บทที่ 5

เรขาคณิตโพรเจกทีฟ (Projective Geometry)

เค้าโครงเรื่อง

5.1 ประวัติและพัฒนาการของเรขาคณิตโพรเจกทีฟ

5.2 สัจพจน์สำหรับเรขาคณิตโพรเจกทีฟ

5.3 สัจพจน์สำหรับปริภูมิโพรเจกทีฟ

5.4 ทวิภาวะ

5.5 ภาคตัด

5.6 รูปเพอร์สเปกทีฟ

5.7 รูปสี่เหลี่ยมและรูปสี่ด้าน

5.8 รูป N-จุดบริบูรณ์

5.9 รูป N-จุดเชิงเดียวในระนาบ

5.10 การแปลงแบบโพรเจกทีฟ

5.11 สัจพจน์ของเรขาคณิตโพรเจกทีฟ

สาระสำคัญ

1. ประวัติความเป็นมาของเรขาคณิตโพรเจกทีฟ นักคณิตศาสตร์ผู้วางพื้นฐานของเรขาคณิตโพรเจกทีฟเช่น ปัปปุส เดซาร์กส์ ปาสกาล ปงเซอเลต์
2. สัจพจน์ของจุดและเส้น ทฤษฎีเกี่ยวกับจุดและเส้นในเรขาคณิตโพรเจกทีฟ แนวความคิดเกี่ยวกับเส้นขนาน ระนาบโพรเจกทีฟความสัมพันธ์ระหว่างจุด เส้นและระนาบ
3. การมีอยู่ของปริภูมิโพรเจกทีฟ สัจพจน์และทฤษฎีต่าง ๆ สำหรับปริภูมิสามมิติ สัจพจน์ของการปิด
4. ความหมายของทวิภาวะ แบบต่าง ๆ ของทวิภาวะอันได้แก่
   - planar duality
   - space duality
   - bundle duality
5. ความรู้เกี่ยวกับ plane section และ line section

6. ภาวะเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับจุด ภาวะเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับระนาบ และภาวะเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับเส้นที่กำหนดให้
7. รูปสี่เหลี่ยมเชิงเดียวในระนาบ รูปสี่ด้านเชิงเดียวในระนาบ รูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ในระนาบ จุดทะแยงมุม สามเหลี่ยมเฉียง รูปสี่ด้านบริบูรณ์ในระนาบ สัจพจน์ข้อที่ 9 ในเรขาคณิตโพรเจกทีฟ
8. รูป n-จุดบริบูรณ์และรูป n-เส้นบริบูรณ์ ทฤษฎีของเดซาร์กส์
9. รูป n-จุดเชิงเดียวในระนาบ รูป n-เส้นเชิงเดียวในระนาบ ทฤษฎีของปัปปุส
10. การแปลงแบบโพรเจกทีฟ ทฤษฎีของการแปลงแบบโพรเจกทีฟ
11. สัจพจน์ข้อที่ 9 ในเรขาคณิตโพรเจกทีฟ line conic และ point conic

วัตถุประสงค์

เมื่อจบบทเรียนนี้แล้วนักศึกษาจะสามารถ

1. อธิบายประวัติและพัฒนาการของเรขาคณิตโพรเจกทีฟตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบัน
2. พิสูจน์ปัญหาต่าง ๆ ในเรขาคณิตโพรเจกทีฟได้
3. เขียน planar duality และ space duality ของข้อความที่กำหนดให้ได้
4. บอกความหมายภาวะเพอร์สเปกทีฟได้
5. บอกความหมายภาวะโพรเจกทีฟและความสัมพันธ์ระหว่างภาวะเพอร์สเปกทีฟกับภาวะโพรเจกทีฟ
6. บอกได้ว่ารูปในระนาบที่กำหนดให้เป็นรูป N-จุดบริบูรณ์หรือรูป N-จุดเชิงเดียว
7. บอกความหมายของการแปลงแบบโพรเจกทีฟ

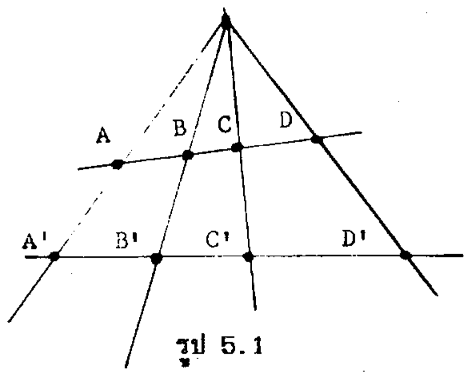
5.1 ประวัติและพัฒนาการของเรขาคณิตโพรเจกทีฟ

