดและรวมจุดทั้งหมดที่อยู่ระหว่างจุดสองจุดนั้น

เซกเมนต์เป็นเส้นที่จำกัดความยาว (limited extent) แต่เส้นเป็นอนิยามซึ่งเห็นได้จากสัจพจน์ที่ 2 ของยุคลิด ซึ่งเส้นเป็นเส้นที่ไม่จำกัดความยาว (Unlimited extent)

ในหลาย ๆ กรณียุคลิดได้ใช้คำว่า "เท่ากัน" (equals) ซึ่งในปัจจุบันนี้ใช้คำว่า**ลงรอยกัน** ตัวอย่างเช่น แทนที่จะกล่าวว่า "ส่วนของเส้นสองส่วนที่เท่ากัน" (two line segment are equal) เราจะกล่าวว่า "ส่วนของเส้นสองส่วนที่ลงรอยกัน" ถ้าทั้งสองส่วนเท่ากัน สองส่วนนั้นต้องเป็นส่วนของเส้นตรงเดียวกัน

คำว่า "วงกลม" ในปัจจุบันนี้ให้นิยามว่า "วงกลมประกอบด้วยเซตของจุดทั้งหมดบนระนาบซึ่งรัศมีทุก ๆ เส้นยาวเท่ากัน รัศมีคือ เซกเมนต์ (ไม่ใช่ระยะทาง) ซึ่งมีจุดปลายจุดหนึ่งอยู่บนเส้นรอบวง จุดปลายอีกอันหนึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลาง ซึ่งเราถือว่า จุดศูนย์กลางนี้ไม่ได้อยู่บนเส้นรอบวงและจุดทุก ๆ จุดที่อยู่บนระนาบที่เป็นเส้นโค้งปิด (closed curve) จะไม่อยู่บนเส้นรอบวง

เส้นตรง (Straightness)

เมื่อพูดถึงเส้นตรงมักไม่นิยมเพิ่มคำว่า Straight เข้าข้างหน้าคำว่า line มักจะพูดว่า line ซึ่งเป็นที่เข้าใจกันว่าหมายถึงเส้นตรงนั่นเองเพราะถึงเติมเข้าไปก็ไม่เกิดความหมายหรือให้อะไรใหม่ขึ้นเลย ดังนั้นในสัจพจน์จึงใช้คำว่า เส้น (line) เพราะเราเข้าใจว่าเป็นทางเดินระหว่างจุดสองจุด

ในการเขียนรูปของเส้นมักเขียนเป็นเส้นตรงเพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างจุดและเส้นแต่ไม่ได้เกี่ยวข้องกับความตรงของเส้นเลย รูปร่างของเส้นเป็นเพียงแนวทางในการพิสูจน์และช่วยให้ไปสู่จุดหมายเท่านั้นเอง

เส้นมีความยาวดังนั้นจึงมีเพียงหนึ่งมิติ เนื่องจากเส้นออกไปทางข้าง ๆ อีกเส้นหนึ่ง ทิศทางการเคลื่อนที่จะให้เป็น 2 มิติซึ่งจะเรียกว่าพื้นที่ ทิศทางการเคลื่อนที่ใน 3 มิติจะเรียกว่าปริมาตร

ชนิดของเส้น

1. เส้นตรง
2. เส้นโค้ง

ถ้าพิจารณาถึงลูกดิ่งของช่างก่อสร้างแล้ว ทิศทางที่แสดงโดยเส้นเชือกนั้นคือเส้นตั้งหรือเส้นดิ่ง (Vertical line)

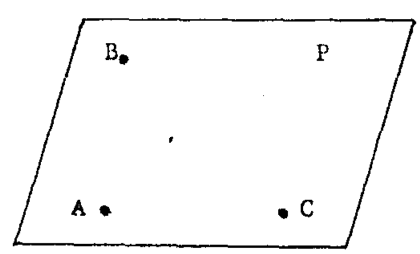
ส่วนทิศทางแสดงโดยเส้นตรงในแนวระดับเรียกว่า เส้นแนวนอน แนวราบหรือแนวระดับ (Horizontal line) และทิศทางที่แสดงโดยเส้นซึ่งไม่ใช่เส้นดิ่ง และเส้นแนวระดับเรียกว่า เส้นเฉียง (oblique)

รูปที่ 6.1

นิยาม จุดทั้งหลายเรียกว่าเป็นจุดร่วมเส้นตรงเดียวกัน (collinear) ก็ต่อเมื่อมีเส้นตรงเส้นหนึ่งบรรจุทุก ๆ จุดเหล่านั้น

จุดทั้งหลายเรียกว่าไม่เป็นจุดร่วมเส้นตรงเดียวกัน (noncollinear) ก็ต่อเมื่อไม่มีเส้นตรงใดที่บรรจุจุดทุกจุดเหล่านั้น

นิยาม ถ้ามีจุดสามจุดซึ่งไม่เป็นจุดร่วมเส้นตรงเดียวกันแล้วจะมีระนาบหนึ่งระนาบเท่านั้นที่บรรจุจุดทั้งสามอาจกล่าวว่าจุดสามจุดที่ไม่เป็นจุดร่วมเส้นตรงเดียวกันกำหนดระนาบระนาบหนึ่ง

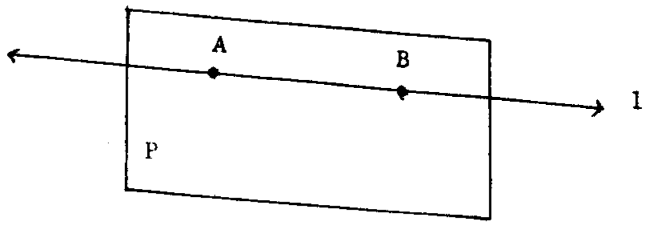


รูป 6.2

จากรูป 6.2. เป็นส่วนหนึ่งของระนาบที่บรรจุจุด A B และ C จุดทั้งสามนี้บางครั้งเรียกว่าเป็นจุดร่วมระนาบเดียวกัน (Coplanar)

นิยาม จุดทั้งหลายเป็นจุดร่วมระนาบเดียวกันก็ต่อเมื่อมีระนาบหนึ่งที่บรรจุจุดทั้งหมดนี้

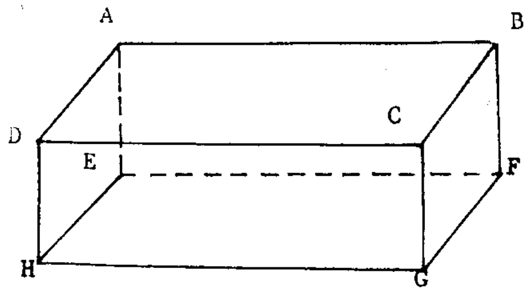
นิยาม ถ้าจุดสองจุดอยู่ในระนาบระนาบหนึ่งแล้ว เส้นตรงที่บรรจุจุดทั้งสองอยู่ในระนาบด้วย



รูป 6.3

ระนาบขนานและเส้นขนาน (Parallel planes and lines)

พิจารณาทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือทรงลูกบาศก์ (ABCD;EFGH) อาจจะช่วยให้เราคิดถึงกล่องชอล์คได้ พิจารณาระนาบ ABCD และ EFGH ซึ่งเป็นส่วนบนและส่วนล่างของวัตถุและรูปเหล่านี้ขยายให้เห็นทุกทิศทาง มันแสดงให้เห็นว่าไม่มีทางที่ระนาบสองระนาบนี้จะพบกันได้



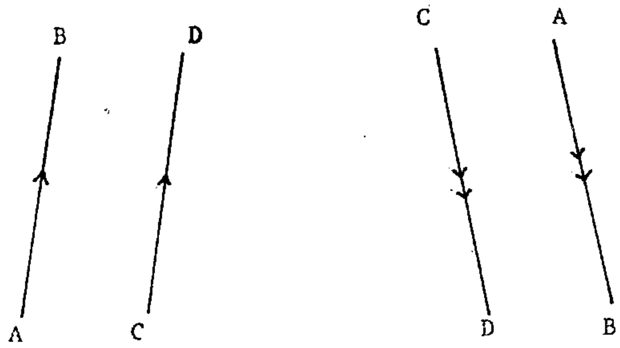
รูป 6.4

ในทำนองเดียวกันระนาบ AEHD และ BFGC ในด้านหน้าและด้านหลังของรูปวัตถุ ไม่มีโอกาสที่จะพบกันได้เลย เมื่อขยายมันให้ไกลออกไป ในทำนองเดียวกันกับด้านข้างของระนาบ AEHD และ BFGC ระนาบเหล่านี้เรียกว่า **ระนาบขนาน** (Parallel planes)

นิยาม "ระนาบขนาน คือ ระนาบที่ไม่พบกันเลยแม้จะต่อขยายออกไปให้ไกลเท่าไร" ในรูปเดียวกันเราพิจารณาระนาบ ABCD ในระนาบนี้ เส้น $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{DC}$ มีทิศทางเดียวกันและถ้าเราต่อเส้น $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{DC}$ ออกไปอีก มันจะไม่มีโอกาสพบกันได้เลย ในทำนองเดียวกันสำหรับเส้น $\overleftrightarrow{AD}$ และ $\overleftrightarrow{BC}$ ในระนาบ ABCD เส้นเหล่านี้เราเรียกว่า **เส้นขนาน** (Parallel line)

นิยาม "เส้นขนานคือเส้นตั้งอยู่ในระนาบเดียวกัน และเมื่อต่อปลายทั้งสองข้างของเส้นที่อยู่ในระนาบเดียวกันออกไปไกลเท่าไรก็ตามจะไม่พบกันเลย"

เมื่อเส้นตรง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน ปกติจะแสดงด้วยลูกศรเดี่ยวหรือลูกศรคู่ดังภาพข้างล่างนี้



รูปที่ 6.5

เงื่อนไขที่กล่าวมาแล้วนี้ จำเป็นสำหรับเส้นตรงที่ขนานกัน ตัวอย่างเส้น $\overleftrightarrow{AC}$ ในระนาบ ABCD และ $\overleftrightarrow{HG}$ ในระนาบขนาน EFGH จะไม่พบกันและแม้จะต่อปลายทั้งสองข้างของเส้นทั้ง 2 ออกไปยาวเท่าไรก็ตาม มักจะไม่ขนานกันเพราะไม่ได้อยู่ในระนาบเดียวกัน

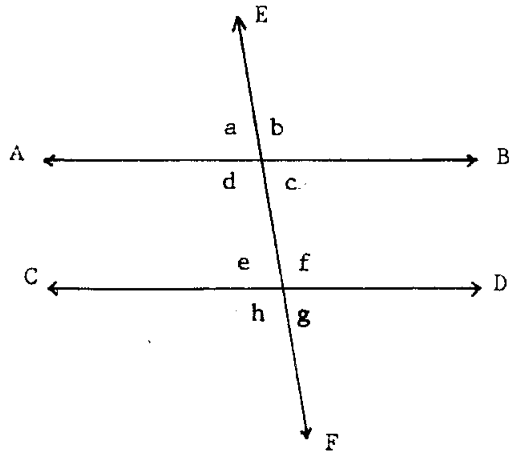
เส้นเหล่านี้ซึ่งไม่พบกันเมื่อต่อมันออกไปยาวเท่าไรก็ตามและไม่อยู่ในระนาบเดียวกันนี้เรียกว่า **เส้นไขว้ต่างระนาบ** (skew lines) เส้นเหล่านี้จะไม่มีทิศทางเดียวกัน

ภาพแสดงเส้นตัดขวางตามรูป 6.4

จะเห็นว่า เส้นตรง $\overleftrightarrow{EF}$ ซึ่งลากตัดเส้น $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ เรียกว่า เส้นตัดขวาง

(transversal) และมุมต่าง ๆ ซึ่งเกิดมีขึ้น ดังนี้

1. มุมภายนอก (exterior angles) $\hat{a},\hat{b},\hat{g},\hat{h}$
2. มุมภายใน (interior angles) $\hat{c},\hat{d},\hat{e},\hat{r}$
3. มุมภายในร่วมกัน (allied or co-interior angles) $\hat{d},\hat{e},\hat{c},\hat{f}$