หลังจากสมัยของนักเรขาคณิตผู้ยิ่งใหญ่ทั้ง 3 คนในศตวรรษที่ 3 ก่อนคริสตศักราช คือยุคลิด อาคิมิดีสและอพอลโลเนียสแล้วบุคคลรุ่นถัดมาก็ยังสนใจคิดค้นเรื่องเกี่ยวกับเรขาคณิตต่อไป แต่ต่อมาไม่นานนักคนทั้งหลายกลับให้ความสนใจดาราศาสตร์ ตรีโกณมิติ และพีชคณิตมากกว่า ซึ่งมีผลทำให้วิทยาการสาขานั้น ๆ ก้าวหน้าไปมาก จนกระทั่งปลายคริสต์ศตวรรษที่ 3 จึงได้มีนักเรขาคณิตผู้มีความสามารถอีกผู้หนึ่งคือ ปัปปุส (Pappus)

ปัปปุสได้เขียนคำวิจารณ์ผลงานของบุคคลอื่น ๆ ไว้เป็นจำนวนมากแต่ที่สำคัญคือการวิจารณ์เกี่ยวกับเรขาคณิตที่ได้เขียนไว้ในหนังสือชื่อ "Mathematical Collection" ซึ่งอาจถือว่าเป็นคู่มือของวิชาเรขาคณิตในสมัยนั้นได้ ทั้งนี้เพราะว่านอกจากปัปปุสจะได้กล่าวถึงทฤษฎีและบทสร้างตามแบบเดิมแล้วยังได้ปรับปรุงให้ดีขึ้น เพิ่มเติมให้กว้างขวางขึ้นและวิจารณ์ในแง่ประวัติความเป็นมาไว้ด้วย

ปัปปุสได้พิสูจน์ทฤษฎีเกี่ยวกับเรื่อง Cross Ratio ไว้บทหนึ่ง Cross Ratio ของจุด 4 จุด A,B,C,D ซึ่งอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน หมายถึงอัตราส่วนของอัตราส่วนที่ได้จากจุด C และ D มาแบ่งส่วนของเส้นตรง AB หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $(AB,CD) = \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$ ซึ่งมีความสำคัญมาก เพราะอาจกล่าวได้ว่าทฤษฎีบทนี้เป็นทฤษฎีมูลฐานของวิชาเรขาคณิตโพรเจกทีฟ ทฤษฎีบทนั้นกล่าวว่า

"ถ้ารังสี 4 เส้น ซึ่งพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง (ดูภาพประกอบ) มีเส้นขวาง 2 เส้นมาตัดและถ้าให้จุดตัดเป็น A,B,C,D และ A',B',C',D' แล้วจะได้ว่า Cross Ratio ทั้งสองคือ (AB,CD) และ (A'B',C'D') เท่ากัน เราเรียกว่า **ตัวยืนยงแบบโพรเจกทีฟ** (Projective invariant) (รูป 5.1)

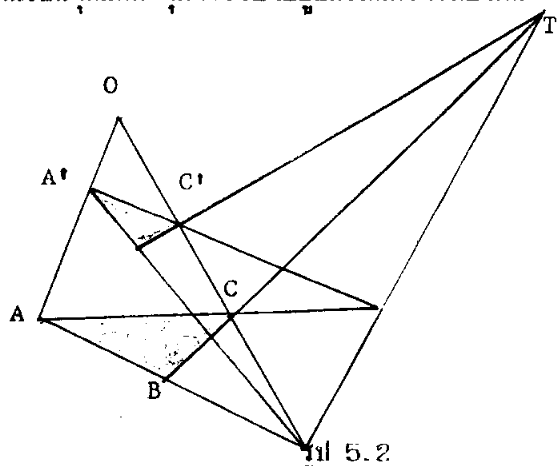


รูป 5.1

อย่างไรก็ตามในสมัยของปัปปุสและสมัยหลังจากนั้นยังไม่ได้มีการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับวิชาเรขาคณิตโพรเจกทีฟอย่างแท้จริงเพียงแต่ทราบว่าคนในสมัยก่อนก็มีแนวความคิดในเรื่องนี้อยู่บ้าง

ต่อมา โจฮัน เคพเลอร์ (Johann Kepler) (1517-1630) นักดาราศาสตร์ผู้มีชื่อเสียงได้ให้ความสนใจในวิชาเรขาคณิตมากเท่า ๆ กับวิชาดาราศาสตร์ และเขาได้ชี้ให้เห็นว่ามีจุดใหม่เกิดขึ้นนอกเหนือจากจุดในระบบของยุคลิด จุดนั้นก็คือ "จุดในจินตนาการ" (Point at infinity) ซึ่งหมายถึงจุดที่เส้นขนานใดใดไปพบกัน ความคิดของเขาไม่ได้ถูกนำไปใช้โดยทันทีแต่ก็มีผลในการสร้างเรขาคณิตระบบใหม่ซึ่งแตกต่างไปจากระบบยุคลิดและเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด

ประมาณกลางคริสตศตวรรษที่ 17 เดซาร์กส์ (Desargues) ซึ่งเป็นทั้งนักคณิตศาสตร์ วิศวกร และสถาปนิกชาวฝรั่งเศส และครั้งหนึ่งเคยเป็นทหารประจำการมาแล้วเขาเกิดในลีอองส์ (Lyons) ในปี ค.ศ. 1583 และเสียชีวิตในปี ค.ศ. 1662 เขาได้เริ่มต้นศึกษาและวางพื้นฐานของวิชานี้ไว้ในหนังสือเล่มหนึ่งซึ่งเกี่ยวกับภาคตัดกรวย และโพรเจกชัน และได้พิสูจน์ทฤษฎีบทหนึ่งในวิชานี้ซึ่งต่อมาเรียกชื่อว่า "ทฤษฎีของเดซาร์กส์ (Desargues' Theorem)" ซึ่งยังคงเป็นรากฐานของวิชาเรขาคณิตโพรเจกทีฟ กล่าวถึงคุณสมบัติร่วมกันของสองภาคตัดของการฉายสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เดซาร์กส์พิจารณาดังนี้คือ จากรูปสมมุติว่าตาของเราเป็นจุด O มองไปยังรูปสามเหลี่ยม ABC เส้นของลำแสงจากจุด O ไปยังรูปสามเหลี่ยมประกอบกันเป็นโพรเจกชัน (Projection) ถ้าภาคตัดของโพรเจกชันนี้ถูกสร้างโดยฉากแก้ว รูปที่เกิดจากรอยตัด คือรูปสามเหลี่ยม A'B'C' ซึ่ง A' สมนัยกับ A, B' สมนัยกับ B, C' สมนัยกับ C ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองกล่าวได้ว่าเป็นโพรเจกทีฟ (Projective) จากจุด O ดังนั้น เดซาร์กส์จึงยืนยันว่าแต่ละด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองจะตัดกันเป็นจุดแต่ละจุดจะเรียงอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (ดังรูป 5.2)

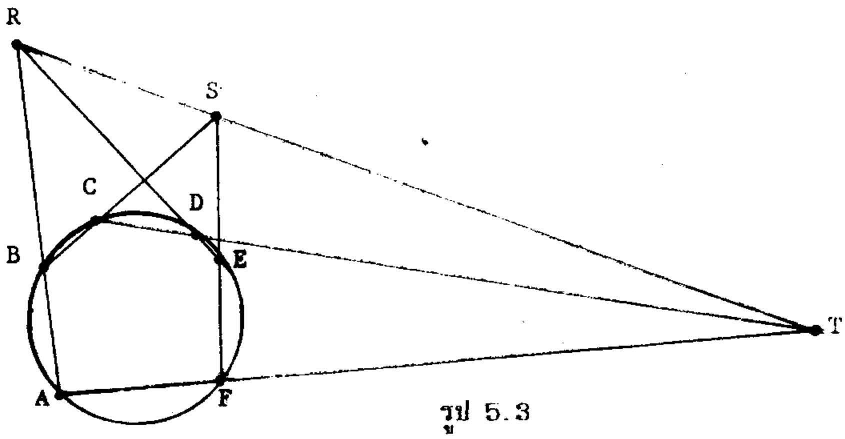


รูป 5.2

เราอาจพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม A'B'C' เป็นภาคตัดที่ต่างกันของการฉายรูปสามเหลี่ยมรูปที่สามก็ได้ ได้ที่ OAA',OBB',OCC' เป็นเส้นของการฉาย (Line of Projection) ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสามจากจุด O และนอกจากนี้สามเหลี่ยมทั้งสองตามที่กล่าวมานั้นจะอยู่คนละระนาบ แต่ถ้าหากอยู่บนระนาบเดียวกัน ทฤษฎีของเดซาร์กส์ก็ยังคงเป็นจริงด้วยแต่การพิสูจน์ทั้งสองกรณีพิสูจน์ต่างกัน