ภาคแสดงเส้นตัดขวาง

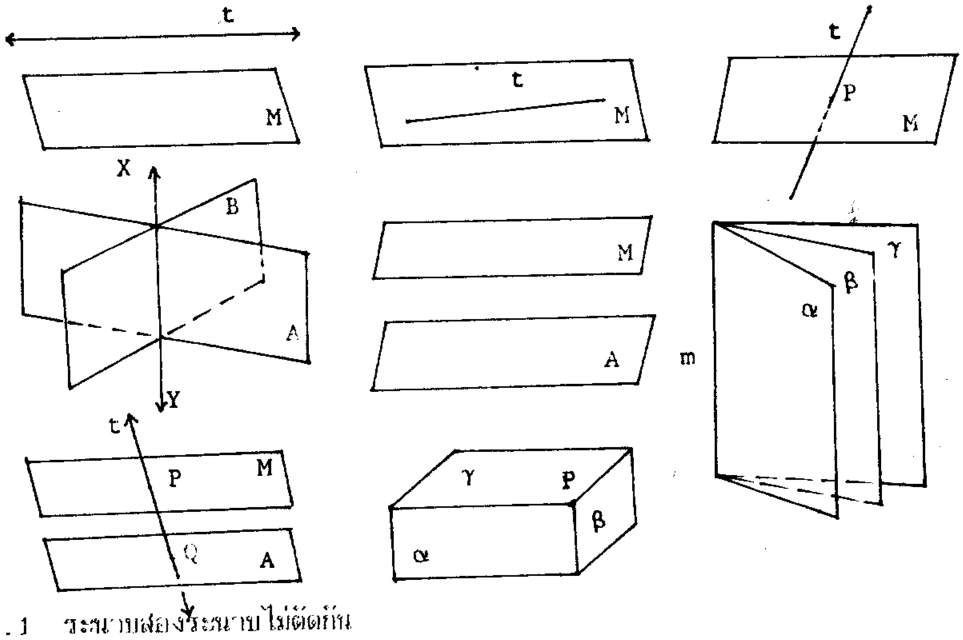
รูปที่ 6.6

4. มุมตรงข้าม ที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัด ระหว่างมุมภายนอกและมุมภายใน (Corresponding angles) $\hat{a},\hat{e};\hat{b},\hat{f};\hat{c},\hat{g};\hat{d},\hat{h}$
5. มุมภายในที่อยู่ตรงข้าม (Alternate angles) $\hat{c},\hat{e};\hat{d},\hat{f}$ จะได้ว่า
   5.1 มุมภายนอก = มุมภายในที่อยู่ตรงข้ามข้างเดียวกันของเส้นตัด (หรือเส้นผ่า) $\hat{d} = \hat{h}$, $\hat{a} = \hat{e}$, $\hat{b} = \hat{f}$, $\hat{c} = \hat{g}$
   5.2 มุมภายในที่อยู่ตรงข้ามย่อมเท่ากัน $\hat{c} = \hat{e}$, $\hat{d} = \hat{f}$
   5.3 ผลบวกของมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเข้าย่อมเท่ากับผลบวกของมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามข้างเดียวกันของเส้นตัดอีกด้านหนึ่ง

$$\hat{d} + \hat{e} = \hat{c} + \hat{f}$$

กิจกรรมการเรียนที่ 6.1

1. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้จงพิจารณารูปใดแสดงความสัมพันธ์ ตามข้อ 1.1 - 1.8



1.1 ระนาบสองระนาบไม่ตัดกัน

1.2 เส้นตรงกับระนาบตัดกันที่จุดจุดเดียว

1.3 เส้นตรงและระนาบไม่ตัดกัน

1.4 เส้นตรงอยู่ในระนาบ

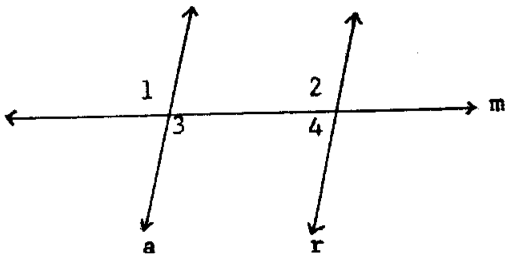
1.5 ระนาบสองระนาบตัดกันเป็นเส้นตรง

1.6 ระนาบสามระนาบตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง

1.7 ระนาบสามระนาบตัดกันเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

1.8 เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกันระนาบสองระนาบ ณ จุดสองจุดที่ต่างกัน

2. จากรูปที่กำหนดให้ เส้นตรง a และ r เป็นเส้นตรงสองเส้นมี m เป็นเส้นผ่า และ a//r



จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{2}$ อย่างไรเมื่อเทียบกับเส้น a,r และ m

2.2 ทำไม $\hat{1} = \hat{2}$

2.3 เรียก $\hat{2}$ และ $\hat{3}$ อย่างไรเมื่อเทียบกับเส้น a,r และ m

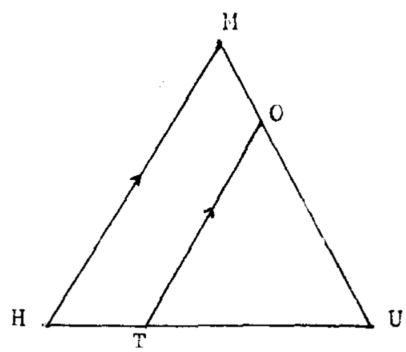
2.4 เหตุใด $\hat{2} = \hat{3}$

2.5 เรียก $\hat{3}$ และ $\hat{4}$ อย่างไรเมื่อเทียบกับเส้น a,r และ m

2.6 ผลรวมของ $\hat{3}$ และ $\hat{4}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด เพราะเหตุผลใด

3. ใน ΔMUH, $\overline{OT} \parallel \overline{MH}$

$\hat{M} = (x + 80)^{\circ}$, $\hat{H} = (25 - 2x)^{\circ}$ และ $T\hat{O}U = (-4x)^{\circ}$



3.1 x มีค่าเท่ากับเท่าใด

3.2 จงหา $\hat{M}$

3.3 จงหา $\hat{H}$

3.4 จงหา $T\hat{O}U$

3.5 จงหา $O\hat{T}U$

6.2 สัจพจน์ของจุดและเส้น

6.2.1 **สัจพจน์กลุ่มที่ 1 สัจพจน์เกี่ยวกับจุดและเส้น**

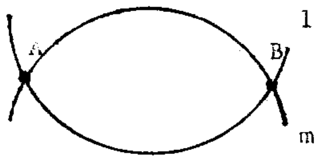
1) The three-point postulate จะมีอย่างน้อยหนึ่งจุดในสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

2) The point-line postulate จุดสองจุดใด ๆ ที่ต่างกัน จะมีเส้นตรงผ่านได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

3) The line-point postulate เส้นทุก ๆ เส้นประกอบขึ้นด้วยจุดอย่างน้อย 2 จุด

ทฤษฎี 6.1 เส้นสองเส้นที่ต่างกัน จะตัดกันไม่เกิน 1 จุด

พิสูจน์ สมมติให้เส้น l และ m ตัดกันสองจุดที่ A และ B แล้วจะพิสูจน์ว่าเป็นไปไม่ได้



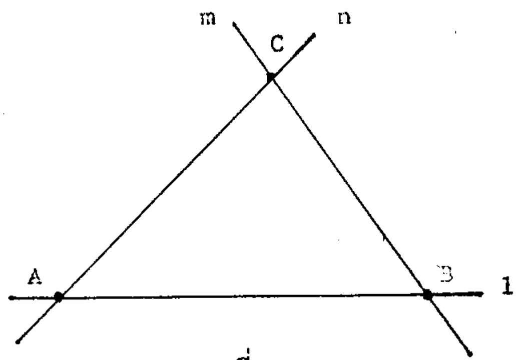
รูปที่ 6.9

จะเห็นว่ามีเส้นที่ต่างกันสองเส้นที่ผ่านจุด A และ B คือเส้น l และ m ดังนั้นก็เกิดการขัดแย้งกับสัจพจน์ข้อ 2 ซึ่งกล่าวว่า จุดสองจุดที่ต่างกันจะมีเส้นผ่านได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

ดังนั้นข้อสมมติฐานที่ว่าเส้น l และ m ตัดกันมากกว่า 1 จุด จึงเป็นไปไม่ได้

ดังนั้นทฤษฎีนี้เป็นจริง คือ เส้นสองเส้นที่ต่างกันจะไม่ตัดกันมากกว่า 1 จุด

ทฤษฎี 6.2 จะมีเส้นอย่างน้อยที่สุดสามเส้นอยู่ในระนาบ



รูปที่ 6.10

พิสูจน์

1. มีอย่างน้อยสามจุดที่อยู่บนระนาบที่ไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน ให้เป็นจุด A,B,C	1. Three-points postulate
2. ให้ l เป็นเส้นที่ลากผ่านจุด A,B m เป็นเส้นที่ลากผ่านจุด B,C n เป็นเส้นที่ลากผ่านจุด C,A	2. Point-line postulate
3. เส้นทั้งสาม l,m,n จะแตกต่างซึ่งกันและกัน	3. ถ้า 2 เส้นใด ๆ เป็นเส้นเดียวกันจุดทั้งสาม A,B,C จะอยู่บนเส้นเดียวกัน ปรากฏว่าขัดแย้งกับสิ่งที่เลือกไว้

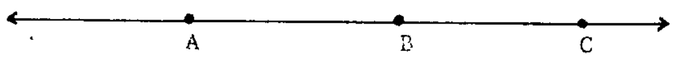
6.2.2 **สัจพจน์กลุ่มที่ 2 สัจพจน์ของการอยู่ระหว่าง** (Postulate of betweeness)

ยุคลิดไม่ได้ตั้งข้อสมมติฐานเกี่ยวกับการจัดลำดับของจุดบนเส้น แต่เขาได้นำเอามาใช้เลย โดยไม่ให้ความเห็นไว้ ต่อมามีนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ มอร์ริทซ์ พาช (Moritz Pasch) เป็นคนแรกที่ศึกษาคุณสมบัติของสัจพจน์ของการอยู่ระหว่างสัจพจน์กลุ่มที่ 2 สัจพจน์ของการอยู่ระหว่าง

มีความสัมพันธ์อย่างหนึ่งที่เรียกว่า 5 ข้อด้วยกัน ระหว่าง ซึ่งจะมีจุดหนึ่งของจุดสามจุดที่อยู่ระหว่างสองจุดนั้น ถ้ามีจุด 3 จุด คือ A,B,C,*b อยู่ระหว่าง A และ C เขียนแทนด้วย "(ABC)" หรือ "(CBA)" คือจุด B อยู่ตรงกลางของ A และ C

1) The ABC betweeness postulate

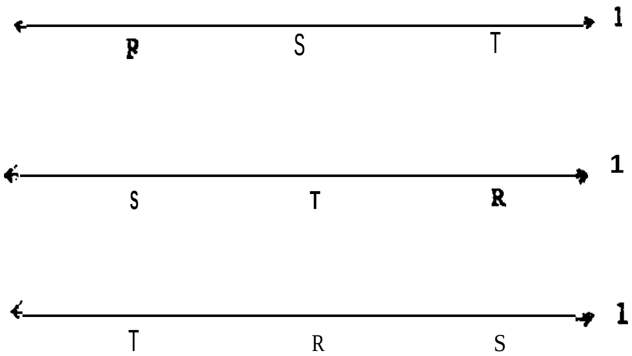
ถ้า (ABC) นั่นคือ ถ้าจุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C แล้วจุด A,B และ C จะเป็นจุดสามจุดที่ต่างกันซึ่งอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



รูปที่ 6.11

2) **The three-points betweeness postulate**

ทุก ๆ สามจุดซึ่งอยู่บนเส้น (ตรง) ใด ๆ จะมีจุด ๆ หนึ่งที่อยู่ระหว่างจุดทั้งสองนั้น นั่นคือ ถ้า R,S และ T เป็นจุดสามจุดที่อยู่บนเส้น l ประโยคต่อไปนี้อย่างใดอย่างหนึ่งเป็นจริงคือ *RST*, *STR* และ *TRS*



รูปที่ 6.12

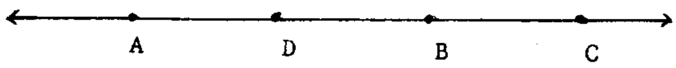
3) **The four-points betweeness postulate**

จุด A เป็นจุดบนเส้นหนึ่ง ๆ อาจจะใช้ตัวแทนเป็น A_1, A_2, A_3, A_4 ดังนั้นความสัมพันธ์ที่ว่า "ระหว่าง" จะเป็นลำดับกันกับจำนวน subscript นั่นคือ ความสัมพันธ์ "ระหว่าง" จะเป็นดังนี้ $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$
สัมพันธ์ได้เป็น $A_3A_2A_1$, $A_4A_2A_1$, $A_4A_3A_1$, $A_4A_3A_2$

ประโยคที่กล่าวมานี้จะเป็นจริงในเส้นที่มี 5 จุด หรือจุดบนเส้นที่มีจำนวนจุดจำกัด

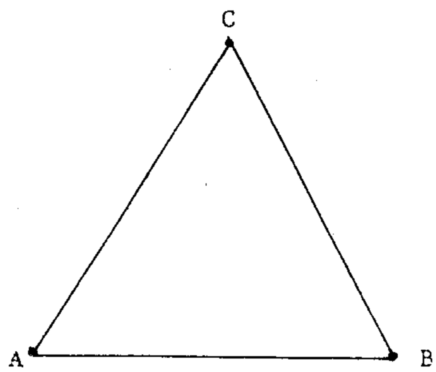
4) **The line building postulate**

ถ้า A และ B เป็นจุดสองจุดใด ๆ จะมีจุด C อย่างน้อยหนึ่งจุดที่ทำให้จุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C (หรือ (ABC) และจะมีจุด D อย่างน้อยหนึ่งจุดที่ทำให้ D อยู่ระหว่างจุด A และ B หรือ (ADB)



รูปที่ 6.13

นิยาม ถ้า A,B และ C เป็นจุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรง เซตของจุดของ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ เรียกว่า **รูปสามเหลี่ยม** (triangle) เรียกจุด A,B และ C ว่าจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม และเรียก $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ ว่าเป็น ด้านของรูปสามเหลี่ยม เขียนแทนรูปสามเหลี่ยม ABC ด้วย "Δ ABC"



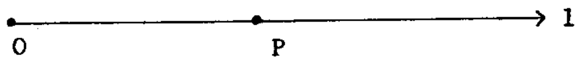
รูปที่ 6.14

เรียกจุดทั้งหลายที่เรียงกันอยู่บนเส้นว่าเป็นจุดที่อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน (collinear) ดังนั้นจากนิยามกล่าวได้ว่า ถ้าจุด A,B และ C ไม่อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันแล้ว เซตของจุดของ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ เรียกว่า เป็นรูปสามเหลี่ยม

5) **The two-side postulate**

เส้นแต่ละเส้นจะแบ่งระนาบออกจากกันหมายความว่า จุดทุกจุดบนระนาบที่ไม่อยู่บนเส้นตรง ถูกแบ่งออกเป็นสองเซต เรียกว่า สองข้างของเส้น ซึ่งถ้า P และ Q เป็นเซตเดียวกันแล้ว P และ Q จะอยู่ข้างเดียวกันของเส้น (เทียบกับเส้นที่ผ่านระนาบ) แต่ถ้าและ Q เป็นเซตที่ต่างกัน P และ Q จะอยู่ตรงข้ามซึ่งกันและกัน (คนละข้างของเส้นที่ผ่านระนาบ)

นิยาม รังสี O หรือรังสีด้วยจุดปลาย O คือ เซตของจุดที่ประกอบด้วยจุดและจุดทั้งหลายที่อยู่บนข้างหนึ่งของจุด O ของเส้น l ที่ผ่าน O นั้น (ดังรูป)



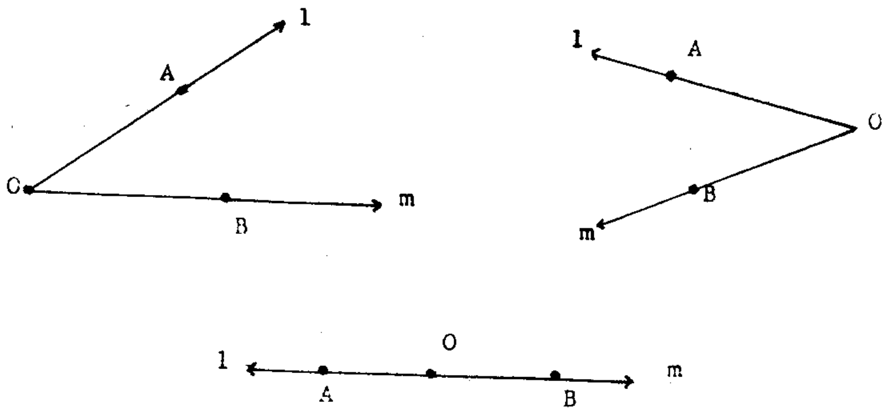
รูปที่ 6.15

ถ้าจุด P เป็นจุดใด ๆ ของรังสี เราอาจจะพูดว่า รังสี OP

เป็นที่สังเกตว่า เราอาจจะพูดว่ารังสี เป็นเซตของจุดที่ประกอบด้วยจุด O และจุด P และจุดทั้งหลาย Q ซึ่ง OQR และจุดทั้งหลาย R ซึ่ง OPR

นิยาม เซตของจุดบนรังสีสองรังสี จากจุดหนึ่งเราเรียกว่ามุม (angle) จุดนั้นเรียกว่าจุดยอด (vertex) ของมุม และเรียกรังสีทั้งสองนั้นว่า "ด้าน" ของมุมถ้ารังสีทั้งสองอยู่บนเส้น**เดียวกัน มุมนั้นเรียกว่า "มุมตรง"** (straight angle)

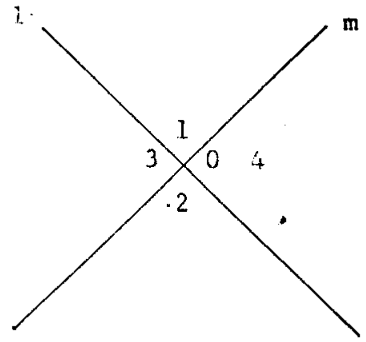
ถ้า O เป็นจุดยอด และ A,B เป็นจุดอื่น ๆ อีก 2 จุด เป็นข้างของมุมเราพูดว่ามุม "AOB" เขียนแทนด้วย <AOB หรือ $\hat{AOB}$



รูปที่ 6.16

เป็นที่น่าสังเกตว่า เมื่อกล่าวว่า มุมเป็นเซตของจุดซึ่งอยู่ในด้านในของมุมนั้นจุดที่อยู่ระหว่างรังสีทั้งสองนั้นไม่ได้เป็นส่วนของมุม

นิยาม ถ้าเส้น 1 และ m ตัดกันที่จุด O และรังสีทั้ง 4 เริ่มจาก O (ดังรูป) มุม 1 และมุม 2 กล่าวว่าเป็นมุมในแนวตั้งซึ่งกันและกัน และมุม และมุม 4 ก็เป็นมุมในแนวตั้งซึ่งกันและกัน



รูปที่ 6.17

การลงรอยกันของเซกเมนต์ (Congruence of segments)

ในชีวิตประจำวัน เรามักจะสนใจเกี่ยวกับขนาดของสิ่งต่าง ๆ และมักจะหาทางที่จะทดลองดูว่าสิ่งต่าง ๆ นั้นมันมีขนาดเท่ากันหรือไม่ ในทางเรขาคณิต เมื่อต้องการจะบอกว่าเซกเมนต์ 2 เซกเมนต์เท่ากันจะใช้คำว่าลงรอยกัน

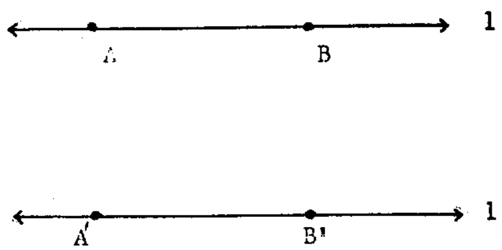
6.2.3 **สัจพจน์กลุ่มที่ 3 การลงรอยกันเชิงเส้น**

(Postulate Group III Linear congruence)

สมมติว่ามีความสัมพันธ์ระหว่างเซกเมนต์ที่เรียกว่าลงรอยกันความสัมพันธ์นี้จะมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1) **The existence postulate for segments**

ให้จุด A และ B อยู่บนเส้น (ตรง) l และจุด A' อยู่บนเส้น l' ดังนั้นแต่ละข้างของจุด A' ของเส้น l' จะมีจุด B' อย่างน้อยหนึ่งจุดซึ่ง $\overline{AB}$ ลงรอยกันกับ $\overline{A'B'}$ เราใช้แสดงว่า $\overline{AB}$ ลงรอยกันกับ $\overline{A'B'}$ ด้วยสัญลักษณ์ "$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$"



รูปที่ 6.18

การลงรอยกันไม่คำนึงถึงลำดับของจุด

ถ้า $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ดังนั้น $\overline{BA} \cong \overline{B'A'}$

2) **The three-part segment postulate**

คุณสมบัติของการลงรอยกันสอดคล้องตามข้อต่อไปนี้

(a) $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

นั่นคือการลงรอยกันของเซกเมนต์ มีสมบัติการสะท้อน

(b) ถ้า $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ แล้ว $\overline{A'B'} = \overline{AB}$

(c) ถ้า $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ แล้ว $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$

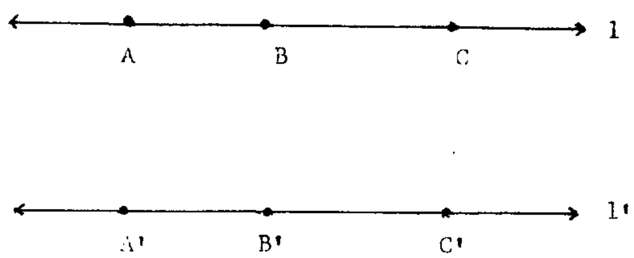
$\overline{AB} = \overline{A''B''}$

3) **The addition and substraction of segments postulate**

สมมติว่าจุด B อยู่ระหว่างจุด A และ C บนเส้นตรง l และจุด B' อยู่ระหว่างจุด A' และจุด C' อยู่บนเส้นตรง l' เราจะได้ว่า

(a) ถ้า $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ และ $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ แล้ว $\overline{AC} = \overline{A'C'}$

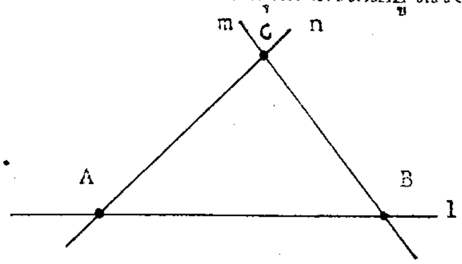
(b) ถ้า $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ และ $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ แล้ว $\overline{AB} = \overline{A'B'}$



รูป 6.19

กิจกรรมการเรียนที่ 6.2

1. สัจพจน์กลุ่ม 1 มีกี่ข้อ กล่าวว่าอย่างไร
2. จงพิจารณาการพิสูจน์ว่าจะมีเส้นอย่างน้อยที่สุดสามเส้นอยู่ในระนาบ



และจงตอบคำถามต่อไปนี้

พิสูจน์

2.1 มีอย่างน้อยสามจุดที่อยู่บนระนาบและไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกันคือจุด A, B และ C เพราะเหตุใด

2.2 ให้ l เป็นเส้นที่ลากผ่านจุด A และ B

m เป็นเส้นที่ลากผ่านจุด B และ C

n เป็นเส้นที่ลากผ่านจุด C และ A

เพราะเหตุใดจึงเกิดเส้น l m และ n

2.3 เส้นทั้งสาม l, m, n จะแตกต่างกันเพราะเหตุใด

3. The three-points betweness postulate ซึ่งเป็นข้อหนึ่งของสัจพจน์กลุ่มที่ 2 กล่าวว่าอย่างไร

4. The addition and subtraction of segments postulate ซึ่งเป็นข้อหนึ่งของสัจพจน์กลุ่มที่ 3 กล่าวว่าอย่างไร

6.3 การตัดกันของเซตของจุด (Intersection of Sets of Points)

สมาชิกของเซตของจุดประกอบด้วยจุดทั้งหลาย คำว่า จุด เป็นนามธรรมเหมือนกับ "จำนวน" เราไม่สามารถเห็นจุดเหมือนกับเราไม่สามารถเห็นจำนวน แต่เราใช้สัญลักษณ์หรือตัวแทนที่เป็นรูปธรรมเพื่อที่จะให้เป็นที่เข้าใจกันเหมือนกับเราใช้ "ตัวเลข" แทน "จำนวน" นั่นเอง

เราใช้ "dot" แทนจุดและ "dot" เป็นเครื่องหมายที่ทำลงบนกระดาษซึ่งเป็นรูปธรรมที่ใช้แทนแนวความคิดของนามธรรมของ "จุด" dot แทนจุด แต่มันไม่ใช่ "จุด"

เราสามารถที่จะใช้เซตของจุดได้เหมือนเซตของจำนวน เซตของจุดอาจจะไม่มีสมาชิกก็ได้ เซตของจุดที่ไม่มีสมาชิกเราเรียกว่า "เซตว่าง" เซตของจุดที่มีสมาชิกตัวเดียวแทนด้วยจุดเล็ก ๆ และใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่แทนชื่อของจุดซึ่งจะอ่านได้ว่า "เซตที่ประกอบด้วยจุด A" หรืออาจกล่าวเพียงว่า "จุด A"

เซตของจุดเป็นเซตอนันต์ (infinite set)

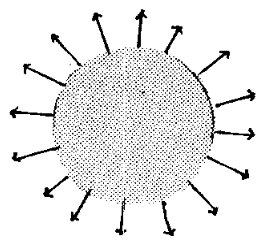
เซตของจุดที่จะกล่าวถึงคือ ปริภูมิ, ระนาบ และเส้น ขณะที่ใช้ "dot" แทนจุด แต่ยังไม่มีรูปแบบที่ใช้เซตอนันต์ของจุดที่เรียกว่า ปริภูมิ เราคิดว่าปริภูมิคล้ายกับเป็นเซตจักรวาลของจุด