มีปัญหาว่าถ้าหากด้านที่สมนัยกันทั้งสามคู่ขนานกันจะเป็นอย่างไร เดซาร์กส์อ้างว่าเซตของเส้นขนานใด ๆ จะมีจุดร่วมกันซึ่งเรียกว่าจุดในจินตนาการ ดังนั้นเส้นสองเส้นใด ๆ ในเรขาคณิตโพรเจกทีฟจะพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง เซตของเส้นขนานจะพบกันที่จุด ๆ หนึ่งและถ้ามีหลาย ๆ เซตของเส้นขนานในระนาบก็จะมีจุดในจินตนาการหลายจุด เส้นที่เชื่อมจุดในจินตนาการสองจุดใด ๆ เราเรียกว่า เส้นในจินตนาการ (Line at infinity) ดังนั้นทฤษฎีของเดซาร์กส์ถ้าเป็นกรณีที่ด้านที่สมนัยกันขนานกันจุดตัดกันของด้านทั้งสามคู่จะเรียงอยู่บนเส้นในจินตนาการ

ทฤษฎีที่มีคุณสมบัติของภาคตัดร่วมกันของการฉายอีกทฤษฎีหนึ่งก็คือทฤษฎีของปาสกาล (Pascal's theorem) แบลส์ ปาสกาล (Blaise Pascal) เป็นนักคณิตศาสตร์รุ่นเดียวกันกับเดร์ซาร์กส์ ทฤษฎีชิ้นเอกของเขาคือ "จุดตัดกันของด้านตรงข้ามของรูปหกเหลี่ยมที่บรรจุภายในวงกลมจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน" ตอนแรก ๆ ทฤษฎีเขาไม่ได้กล่าวถึงโพรเจกชันและภาคตัดของมันเลยแต่ถ้าเรานำเอารูปที่เกี่ยวกับทฤษฎีของเขาไปฉาย ในการฉายวงกลมจะเป็นรูปกรวย และถ้าตัดกรวยจะเป็นรูปอิลลิปส์, ไฮเพอร์โบลา หรือพาราโบลา ที่เราเรียกว่าภาคตัดกรวย และยิ่งไปกว่านี้รูปหกเหลี่ยมในวงกลมวงแรกจะทำให้เกิดรูปหกเหลี่ยมบรรจุในภาคตัดกรวยโดยที่หกเหลี่ยมนั้นจะมีคุณสมบัติเหมือนหกเหลี่ยมแรกคือจุดตัดของด้านตรงข้ามจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกันและเส้นตรงนี้จะสมนัยกับเส้นแรกด้วย (ดังรูป 5.3)



รูป 5.3

ทฤษฎีของเดซาร์กส์และปาสกาลแสดงให้เห็นว่ามีคุณสมบัติร่วมของภาคตัดของการฉายรูปที่กำหนดให้มา เป็นที่น่ายินดีที่ผู้ร่วมงานของเขาเข้าใจผลงานของเขาทั้งสองได้เป็นอย่างดีจึงช่วยกันผลักดันให้เรื่องนี้พัฒนาไปได้ไกลมาก

อับราฮัม บอสส์ (Abraham Boss) เป็นทั้งลูกศิษย์และเพื่อนของ เดซาร์กส์ได้พิมพ์หนังสือในปี ค.ศ. 1648 ชื่อ "The Universal Method of Desarques for The Pract of Perspective" ซึ่งในภาคผนวกของหนังสือเล่มนี้เขาได้ปรับปรุงทฤษฎีของเดซาร์กส์ใหม่และยังมีทฤษฎีอื่น ๆ ที่เป็นผลงานของเขาเอง แต่ภาคผนวกของเขาได้หายไป