เซตของจุดที่เรียกว่า ระนาบ เป็น เซตย่อยของปริภูมิ เป็นเซตพิเศษของเซตของจุดของปริภูมิ ซึ่งเมื่อพิจารณาดูโดยสัญชาติญาณแล้ว จะเห็นว่าระนาบมีคุณสมบัติอันหนึ่งคือแบนราบ (flatness) หรือ ราบเรียบ (Smoothness) ระนาบ M และระนาบ A มักจะแทนด้วยรูปข้างล่างนี้

M A

รูปที่ 6.20

ระนาบไม่หักและไม่มีขอบเขต ตามคุณสมบัตินี้อาจจะมีสิ่งที่ใช้แทนระนาบได้ ซึ่งจะทำให้เห็นชัดขึ้นถึงเนื้อหาของมันที่ไม่มีขอบเขต ดังรูป 6.21



รูปที่ 6.21

ตัวแทนของเซตของจุดมักจะนำมาใช้บ่อย ๆ ในรูปเรขาคณิต (Geometrical figures)

เส้น เป็นเซตย่อยพิเศษของระนาบ ซึ่งตามข้อตกลงแล้วมีคุณสมบัติว่าตรง (Straightness) เนื่องจากข้อตกลงนี้เอง คำว่า "เส้น" จึงหมายถึง เส้นตรง เพราะว่าเส้นเซตย่อยของระนาบ และระนาบก็เป็นเซตย่อยของปริภูมิ อาจกล่าวได้ว่าเส้นเป็นเซตย่อยของปริภูมิ

เส้น แทนด้วยรูปร่างทางเรขาคณิต ดังนี้

รูป 6.22

ลูกศรที่ปลายแต่ละข้าง หมายความว่า เซตนี้ไม่มีขอบเขต และไม่มีที่สิ้นสุด เมื่อเราคิดว่าเส้นไม่มีที่สิ้นสุด จุดสองจุดของเซตนี้อาจจะเป็นดังที่แสดงไว้ดังรูป และเซตนี้อาจจะเป็นเส้น AB หรือเส้น BA เราใช้สัญลักษณ์ " <-> " เขียนไว้บนตัวอักษร AB หรือ BA ดังนี้

$\overleftrightarrow{AB}$ หรือ $\overleftrightarrow{BA}$

ซึ่งอ่านว่า "เส้น AB" หรือ "เส้น BA" เพราะว่าทั้งสองสิ่งนี้เป็นชื่อ 2 ชื่อที่ต่างกัน แต่เป็นเซตของจุดเดียวกัน อาจจะใช้ชื่อหนึ่งชื่อใดก็ได้ เมื่อต้องการอ้างถึงเส้น

มีจุดเพียงสองจุดเท่านั้น จึงจะใช้ชื่อสำหรับเส้น AB ได้ ถ้ามีจุด C ซึ่งเป็นจุดอื่น ๆ อยู่บน $\overleftrightarrow{AB}$ เราจะไม่ใช้ ABC เป็นชื่อของเส้นตรงนี้ แต่เราจะใช้ชื่อเป็นดังนี้ $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AB}$ ฯลฯ

ถ้าเราใช้อักษรตัวเล็กเพียงตัวเดียว แทนเส้นตรงแล้วเราจะสะดวกขึ้น เช่น ถ้าเรามีเส้นตรง m เราก็จะได้ดังนี้

รูปที่ 6.23

เราอาจจะเข้าใจเกี่ยวกับเซตของจุดดีขึ้น ถ้าเราพิจารณา รูปแบบจำลองทางกายภาพ (Physical models) เช่นถ้าเราพิจารณาถึงความสัมพันธ์ของตำแหน่งต่าง ๆ บนแผนที่ซึ่งให้ dot แทนตำแหน่ง (ที่ตั้ง) ของเมือง หรือพิจารณาสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่บนโลกเช่น ปลายเข็ม มุมของห้อง ที่ฝาผนัง 2 อัน และพื้นมาประกบกันสิ่งเหล่านี้และสิ่งอื่น ๆ จะสัมพันธ์กับ **จุดทางคณิตศาสตร์** (Mathematical point) ตามแบบรูปทางกายภาพ (Physical model) แต่สิ่งที่ควรตระหนักก็คือสิ่งเหล่านี้ ไม่ใช่จุด แต่เป็นเพียงตัวแทนที่เลือกมาจากโลก ที่เกี่ยวข้องกับเราเท่านั้น ตามความจำเป็นจริงแล้ว ไม่มีอะไรในโลก (Physical World) ที่สามารถจะใช้แทนเพื่อให้สอดคล้องจริง ๆ กับความคิดที่เป็นนามธรรมของจุดได้เลย

กล่าวได้ว่าของบนพื้นโลก (Physical World) ช่วยให้เราได้พัฒนาแนวความคิดเกี่ยวกับเส้นขึ้นอีก ดังนั้น เซตของจุดอาจจะเกี่ยวข้องกับ เชือกยึดกล้าม เส้นลวด รอยพับในแผ่นกระดาษ รอยต่อของฝาผนังสองอันในห้องหนึ่ง ๆ จะเห็นว่าสิ่งเหล่านี้เป็นตัวแทนซึ่งเข้าใจว่าเป็นเส้นที่เป็นนามธรรม รูปแบบบนพื้นโลกอาจจะให้ความหมายไม่ครอบคลุม เพราะรูปแบบทางกายภาพต้องมีที่สิ้นสุด แต่เดี๋ยวนี้เรารู้สึกชินต่อการใช้รูปแบบทางกายภาพแทน จุด,

เส้น และระนาบ เพราะมันไม่ยากเกินไปสำหรับที่จะคิดและเข้าใจเกี่ยวกับ จุด, เส้น ระนาบเพราะว่าเซตของจุดไม่มีขอบเขต การที่ใช้รูปแบบทางกายภาพแทนจึงไม่เพียงพอ หรือไม่ครอบคลุม เพราะรูปแบบทางกายภาพมีขอบเขต อย่างไรก็ตาม กระดาษแข็ง พื้น ฝาผนัง แผ่นพลาสติกเป็นรูปแบบ (model) ที่ช่วยให้เราข้าใจคำว่า แบนราบ ราบเรียบ ซึ่งเป็นคุณสมบัติของระนาบ

เราต้องตระหนักให้ดีว่า ในการนำรูปแบบทางกายภาพมาใช้สำหรับเซตของจุดนั้น เซตของจุดไม่ได้มีคุณสมบัติทางกายภาพตามรูปแบบนั้นเลย แต่รูปแบบทางกายภาพเป็นเพียงสิ่งง่าย ๆ ที่จะให้เราคิดหรือเข้าใจเกี่ยวกับระนาบที่มีขอบเขต แผ่นกระดาษแข็งมีขอบเขตเส้นตรงที่แสดงได้ตามรอยพับในกระดาษ ก็มีจุดเริ่มต้นและที่สิ้นสุด เราไม่เคยคิดว่า รูปแบบนั้นจะเป็นเซตของจุดแต่มันเพียงตัวแทนทางกายภาพเท่านั้น

พิจารณาผลตัดของเซตของจุด จะเริ่มด้วยการตัดกันของเส้นสองเส้น

การตัดกันของเส้นตรงสองเส้น อาจทำให้ได้ผลดังนี้

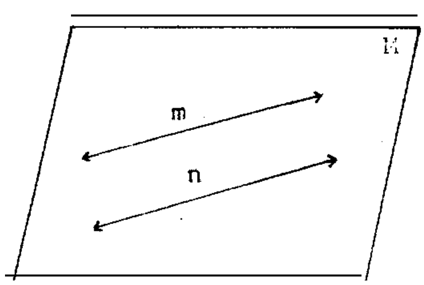
ก. เซตว่าง

ข. เซตที่มีสมาชิกตัวเดียว

ค. เซตอนันต์

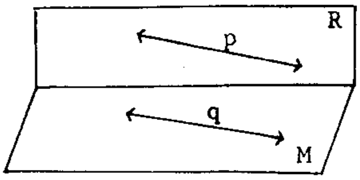
เราจะพิจารณารูปต่อไปนี้

ในรูปที่ 1



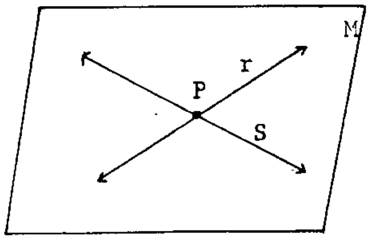
ผลตัดของเส้น m และ n เป็นเซตว่าง เส้น m,n เป็นเซตย่อยของระนาบ ซึ่ง $m \cap n = \phi$ เส้น m,n ลักษณะนี้เรียกว่า **เส้นขนาน (Parallel)**

ผลตัดของเส้น p และ q เป็นเซตว่าง เช่นกัน
นั่นคือ $p \cap q = \phi$ แต่ไม่มีระนาบที่ทั้งเส้น p และ q เป็นเซตย่อยในกรณีนี้ เราพูดว่า p และ q เป็นเส้นไขว้ต่าง ๆ ระนาบ (skew line)



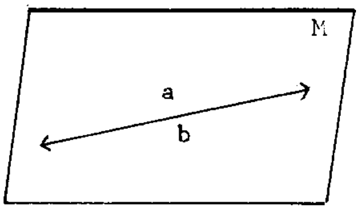
รูป 2

ในรูปที่ 3 ทั้งเส้น r และ s เป็นเซตย่อยของระนาบ M ผลตัดของเส้น r และ s เป็นจุด P เพียงจุดเดียว ในกรณีนี้เส้น r และ s เป็นเซตของจุดที่ต่างกันสองเซต ซึ่งแต่ละเซตไม่ได้เป็นเซตย่อยของกันและกัน
นั่นคือ $r \not\subset s$ และ $s \not\subset r$ เราพูดว่าทั้ง r และ s เป็นเส้นที่ต่างกัน (distinct lines)



รูป 3

ในกรณีที่ 4 ทั้งเส้น a และ b เป็นเซตย่อยของระนาบ M เส้น a และ b ไม่ต่างกัน เป็นเซตของจุดอันเดียวกัน (The same identical set of points)
นั่นคือ a = b และ b = a ดังนั้น Intersection ของเส้น a และ b เป็นเซตอนันต์



รูป 4

รูปที่ 6.24

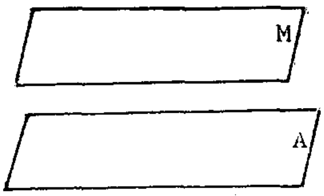
จะสังเกตเห็นได้ว่า ในรูปที่ 1 และ 2 นั้น เส้นตรงสองเส้นที่ต่างกันจะไม่ตัดกัน ดังนั้นผลตัดของเส้นตรงทั้งสองจึงเป็นเซตว่าง ส่วนในรูปที่ 3 นั้น เส้นตรงสองเส้นที่ต่างกันจะตัดกัน ดังนั้นผลตัดของเส้นตรงทั้งสองจึงไม่เป็นเซตว่าง จะเห็นได้ว่า เส้นตรงคู่ทั้งหลายจะตัดกันหรือไม่ตัดกันนั้น แต่ละกรณี เราสามารถอธิบายได้ในลักษณ์ที่ผลตัดของเส้นตรงคู่นั้น เป็นเซตว่าง หรือ ไม่เป็นเซตว่าง

เราจะพิจารณาผลตัดของระนาบ 2 ระนาบ ผลตัดของมันอาจจะอยู่ในลักษณะต่อไปนี้

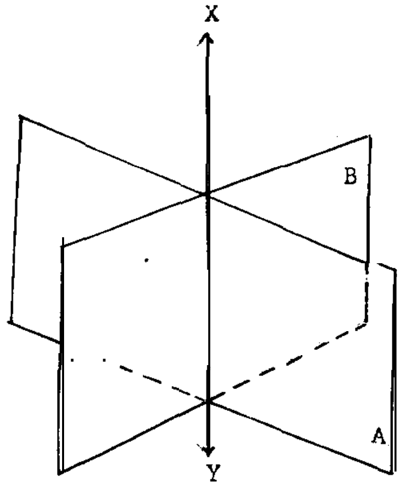
ก. เป็นเซตว่าง ข. เป็นเซตอนันต์

ผลตัดของระนาบ 2 ระนาบ จะไม่เป็นเซตที่มีสมาชิกตัวเดียว ดังเช่นผลตัดของเส้น 2 เส้น

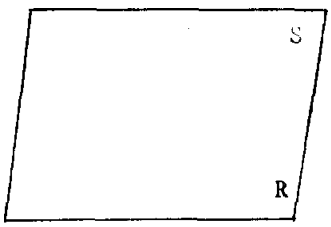
ในรูปที่ 5,6 และ 7 แสดงถึง ผลตัดของระนาบ 2 ระนาบ



รูป 5



รูป 6



รูป 7

รูปที่ 6.25

ในรูปที่ 5 ระนาบ M และ A จะต่างกัน แต่ละอันจะเป็นเซตย่อยของปริภูมิ M A = φ เรากล่าวว่าเป็นระนาบที่ขนานกัน ในกรณีนี้ ผลตัดของระนาบ M และ A เป็นเซตว่าง

ในรูปที่ 6 แสดงผลตัดของระนาบ A และ B ที่ต่างกัน ผลตัดของระนาบ A และ B เป็นเซตของจุดที่อยู่บนเส้น XY

ในรูปที่ 7 แสดงผลตัดของระนาบ 2 ระนาบที่เหมือนกัน ผลตัดของระนาบ R และ S ก็เป็นระนาบของ R หรือระนาบ S นั่นเอง

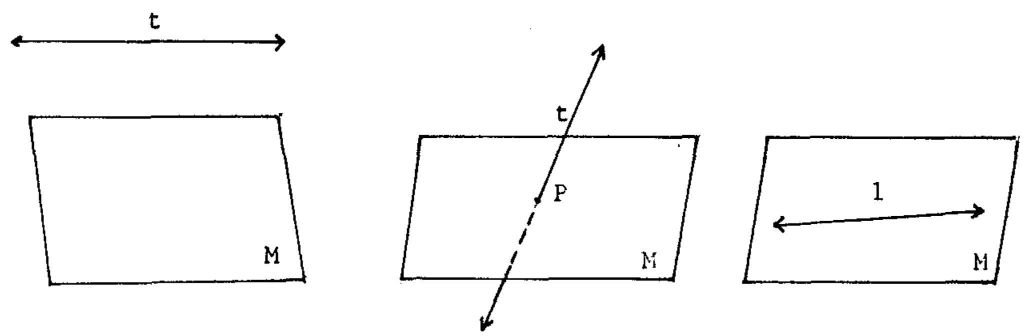
ถ้าเราพิจารณาผลตัดของเส้นตรงกับระนาบ เราจะเห็นว่า ผลตัดของเส้นตรงกับระนาบมีลักษณะดังนี้

ก. เป็นเซตว่าง

ข. เป็นเซตที่มีสมาชิกตัวเดียว

ค. เป็นเซตอนันต์

เราจะพิจารณารูปที่ 8,9 และ 10 ต่อไปนี้



รูป 8 รูป 9 รูป 10

รูปที่ 6.26

ในรูปที่ 8 ผลตัดของเส้นตรง t และระนาบ M เป็นเซตว่าง เมื่อ $t \quad M = \phi$ เราพูดว่า เส้นตรง t ขนานกับระนาบ M

ในรูปที่ 9 ผลตัดของเส้นตรง t และระนาบ M เป็นเซตที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว คือจุด P

ในรูปที่ 10 เส้นตรง l เป็นสับเซตของระนาบ M ดังนั้น ผลตัดของเส้นตรง l กับระนาบ m เป็นเซตอนันต์

กิจกรรมการเรียนที่ 6.3

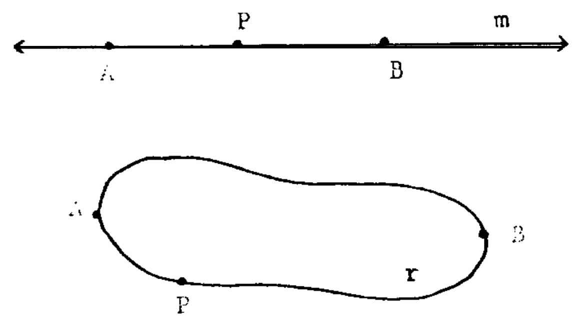
1. จงอธิบายถึงผลตัดของ
   1.1 เส้นตรงสองเส้นที่ต่างกัน
   1.2 ระนาบสองระนาบ ที่ต่างกัน
   1.3 เส้นตรงเส้นหนึ่งและระนาบระนาบหนึ่ง

6.4 การอยู่ระหว่าง การแยกและผลผนวกของเซตของจุด

(Betweeness and Separation; Union of Sets of Points)

ถ้าเราพิจารณาเส้นตรง m โดยที่กำหนดให้จุด A,B และ P เป็นจุดใด ๆ ที่ต่างกันสามจุดบนเส้นตรง m เราจะเห็นได้ว่าจะมีจุดใดจุดหนึ่งอยู่ระหว่างจุดสองจุดที่เหลือนั้นเสมอ จากรูป เราจะเห็นว่า จุด P อยู่ระหว่างจุด A กับจุด B

ถ้าเราลากเส้นจากจุด ๆ หนึ่ง สมมติว่าจุด A ผ่านจุด P จุด B แล้ว มาพบกันที่จุด A จุดเดิม เราก็จะเห็นได้ว่า จะมีจุด ๆ หนึ่งอยู่ระหว่างจุดสองจุดที่เหลือนั้นเสมอ ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 6.27

จากรูป จะเห็นได้ว่าจุด P เป็นจุดอยู่ระหว่างจุด A กับจุด B

หรือ จุด A เป็นจุดอยู่ระหว่างจุด P กับจุด B

หรือ จุด B เป็นจุดอยู่ระหว่างจุด A กับจุด P

ดังนั้น แสดงว่า คำว่า "ระหว่างของจุด" จะต้องมีอยู่บนเส้นตรงเสมอ

ตัวอย่างที่ 1 เราจะพิจารณาเส้นตรงตามรูปข้างล่างนี้

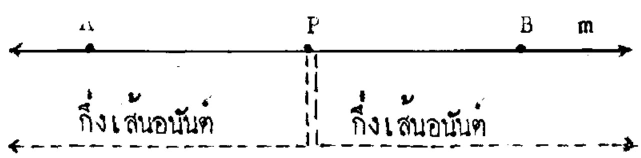
รูปที่ 6.28

เราจะเห็นว่า จุด B อยู่ "ระหว่าง" จุด X กับจุด B แต่จุด A และจุด X ไม่อยู่ระหว่างจุด X กับจุด R

เราจะพิจารณาเส้นตรง m ที่มีจุด P อยู่ระหว่างจุด A กับจุด B โดยที่จุด P, จุด A และจุด B อยู่บนเส้นตรง m

รูปที่ 6.29

จะเห็นได้ว่า จุด P จะแบ่งเส้นตรง m ออกเป็นกึ่งเส้นอนันต์สองส่วน (two half-lines) ส่วนแรกจะประกอบไปด้วย จุด A และอีกส่วนหนึ่งประกอบไปด้วยจุด B เราอาจกล่าวได้ว่าส่วนของเส้นตรงที่ถูกแบ่งนั้น จะเป็นเซตของจุดสองเซต คือเซตของจุดบนข้างจุด A และ เซตของจุดบนข้างจุด B

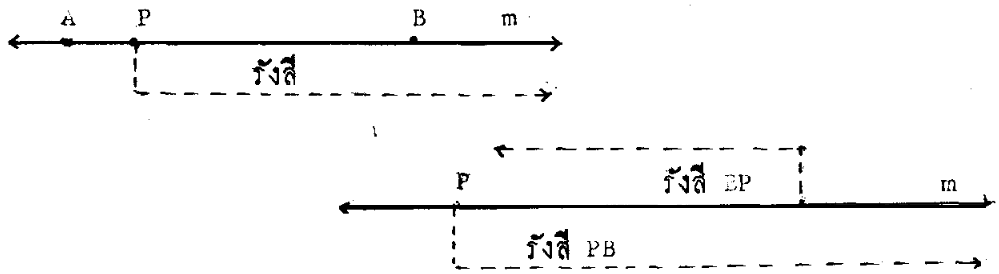


รูปที่ 6.30

จุดใด ๆ บนเส้นจะแบ่งเส้นตรงออกเป็นกึ่งเส้นอนันต์ ดังนั้น ถ้ามีจุด P อยู่บนเส้น จะได้ว่าด้านหนึ่งของ P เรียกว่า กึ่งเส้นอนันต์หนึ่ง อีกด้านหนึ่งของ P ก็เรียกว่าอีกกึ่งเส้นอนันต์หนึ่ง เนื่องจากเส้นนั้นสามารถต่อออกไปได้ไม่มีที่สิ้นสุด ดังนั้น แต่ละจุดจึงแบ่งเส้นออกเป็นสองกึ่งเส้นอนันต์ โปรดจำไว้เสมอว่า กึ่งเส้นอนันต์นี้ไม่รวมจุดแบ่งด้วย ถ้าเอาจุดแบ่งรวมกับกึ่งเส้นอนันต์ก็จะกลายเป็นรังสีไป ดังนั้นผลผนวกของจุดที่แบ่งกับกึ่งเส้นอนันต์ก็จะเป็นรังสี เราเรียกจุดแบ่งนี้ว่า จุดปลาย (end-point)

แม้ว่าจุดแบ่งบนเส้นจะไม่รวมอยู่ในกึ่งเส้นอนันต์ แต่เราสามารถกล่าวได้ว่าจุดแบ่งนั้นเป็นตัวจำกัดของขอบเขตของกึ่งเส้นอนันต์ ดังนั้น ผลตัดของกึ่งเส้นอนันต์ทั้งสองส่วนจะเป็นเซตว่าง

ถ้าเรามีจุด A กับ B แล้ว รังสีจาก A ไปทาง B เราเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $\overrightarrow{AB}$ ก็คือ เซตของจุด A กับจุด B และเซตของจุดทุกจุดระหว่าง A กับจุด B รวมกับจุด X ทุก ๆ จุดซึ่งทำให้ B อยู่ระหว่าง A กับ X



รูปที่ 6.31

จากรูป $\overrightarrow{PB}$ กับ $\overrightarrow{BP}$ ต่างกันมาก โดยที่ $\overrightarrow{PB}$ ก็คือเซตของจุดเริ่มต้น P รวมกับจุดทุกจุดที่อยู่ทางขวาของ P ส่วน $\overrightarrow{BP}$ นั้นคือ เซตของจุดเริ่มต้น B รวมกับจุดทุกจุดที่อยู่ทางซ้ายของ B ผลผนวกของ $\overrightarrow{PB}$ กับ $\overrightarrow{BP}$ ก็คือ $\overrightarrow{PB}$ ส่วนผลตัดของมันก็คือ $\overrightarrow{PB}$

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาจากรูป 6.32

รูปที่ 6.32

ก. รังสีอาจจะเป็น $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{ST}$

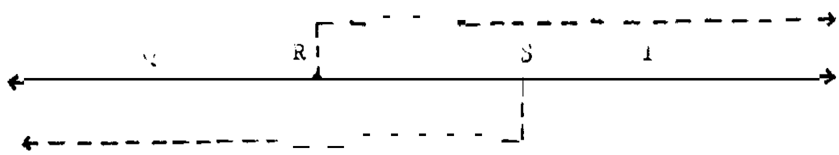
ข. $\overrightarrow{RQ}$ ไม่เหมือนกับ $\overrightarrow{QR}$

ค. $\overrightarrow{RT}$ เป็นเซตของจุดเดียวกันกับ $\overrightarrow{RS}$

ง. $\overrightarrow{SQ} \cap \overrightarrow{RT}$: จุดร่วมของรังสีทั้งสองเป็นเซตของจุด S และจุด R และจุดทุกจุดที่อยู่ระหว่าง S และ R

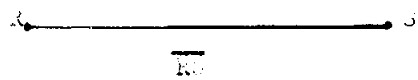
จ. $\overrightarrow{SR} \cup \overrightarrow{ST}$: ประกอบด้วยจุดซึ่งอยู่ใน $\overrightarrow{SR}$ หรือ $\overrightarrow{ST}$ หรือทั้ง $\overrightarrow{SR}$ และ $\overrightarrow{ST}$ ก็คือ เส้นตรง l นั่นเอง

จากข้อ ง. จะมีชื่อเฉพาะของ $\overrightarrow{SQ} \cap \overrightarrow{RT}$ นั่นคือจุด R และจุด S และจุดทุกจุดที่อยู่ระหว่างจุด R และจุด S เรียกว่าส่วนของเส้นตรง (line segment) ดังรูป 6.33

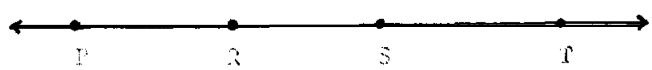


รูปที่ 6.33

ดังนั้น ส่วนของเส้นตรงหรือเซกเมนต์เฉย ๆ ก็คือส่วนของเส้นซึ่งหมายถึงจุดบนเส้น รวมทั้งจุดทั้งหลายที่อยู่ระหว่างจุดทั้งสองนั้น เราใช้จุดสองจุดและมีเส้นขีดข้างบนเป็นสัญลักษณ์ รูปข้างล่างนี้คือ เซกเมนต์ RS เขียนว่า $\overline{RS}$ คือ เซตของจุด R และ S รวมทั้งจุดทั้งหลายที่อยู่ระหว่างจุด R กับ S ด้วย



ตัวอย่างที่ 3 จากรูปที่ 6.34



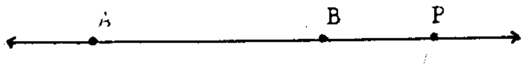
รูปที่ 6.34

เราจะได้ว่า $\overline{PR} \cup \overline{RS} = \overline{PS}$

$\overline{PR} \cap \overline{RS}$ คือจุด R หรือ $\overline{PR} \cap \overline{RS} = R$