ไชคดีที่ (Phillippe de la hire) ศิษย์ของเดซาร์กส์ได้คัดลอกต้นฉบับของเดซาร์กส์ไว้ในศตวรรษที่ 19 (Micheal Chasles) นักเรขาคณิตก็ได้นำฉบับคัดลอกนี้มาไว้ในร้านหนังสือของเขาอย่างบังเอิญ ด้วยเหตุนี้งานชิ้นเอกของเดซาร์กส์จึงปรากฏมาจนทุกวันนี้อย่างสมบูรณ์

งานของปาสกาลเกี่ยวกับภาคตัดกรวยและงานอื่น ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตโพรเจกทีฟที่พิมพ์ในปี ค.ศ. 1640 ไม่เป็นที่รู้จักของคนทั่วไปนักจนกระทั่งปี ค.ศ. 1800 จึงมีคนรู้จักทั้งทฤษฎีของปาสกาลและเดซาร์กส์ได้ถูกนำมาสังคายนาโดยนักเรขาคณิตศตวรรษที่ 19

เหตุที่เรขาคณิตโพรเจกทีฟถูกทอดทิ้งไปนานในช่วงศตวรรษที่ 17-18 เป็นเพราะว่าในขณะนั้นเป็นยุคของเรขาคณิตวิเคราะห์และเป็นยุคของแคลคูลัส ทั้งสองวิชานี้มีประโยชน์ต่อวิทยาศาสตร์กายภาพมากและขยายตัวอย่างรวดเร็วนักคณิตศาสตร์จึงไปสนใจทั้งสองวิชานี้มากกว่า

ในตอนต้นคริสตศตวรรษที่ 19 นักคณิตศาสตร์จึงได้ให้ความสนใจเกี่ยวกับเรขาคณิตโพรเจกทีฟอย่างมากและได้มีผู้คิดค้นและขยายความรู้เกี่ยวกับวิชานี้ให้กว้างขวางต่อไปอีกหลายท่านอาทิเช่น เกอร์กอง (Gergomne) ปงเซอเลต์ (Poncelet) ไบรแองชอง (Brianchon) ดูแปง (Dupin) ชาล์เลส (Chasles) สไตเนอร์ (Steiner) และสเตาท์ (Staudt) เป็นต้น

ปงเซอเลต์ถือว่าเป็นผู้ฟื้นฟูเรขาคณิตโพรเจกทีฟอย่างที่เรารู้จักกันอยู่ในปัจจุบันนี้ในขณะที่เป็นเชลยสงครามคราวที่นโปเลียนบุกทำลายรัสเซียอย่างย่อยยับในฤดูหนาวของปี ค.ศ. 1813-1814 ที่เมืองซาราตอฟ (Saratoff) บนฝั่งแม่น้ำโวลกา (Volga) ปงเซอเลต์ได้สังคายนาวิชานี้โดยที่เขาไม่มีหนังสือในมือแม้แต่เล่มเดียวและเขาได้สร้างผลงานใหม่ ๆ ในวิชานี้เขาได้คิดวิธีใช้ pure geometry และ traite'des proprieties projectives des figures ซึ่งได้ตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1822 ในปารีส งานชิ้นนี้เป็นแรงผลักดันให้มีผู้ศึกษาวิชานี้เพิ่มขึ้นถึงกับเรียกยุคนี้ว่า "Great period" ในงานของเขาสิ่งที่เด่นก็คือ

The power of Central Projective Indemonstration

The power of the Principle Continuity in research ความคิดของเขาคือการศึกษาคุณสมบัติของโพรเจกทีฟ (projective) และเขายังได้แนะนำให้รู้จักอัตราส่วนฮาร์มอนิก (Harmonic Ratio) ซึ่งเป็นพื้นฐานและแนวความคิดสำคัญ ซึ่งสามารถนำมาใช้ได้อีกที่เดซาร์กส์เคยใช้มาในปี 1639