$\overline{PR} \cap \overline{ST} = \phi$

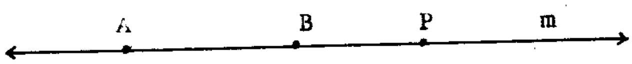
ตัวอย่างที่ 4 จากรูป 6.35



รูปที่ 6.35

จุด P ไม่ได้เป็นสมาชิกของเซตของจุดที่เป็นเซกเมนต์ AB เพราะจุด F ไม่ได้อยู่ใน $\overline{AB}$

ตัวอย่างที่ 5 จากรูป 6.36 เป็นเซตทั้งหลายของเซตของจุด ซึ่งแต่ละเซตเป็นเซตย่อยของเส้น



รูปที่ 6.36

ก. เราอาจใช้เขียนสัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนเส้น $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{PB}$

ข. เราจะได้ว่า $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AP}$, $\overline{BP} \subset \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AP} \subset \overrightarrow{AB}$, $\overline{BP} \subset \overleftrightarrow{BP}$ จะเห็นได้

ว่า $\overline{BA} \subset \overline{BP}$ เป็นสิ่งเดียวกันกับเซตของจุดที่ทำให้ $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AP}$ จะสังเกตเห็นได้ว่า $\overline{BA}$ และ $\overline{AB}$ เป็นชื่อของเซตเดียวกัน ในขณะที่ $\overleftrightarrow{AP}$ ก็เป็นชื่อของเซตเดียวกันกับ $\overleftrightarrow{BP}$

เรื่องของระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนเส้น พอจะอธิบายได้ดังนี้ ถ้ามีจุด P และ Q แล้วจะทำให้มีจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ $m(\overline{PQ})$ ซึ่งมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $m(\overline{PQ}) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $P = Q$
2. $m(\overline{PQ}) = m(\overline{QP})$

จากคำอธิบายข้างต้น ทำให้เราทราบว่า $\overline{PQ}$ คือระยะทางจากจุด P ถึง Q และระยะทางจากจุด P ถึงจุด Q นี้จะเท่ากับระยะทางจากจุด Q ถึงจุด P

จากแนวคิดเรื่องระยะทาง ทำให้ทราบว่า ถ้า $C \in \overleftrightarrow{AB}$, $D \in \overleftrightarrow{AB}$ และ $\overline{CD} > 0$ แล้วจะทำให้ $\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{AB}$

ถ้ามีจุด A กับ C เพื่อที่จะทำให้ทราบได้ว่า B อยู่ระหว่าง A กับ C นั้นเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า (ABC) นั่นคือ

จุด B อยู่ระหว่างจุด A กับจุด C หรือ (ABC) ก็ต่อเมื่อ

1. A, B, C เป็นจุดที่ไม่ซ้ำกันและอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
2. $m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) = m(\overline{AC})$

จากนี้จะทำให้เราทราบว่า ถ้ามี (ABC) แล้วจะทำให้มี (CBA) หรือ

$$(ABC) \longrightarrow (CBA)$$

แต่ถ้ามี (ABC) แล้วจะไม่ทำให้เกิด (BAC) หรือ (ACB) เราสามารถแสดงว่าถ้ามี (ABC) แล้วจะไม่ทำให้มี (BAC) ได้ดังนี้

$$(ABC) \longrightarrow m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) = m(\overline{AC})$$

$$(BAC) \longrightarrow m(\overline{BA}) + m(\overline{AC}) = m(\overline{BC})$$

แต่ $m(\overline{AB}) = m(\overline{BA})$ จึงทำให้

$$2m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) + m(\overline{AC}) = m(\overline{AC}) + m(\overline{BC})$$

$$2m(\overline{AB}) = 0$$

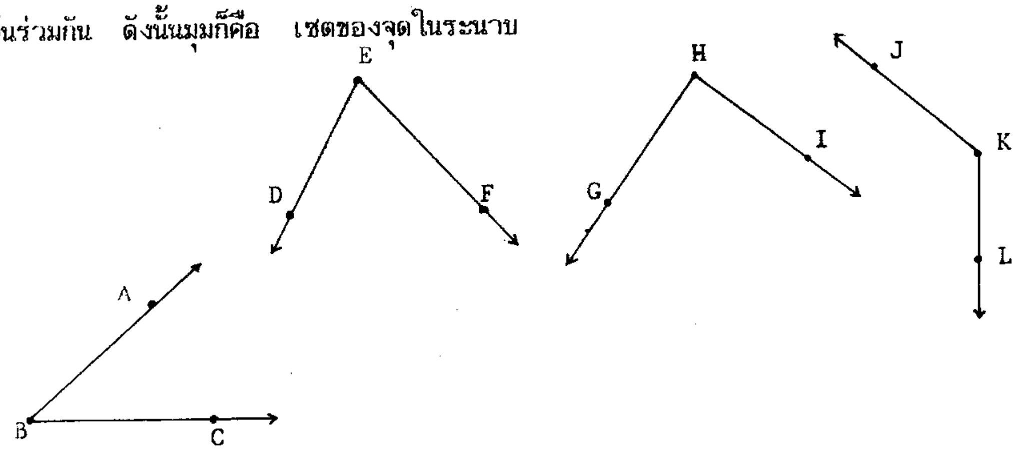
$$m(\overline{AB}) = 0 \longrightarrow A = B$$

เมื่อ $A = B$ แสดงว่าจุด A กับ B เป็นจุดเดียวกัน ทำให้ A อยู่ระหว่าง B กับ C หรือ (BAC) ไม่ได้

ถ้ามีจุด M อยู่บนเซกเมนต์ AB โดยทำให้ (AMB) และ $m(\overline{AM}) = m(\overline{MB})$ เราเรียกว่า M คือจุดกึ่งกลาง (mid-point) ของ $\overline{AB}$

เซตของจุดบนระนาบ

จากแนวความคิดที่ผ่านมาทำให้เราทราบได้ว่า มุมเกิดจากรังสีสองรังสีที่มีจุดเริ่มต้นร่วมกัน ดังนั้นมุมก็คือ เซตของจุดในระนาบ

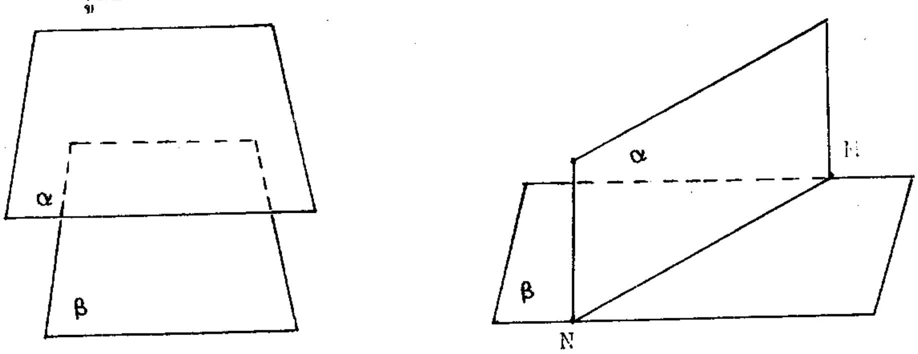


รูปที่ 6.37

จากรูปจะเห็นได้ว่า $A\hat{B}C = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ แต่ถ้า $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{BC}$ แล้วจะได้จุด B เราได้พิจารณามาแล้วว่า จุดอยู่บนเส้นจะแบ่งเส้นออกเป็นกึ่งเส้นอนันต์สองเส้น ทำนองเดียวกันถ้ามีเส้นอยู่บนระนาบแล้ว เส้นจะแบ่งระนาบออกเป็นกึ่งระนาบสองส่วน (two-half-plane) และระนาบที่อยู่ในปริภูมิจะแบ่งปริภูมิออกเป็นกึ่งปริภูมิสองส่วน (two-half-spane)

แนวคิดเกี่ยวกับเซตมีประโยชน์มากในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง จุด เส้น และระนาบ ตัวอย่างเช่น ถ้าระนาบสองระนาบในปริภูมิมีผลตัดเป็นเซตว่างแล้วระนาบทั้งสองจะขนานกัน ถ้าผลตัดของระนาบทั้งสองไม่ใช่เซตว่างแล้ว ระนาบทั้งสองจะตัดกันเป็นเส้นตรง

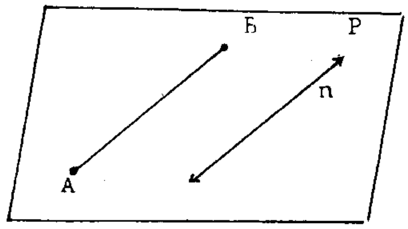
รูปข้างล่างนี้กำหนดให้อักษรกรีก คือ α และ β แทนระนาบสองระนาบ



$\alpha \cap \beta = \phi$

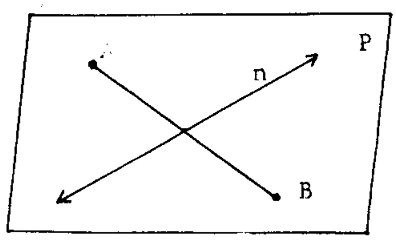
รูปที่ 6.38

เราจะพิจารณาระนาบ P และเส้น n ซึ่งเป็นเซตย่อยของระนาบ P และจุดสองจุด A และ B ที่ต่างกันซึ่งอยู่บนระนาบ P แต่ไม่อยู่บนเส้น n ถ้า $\overline{AB} \cap n = \phi$ แล้วจุด A และจุด B จะอยู่ข้างเดียวกันของเส้น n (เมื่อเทียบกับเส้น n) ดังรูป 6.39



รูปที่ 6.39

แต่ถ้า $\overline{AB} \cap n \neq \phi$ แล้วจุด A และ B จะอยู่คนละข้างของเส้น n ดังรูป 6.40

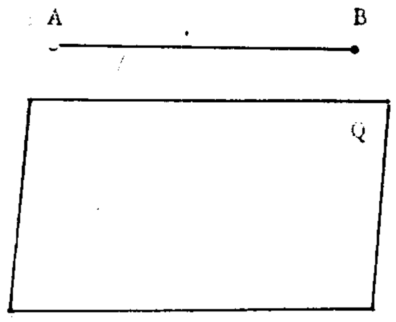


รูปที่ 6.40

เราสามารถหาข้างของจุด A และข้างของจุด B ของเส้น n ได้ เซตของจุดบนข้างจุด A ของเส้น n เรียกว่า กึ่งระนาบหนึ่ง และเซตของจุดบนข้างจุด B ของเส้น n ก็เป็นกึ่งกลางระนาบอีกอันหนึ่ง เส้น n ไม่ได้เป็นส่วนของกึ่งระนาบใดเลย มันจะแยกระนาบออกเป็น 2 กึ่งระนาบและจะเป็นตัวจำกัดขอบเขตของแต่ละกึ่งระนาบด้วย ผลผนวกของเส้น n และกึ่งระนาบสองส่วนนั้นก็คือ ระนาบ P นั่นเอง

ต่อไปนี้เราจะพิจารณาระนาบ Q และให้ A และ B เป็นจุดสองจุดที่ต่างกันที่ไม่ได้อยู่ในระนาบ Q

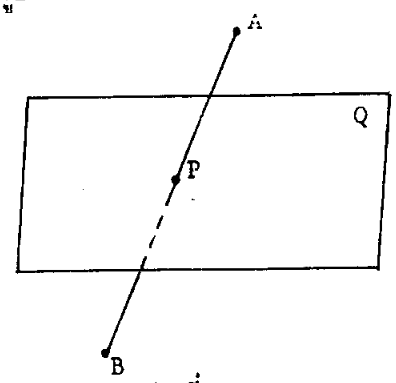
ถ้าผลตัดของ $\overline{AB}$ กับระนาบ Q เป็นเซตว่าง จุด A และจุด B จะอยู่บนข้างเดียวกันของระนาบ P ดังรูป



$\overline{AB} \cap Q = \phi$

รูปที่ 6.41

ถ้าผลตัดของ $\overline{AB}$ และระนาบ Q ไม่เป็นเซตว่างแล้วจุด A และจุด B จะอยู่คนละข้างของระนาบ Q ดังรูป



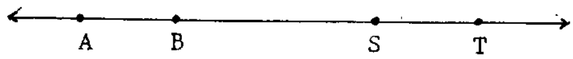
$\overline{AB} \cap Q = P$

รูปที่ 6.42

เซตของจุดบนข้าง A ของระนาบ Q เป็นกึ่งปริภูมิ และเซตของจุดที่อยู่บนข้าง B ของระนาบ Q ก็เป็นกึ่งปริภูมิ อีกนัยหนึ่ง ระนาบ Q จะไม่เป็นส่วนประกอบของ (ไม่บรรจุอยู่ใน) กึ่งปริภูมิใดเลย ระนาบ Q จะแยกปริภูมิออกเป็นกึ่งปริภูมิสองส่วนและมันก็จะเป็นตัวจำกัดขอบเขตของแต่ละกึ่งปริภูมิ ผลผนวกของระนาบและกึ่งปริภูมิทั้งสองเป็นเซตของจุดซึ่งเราเรียกว่า ปริภูมิ นั่นเอง