ปงเซอเลต์ได้พิมพ์กฎต่าง ๆ ขึ้นมาเป็นครั้งแรกและเขาได้นำเอาบทบาทใหม่ ๆ มาสู่สาขาเรขาคณิตซึ่งเกือบจะสูญสิ้นไปแล้ว จากการสังเกตพบว่าสัดส่วนคงที่ของสัญฐานแบนราบเช่นภาวะร่วมเส้นตรงเดียวกัน (collinearity) ของจุดสามจุดในทฤษฎีบทของปาสกาลจะมีค่าคงที่เหมือนกันเมื่อใช้ด้วยการโพรเจกทีฟ ปงเซอเลต์ยอมรับในสิ่งที่เห็นจริงแล้ว และได้ให้นิยามไว้ว่ากราฟฟิก (graphic) หรือโพรเจกทีฟ สัดส่วนของรูปที่จะเป็นรูปร่างขึ้นมาได้นั้นต้องมีขนาดระยะทางและมุมและปงเซอเลต์ห้ามใช้อัตราส่วนระบบเมตริกในเรขาคณิตโพรเจกทีฟ ปงเซอเลต์แถลงการยอมรับกฎของเคปเลอร์และยังแนะนำให้รู้จักเส้นในจินตนาการซึ่งเป็นแนวคิดของเดซาร์กส์ซึ่งมีความจำเป็นจะต้องใช้ในวิชาเรขาคณิตของเขาเองด้วย ซึ่งกล่าวไว้ว่า "วงกลมทุกวงที่ตัดเส้นตรงเส้นนี้โดยผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้แล้ว สมการสองสมการที่ใช้แทนวงกลมจะแบ่งเป็นจำนวนที่ถูกต้องอย่างง่ายดาย"

จัดได้ว่าปงเซอเลต์เป็นคนแรกที่มีความเข้าใจวิชาเรขาคณิตโพรเจกทีฟอย่างถ่องแท้ หลังจากปงเซอเลต์ได้เปิดสาขาวิชานี้แล้วนักคณิตศาสตร์เยอรมัน ฝรั่งเศส ก็ได้ร่วมกันพัฒนาวิชานี้อย่างจริงจัง

คำว่าขั้ว (Pole) ซึ่งมีความหมายดังนัยที่ใช้อยู่ในวิชาเรขาคณิตโพรเจกทีฟนั้น เซอร์วอยส์ (Servois) ได้คิดขึ้นเมื่อปี ค.ศ. 1810 และต่อจากนั้นอีก 3 ปี เกอร์กองจึงได้คิดใช้คำที่คู่กันคือ โพลาร์ (Polar) นอกจากนี้เกอร์กองและปงเซอเลต์ยังได้เพิ่มเติมแนวคิดเรื่อง Pole และ Polar ของเดซาร์กส์ให้ละเอียดยิ่งขึ้นจนทำให้ค้นพบหลักประการหนึ่งคือหลักการทวิภาวะ (Principle of Duality) สำหรับเกอร์กองนี้เขาเป็นทหารเช่นเดียวกับปงเซอเลต์ ทั้งสองต่างก็นำหลักฐานมาอ้างอันที่จะเป็นเจ้าของหลักการทวิภาวะ

ในที่สุดเกอร์กองก็ถอนตัวในการอ้างสิทธิเป็นเจ้าของกฎนี้ หลักการทวิภาวะเป็นจริงทั้งในเรขาคณิตโพรเจกทีฟและเรขาคณิตระบบยุคลิด เรขาคณิตระบบยุคลิด กล่าวว่า

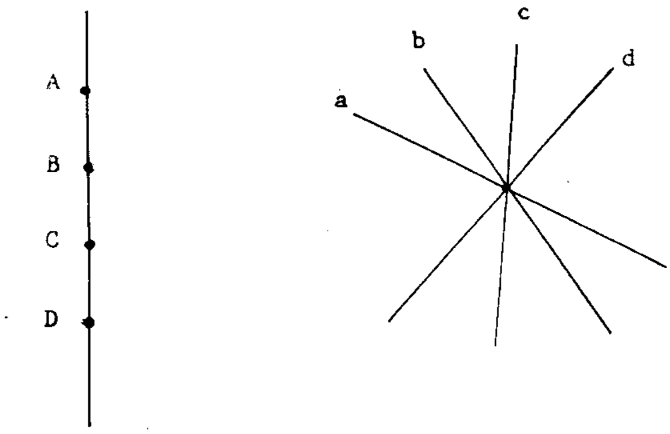
จุดสองจุดใด ๆ กำหนดเส้นตรงเส้นหนึ่ง

เส้นตรงสองเส้นใด ๆ กำหนดจุดจุดหนึ่ง

ซึ่งก็เป็นจริงในเรขาคณิตโพรเจกทีฟด้วย สิ่งที่น่าสังเกตคือ คำกล่าวที่สองได้มาจากคำกล่าวแรกเพียงแต่เปลี่ยนคำว่า เส้น และ จุด