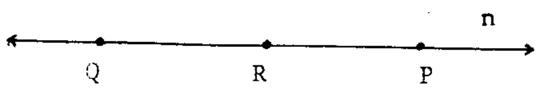
กิจกรรมการเรียนที่ 6.4

จงพิจารณารูปที่กำหนดให้ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

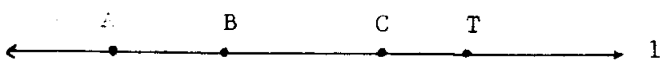


1. กำหนดชื่อของรังสีต่อไปนี้ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{ST}$ จงเขียนชื่อรังสีอื่น ๆ อีก
2. $\overrightarrow{AB}$ เหมือนกับ $\overrightarrow{BA}$ หรือไม่
3. รังสี AB ประกอบด้วยจุดใดบ้าง จงเขียนรูปแสดงเซตของรังสี AB
4. รังสี BA ประกอบด้วยจุดใดบ้าง จงเขียนรูปแสดงเซตของรังสี BA
5. $\overrightarrow{SA} \cap \overrightarrow{BT}$ คืออะไร

จากรูปที่กำหนดให้



6. จงพิจารณาว่า จุด P เป็นสมาชิกของ $\overline{QR}$ หรือไม่
7. จงใช้จุด Q,R และ P บอกชื่อเซกเมนต์ซึ่งเป็นเซตย่อยของเส้นตรง n
8. กำหนดเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งมีจุด A,B และ P อยู่บนเส้นตรงนี้โดยที่ P อยู่ระหว่าง A และ B จงตอบคำถามต่อไปนี้
   8.1 $\overline{AP} \cap \overline{AB}$ =
   8.2 $\overrightarrow{PB} \cap \overline{PA}$ =
   8.3 $\overline{PB} \cup \overline{AB}$ =
   8.4 $\overline{PB} \cup \overrightarrow{AP}$ =
   8.5 $\overrightarrow{PA} \cap \overrightarrow{AB}$ =
9. กำหนดเส้นตรง l และจุด 4 จุด A,B,C และ D ดังรูป



จงหารังสีสองรังสีซึ่ง

9.1 ผลผนวกเป็นเส้นตรง l

9.2 ผลตัดคือ $\overline{BC}$

9.3 ผลตัดคือจุด B

9.4 ผลตัดเป็นเซตว่าง

9.5 ผลผนวกรวมเอาจุด A,B,C และ D แต่ไม่รวมเส้นตรง l

10. จงหาเซกเมนต์สองเซกเมนต์ในเส้นตรง m ซึ่งสอดคล้องกับข้อต่อไปนี้

10.1 ผลตัดเป็นจุด

10.2 ผลตัดเป็นเซกเมนต์

10.3 ผลผนวกเป็นเซกเมนต์

10.4 ผลตัดเป็นเซตว่าง

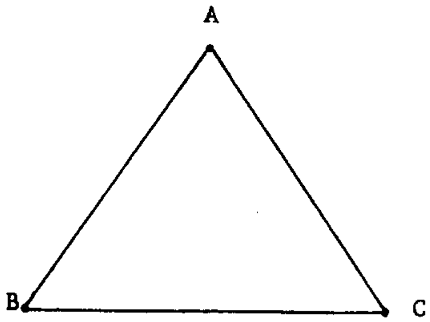
6.5 เส้นโค้งปิดเชิงเดียว (Simple closed curve)

เราได้ศึกษาเซตของจุดที่เป็นเซตย่อยของ ปริภูมิมาแล้ว คือ เส้น, เซกเมนต์, รังสี และ ระนาบ มีสิ่งอื่น ๆ อีกมากมายที่น่าสนใจเกี่ยวกับเซตของจุดที่เราจะศึกษาต่อไป เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และวงกลม

รูปสามเหลี่ยมเกิดจากผลผนวกของเซกเมนต์ทั้งสามนี้ เชื่อมจุดสามจุดที่ไม่ได้อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน จุดทั้งสองเรียกว่า มุมยอด (Vertex) และ เซกเมนต์ทั้งสามนั้นเรียกว่า ด้าน

จากรูป 6.43 จะเห็นว่า

$$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA} = \triangle ABC$$



รูปที่ 6.43

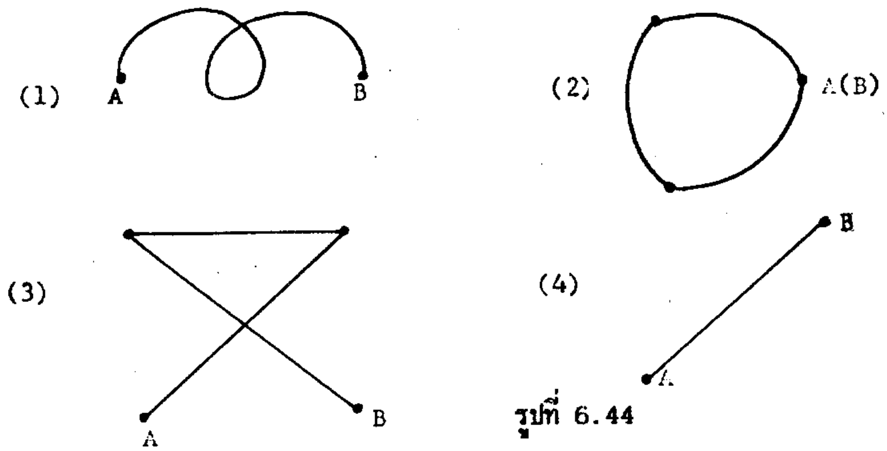
จากรูปนี้จะเห็นว่า

1. $\triangle ABC \cap \overrightarrow{BC} = \overline{BC}$
2. $< ABC \cap \overline{AC} =$ จุด A และ C
3. $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CB} = B$

ต่อไปนี้เราจะศึกษาเฉพาะเส้นโค้งที่เรียกว่า **เส้นโค้งเชิงเดียว** (simple curve) ที่อยู่บนระนาบ ซึ่งเป็นเซตของจุดที่มีจุดปลาย 2 จุด

ถ้าเราเขียนเส้นโค้ง โดยเริ่มจากจุดปลายข้างหนึ่งไปยังอีกจุดปลายข้างหนึ่งโดยไม่ให้เส้นโค้งที่เราเขียนนั้นตัดตัวมันเอง เราเรียก เส้นโค้ง นั้นว่า เส้นโค้งเชิงเดียว

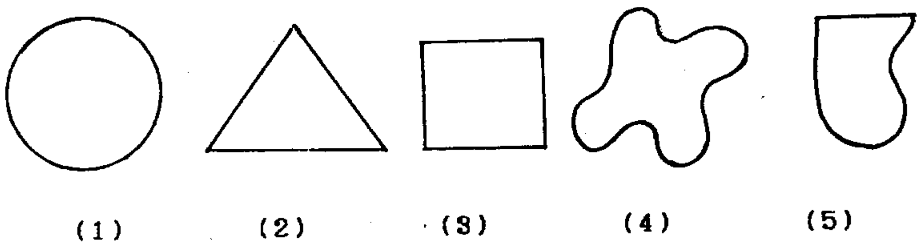
เราจะพิจารณาเส้นโค้งต่อไปนี้



รูปที่ 6.44

จากรูปจะเห็นว่าจุดปลายของแต่ละเส้นเป็นจุดที่ต่างกัน นอกจากรูปที่ (2) ในที่นี้ จุดปลายทั้งสองของรูปที่ 2 เป็นจุดเดียวกัน (Identical) นั่นคือ เส้นโค้งจะเริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดเดียวกัน เส้นโค้งที่จุดปลายไม่ต่างกัน เรียกกล่าวว่าเส้นโค้งนั้นเป็นเส้นโค้งที่ปิด เราเรียกว่าเส้นโค้งปิด เส้นโค้งในรูปที่ 2 เป็นเส้นโค้งที่ไม่ตัดกับตัวมันเอง ดังนั้นจึงเป็นเส้นโค้งเชิงเดียวด้วย ดังนั้นเส้นโค้งเชิงเดียวที่จุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกันเราเรียกว่า เส้นโค้งปิดเชิงเดียว (simple closed curve)

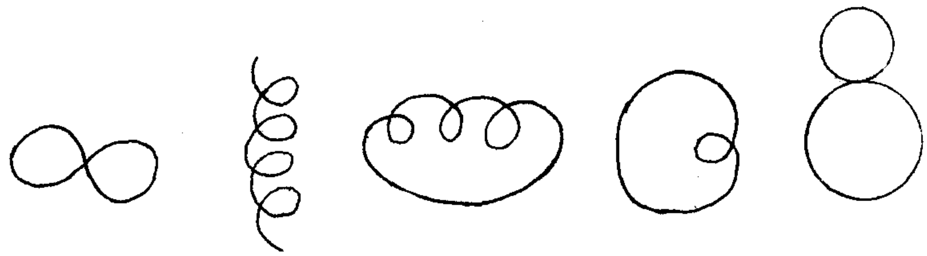
ตัวอย่างของเส้นโค้งปิดเชิงเดียว



รูปที่ 6.45

เป็นไปได้หรือไม่ที่จะมีเส้นโค้งเชิงเดียวแต่ไม่ปิด หรือปิดแต่ไม่เป็นเส้นโค้งเชิงเดียว หรือทั้งไม่ปิดและไม่เป็นเส้นโค้งเชิงเดียว

จะพิจารณารูปต่อไปนี้



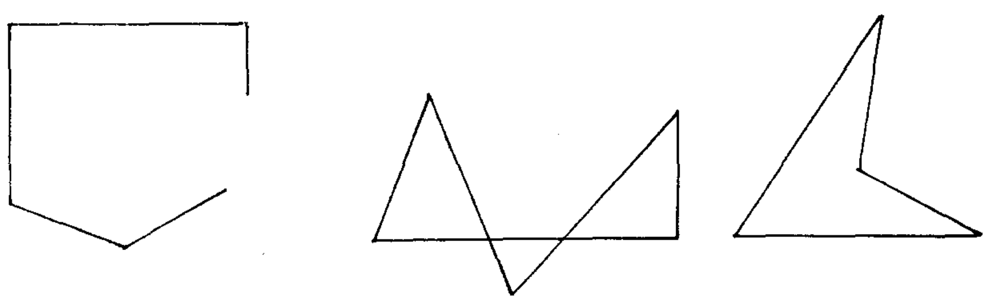
(1) (2) (3) (4) (5)

รูปที่ 6.46

มีข้อสังเกตที่สำคัญอันหนึ่งว่าทุก ๆ เส้นโค้งปิดเชิงเดียว ในระนาบ จะแบ่งระนาบเป็นเซตของจุดที่เรียกว่าข้างใน (interior) และเซตของจุดที่เรียกว่าข้างนอก (exterior) ผลผนวกของเส้นโค้งปิดเชิงเดียว คือ ผลผนวกของข้างในและข้างนอกเซตของสองเซตนี้จะเป็นเซตของจุดที่เป็นระนาบนั่นเอง

เส้นโค้งปิดเชิงเดียวไม่เป็นส่วนของทั้งข้างนอกหรือข้างใน มันเป็นตัวจำกัดขอบเขตของแต่ละเซต ผลผนวกของข้างในและเส้นโค้งปิดเชิงเดียวจะเรียกว่า บริเวณของเส้นโค้งตัวจำกัดขอบเขตของบริเวณรวมอยู่ในบริเวณด้วย

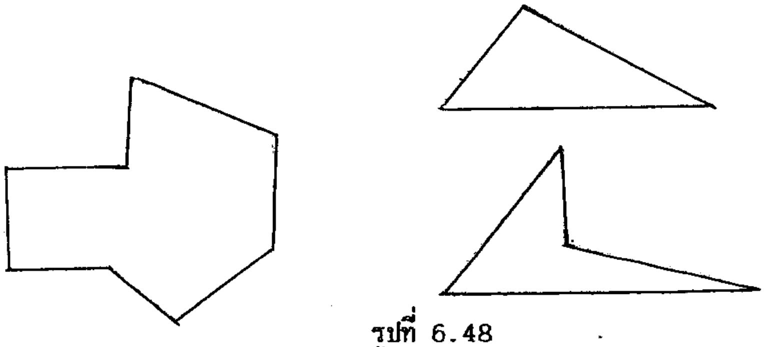
รูปหลายเหลี่ยม (Polygon) คือรูปเส้นขาด (broken line) ที่เชิงเดียวและปิด คำว่าเส้นขาดก็คือส่วนของเส้นตรงที่หักแต่ติดต่อกันไปเรื่อย ๆ เส้นขาดที่เป็นเชิงเดียวก็คือเส้นขาดที่ไม่ตัดตัวเอง เส้นขาดที่ปิดนั้นเมื่อเราเริ่มต้นที่จุด ๆ หนึ่งลากต่อไปเรื่อย ๆ โดยไม่ยกปากกาแล้วจะกลับมาสู่ที่เดิม (จุดเดิม) แนวคิดเกี่ยวกับรูปที่เชิงเดียวและปิดนี้เป็นแนวคิดที่นำไปสู่เรื่องราวของโทโพโลยี รูป 6.47 นี้แสดงเส้นขาดที่มีลักษณะต่าง ๆ กัน



เส้นโค้งเชิงเดียวแต่ไม่ปิด เส้นโค้งปิดแต่ไม่เชิงเดียว เส้นโค้งปิดและเชิงเดียว

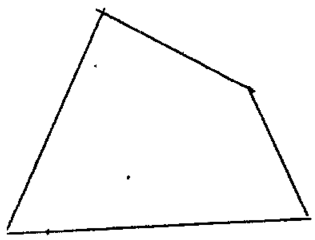
รูปที่ 6.47

รูปต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของรูปหลายเหลี่ยม

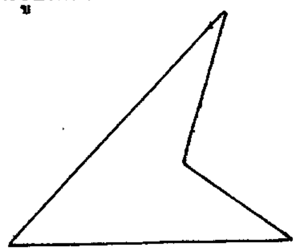


รูปที่ 6.48

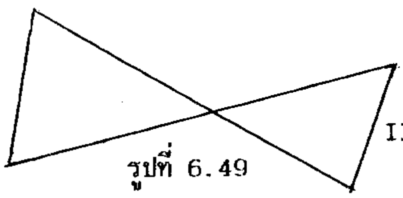
รูปสี่ด้าน (Quadrilateral) คือ ผลผนวกของเซกเมนต์ทั้งสี่ที่เชื่อมจุด 4 จุด ที่ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน โดยปกติแล้ว เราถือว่ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ นั้นจะต้องมีพื้นที่ภายในบริเวณเดียว จากรูปต่อไปนี้ รูป I และ II เป็นรูปสี่ด้าน แต่ III ไม่ใช่



I



II



III

รูปที่ 6.49

กิจกรรมการเรียนที่ 6.5

จงเขียนรูปแสดง

1 เส้นโค้งเชิงเดียวแต่ไม่เป็นเส้นโค้งปิด

2 เส้นโค้งปิดเชิงเดียว

3 เส้นโค้งปิดแต่ไม่เป็นเส้นโค้งเชิงเดียว

4 เส้นโค้งที่ไม่เป็นเส้นโค้งเชิงเดียวและไม่เป็นเส้นโค้งปิด

บัญชีศัพท์

ก

การตกกระทบ	incidence
การเปลี่ยนขนาด	dilation
การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟ	perspective transformation
การแปลงแบบโพรเจกทีฟ	projective transformation
การแปลงเอกลักษณ์	identity transformation
การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง	proof by contradiction มีความหมายเหมือน indirect proof และ reductio ad absurdum proof
การเลื่อนทางขนาน	translation
การลงรอยกัน	congruence
การส่ง	mapping
การสมนัย	correspondence
การสมนัยแบบเพอร์สเปกทีฟ	perspective correspondence.
การสมนัยแบบโพรเจกทีฟ	projective correspondence
การสมมติ ข้อสมมติ	assumption
การสร้าง บทสร้าง	construction
การสังเคราะห์	synthesis
การให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์ / การให้เหตุผลแบบนิรนัย	deductive resoning
การให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักประสบการณ์ / การให้เหตุผลแบบอุปนัย	inductive resoning
กึ่งปริภูมิ	half - space
กึ่งระนาบ	half - plane
แกน	axis

แกนของภาวะเพอร์สเปกทีฟ	axis of perspectivity
เกี่ยวกับสัจพจน์	axiomatic

ข

ขนาน	paral lcl
เขียนบรรจุภายใน	inscribe
เขียนล้อม	circumscribe
ข้อความ ถ้อยแถลง	statement
ขั้ว	pole

ค

ความขัดแย้งกัน ความเท็จโดยรูปแบบ	contradiction

จ

จุด	point
จุดข้างนอก	exterior point
จุดข้างใน	interior point.
จุดในแนวทแยงมุม	diagonal points
จุดปลาย	end - point
จุดผกผัน	inverse point
จุดยืนยง	invariant point; ideal point
จุดยอด	vertex
จุดร่วมเส้นตรงเดียวกัน	collinear
จุดสามัญ	ordinary point

ด

ด้านตรงข้ามมุมฉาก	hypotenuse
ด้านฐาน	base
ด้านบนของรูปสี่เหลี่ยมแซคเคอรี่	summit
ด้านเท่า	equilateral
ด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยม	leg of a right-angle triangle

ต

ตัด, ตัดกัน	intersect
ตามขวาง	transverse
ตัวยืนยงแบบโพรเจกทีฟ	projective invariant.

ท

ทรงกลม	sphere
ทรงแปดหน้า	octahedron
ทรงยี่สิบหน้า	icosahedron
ทรงสามมิติ	sol id
ทรงสิบสองหน้า	dodecahedron
ทรงสี่หน้า	tetrahedron
ทรงหกหน้า	hexahedron
ทรงหลายหน้า	polyhedron

บ

บทกลับ	converse
บทสร้าง, การสร้าง	construction

บริบูรณ์	complete
บริเวณ	region
แบ่งครึ่ง	bisect

ป

ประพจน์	proposition
ปริภูมิ	space
ปริภูมิแบบยุคลิด	Euclidean space
ปริภูมิสามมิติ	3 space
ปริมาตร	volume
ปัญหา	problem
ปิด	closed
เป็นได้อย่างเดียว	unique
แปลง	transform

ท

ทฤษฎี	theory
ทฤษฎีบท	theorem
ทฤษฎีบทการมีอยู่	existence theorem
ทวิภาวะ	duality
ทวิภาวะในระนาบ	planar duality
ทวิภาวะในปริภูมิ	space duality
ทศนิยม	decimal
ทับกันสนิท	coincide
โทโพโลยี	topology

น

นิยาม	define
นิรนัย, สรุปจากหลักเกณฑ์	decuce
เนื้อหา สิ่งที่บรรจุ	content
แนวคิด	concept
แนวตั้ง, แนวยืน, แนวดิ่ง	vertical
แนวทแยงมุม, เส้นทแยงมุม	diagonal
แนวนอน, แนวราบ, แนวระดับ	horizontal

ผ

ผกผัน	inverse
ผนวก	unicm
ผลการคาดคะเน, ฉายา, โพรเจกชัน	projection
ผลการแปลง	transform
ผันกลับ	reverse

ฝ

ฝังใน	embed; imbed

พ

พาราโบลา	parabola
พิกัด	coordinate
เพอร์สเปกทีฟ	perspective
โพรเจกชัน, ฉายา, ผลการคาดคะเน	projection
โพล, ขั้ว	pole

ภ

ภาคตัด	section
ภาคตัดกรวย	conic section
ภาคตัดกรวยปกติ	regular conic; nondegenerate conic
ภาพ	image
ภาพฉาย	project
ภายนอก	external
ภายใน	internal
ภาวะ, เงื่อนไข	condition
ภาวะเพอร์สเปกทีฟ	perspectivity
ภาวะโพรเจกทีฟ	projectivity

ม

มาตราส่วน, มาตรา, สเกล	scale
มิติ	dimension
มีขอบเขต	bound.4
มุม	angle
มุมฉาก	right angle
มุมตรง	straight angle
มุมประกอบ	compound angle
มุมประกอบมุมฉาก	complementary angle
มุมประกอบสองมุมฉาก	supplementary angle
มุมป้าน	obtuse angle
มุมยอดของรูปสี่เหลี่ยมแซดเคอรี่	summit angles
มุมแย้ง	alternate angle
มุมระหว่างสองด้านที่กำหนดให้	included angle
มุมแหลม	acute angle

ร

ร่วมแกน	coaxal ; coaxial
ร่วมระนาบ	coplanar
ร่วมเส้นตรงเดียวกัน	collinear
ระนาบ	plane
ระนาบขนาน	parallel planer;
ระนาบตัด	plane section
ระบบจุดอิงสองจุด	pencil of points
ระบบเส้นตรงอิงสองเส้น	pencil of lines
ระบบระนาบอิงสองระนาบ	pencil of planes
ระยะห่างเท่ากัน	equidistant
รัศมี	radius
รูป, ตัวเลข	figure
รูปเขียนล้อม	circumscribed
รูปในปริภูมิ	space figure
รูปแบน	plane figure
รูปบรรจุข้างใน	inscribed
รูปสามเหลี่ยม	triangle
รูปสามเหลี่ยมคล้าย	similar triangles
รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า	scalene triangle
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	right triangle
รูปสี่ด้าน	quadrilateral
รูปสี่เหลี่ยม	quadrangle
รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส, กำลังสอง, ตาราง	square (n.)
รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	parallelogram
รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	rectangle
รูปเพอร์สเปกทีฟ	perspective figures
รูปหลายเหลี่ยม	polygon
รูป n เหลี่ยม	n-gon
เรขาคณิตจำกัด	finite geometry

ว

วงกลม	circle
วงกลม	circular
วิเคราะห์	analytic
วิเคราะห์	analyse
เวียนขวา, ตามเข็มนาฬิกา	clock-wise
เวียนซ้าย, ทวนเข็มนาฬิกา	counter-clockwise

ศ

ศตวรรษ	century
ศูนย์	zero
ศูนย์กลาง	centre
ศูนย์กลางของภาวะเพอร์สเปกทีฟ	center of perspectivity

ส

สมาชิก	element
ส่ง	map (v.)
สมนัย	correspond
ส่วนตัด	intercept
ส่วนตัดเดเดคินด์	Dedekind cut, Dedekind section
สัจพจน์	postulate มีความหมาย เหมือน axion
สัญลักษณ์	symbol
สัมผัส	tangent
สัมพรรค	affine
สามมิติ	solid
สามเหลี่ยม	triangular
เส้นกึ่งอนันต์	half-line

เส้นขนาน	parallel lines
เส้นขาด	broken line
เส้นไขว้ต่างระนาบ	skew lines
เส้นโค้งเชิงเดียว	simple curve
เส้นโค้งปิดเชิงเดียว	simple closed curve
เส้นจำกัด	line - segment
เส้นเฉียง	oblique
เส้นดิ่ง	vertical line
เส้นตรง	straight line; right line; line
เส้นตั้งฉาก	perpendicular
เส้นตัดขวาง	transversal
เส้นทะแยงมุม, แนวทแยงมุม	diagonal
เส้นแนวระดับ	horizontal line
เส้นในจินตนาการ	horizon line
เส้นผ่านศูนย์กลาง	diameter
เส้นมัธยฐาน	median
เส้นไม่ตัดกัน	nonintersecting lines
เส้นรอบรูป, ความยาวรอบรูป	perimeter
เส้นรอบวง	circumference
เส้นสัมผัส	trangent line
เส้นสัมผัส	trangent (n.)

ห

หน้าจั่ว	isosceles
หนึ่งต่อหนึ่ง 1-1	one - to - one
หลักการ, หลัก	principle
หลักการทวิภาวะ	principle of duality

อ

อนิยาม	undef i nes
อันดับ	order
อุดมคติ	ideal
อุปนัย, การสรุปจากประสบการณ์	induction

ฮ

ไฮเพอร์โบลา	hyperbola

บัญชีสัญลักษณ์

P_X	จุด P มีพิกัด x
AB	$\{P_x \mid a < x\}$ "เซตของจุด P_x ซึ่ง a น้อยกว่า x
AB	เส้นตรง AB
AB	รังสี AB
$\overline{AB}$	ส่วนของเส้นตรง AB
$m(\overline{AB})$	ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB
$A\hat{B}C$	มุม ABC ขนาดของมุม ABC
$mA\hat{B}C$	ขนาดของมุม ABC
//	ขนานกัน ขนานกับ
I	ตั้งฉากกับ
	คล้ายกัน
	ลงรอยกัน เท่ากันทุกประการ
$\overline{AB} = \overline{CD}$	ส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ มีความยาวเป็นค่าเดียวกัน
A	รูปสามเหลี่ยม
(ABC)	มีจุด 3 จุด A B C B อยู่ระหว่าง A และ C
$x \xrightarrow{T_1} x + a$	x ถูกส่งภายใต้ T_1 ไปยัง x + a
T_2T_1	การแปลง T_1 ตามด้วยการแปลง T_2
T^{-1}	ตัวผกผันของการแปลง
AB - C	ระนาบกำหนดโดยเส้น AB และจุด C
ABD - H, ABDH	ปริภูมิโพรเจกทีฟ 3 มิติ กำหนดโดยระนาบ ABD และจุด H
$\overset{=}{\wedge}$	รูปสองรูปเป็นเพอร์สเปกทีฟกัน
$F \underset{\wedge}{-} F'$	รูปสองรูป F และ F' เป็นโพรเจกทีฟกัน