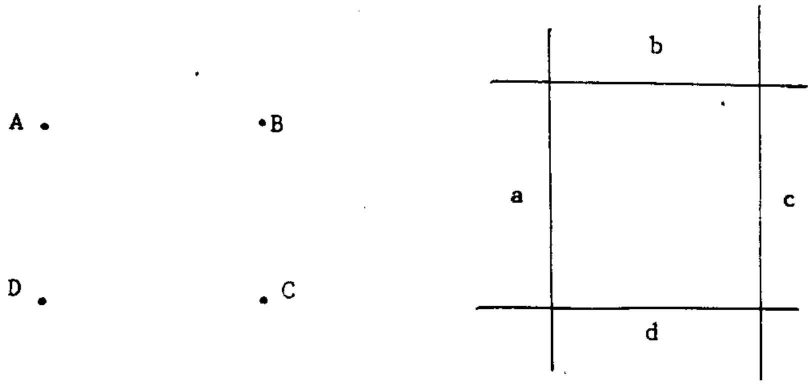
ดังนั้นเรากล่าวได้ว่า เซตของจุดบนเส้นตรง "Set of points on a line"

และเซตของเส้นบนจุด "Set of lines on a point" เป็นคำพูดที่คู่เสมอกัน (dual)



รูป 5.4

เช่นเดียวกับคำพูดที่ว่า "Figure consisting of four points no three of which lie on the same point"



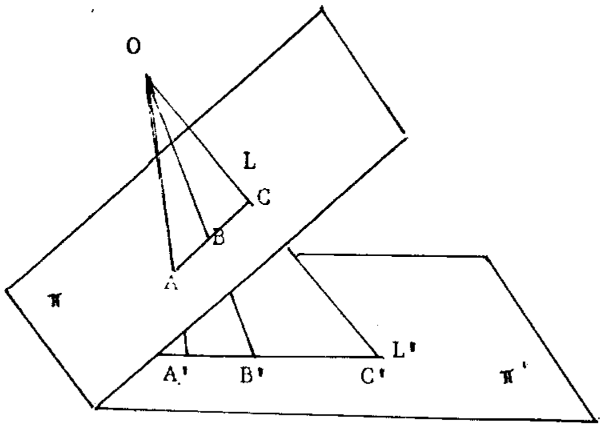
รูป 5.5

จะเห็นว่าเป็นการเปลี่ยนคำว่า จุด และ เส้น เท่านั้น หลักของทวิภาวะจะไม่บอกเราแต่เพียงว่าจะได้ ข้อความใหม่ หรือทฤษฎีใหม่จากที่กำหนดให้ โดยเกี่ยวข้องกับจุดและเส้นเท่านั้น แต่ถ้ากระทำกับเส้นโค้งได้ด้วย

และต่อจากนั้นอีกไม่นานนักก็มีผู้สามารถทำให้วิชาเรขาคณิตโพรเจกทีฟ เป็นวิชาเรขาคณิตที่ไม่เกี่ยวข้องกับเรื่องของระยะทางใด ๆ ได้ซึ่งแตกต่างไปจากเรขาคณิตแบบของยุคลิดอย่างสิ้นเชิง

นอกจากที่กล่าวมาแล้วประมาณปี ค.ศ. 1872 เฟลิกซ์ ไคลน์ ได้ตั้งหลักเกณฑ์อย่างหนึ่งคือ "Erlanger Programm" มีใจความสรุปได้ว่า "วิชาเรขาคณิตไม่ว่าแขนงใด ๆ คือการตรวจสอบคุณสมบัติของรูปต่าง ๆ ซึ่งเมื่อได้มีการแปลง (หมายถึงการแปลงจากรูปหรือนิพจน์แบบหนึ่งไปสู่รูปหรือนิพจน์อีกแบบหนึ่งซึ่งอาจกระทำได้หลายวิธี) ไปแล้ว รูปนั้น ๆ ก็จะยังคงมีลักษณะเช่นเดิม" ซึ่งถ้าพิจารณาดูแล้วจะเห็นได้ว่าหลักเกณฑ์ของไคลน์ดังกล่าวช่วยทำให้เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตชนิดต่าง ๆ และเนื้อหาของวิชาเรขาคณิตแต่ละชนิดดีขึ้น เช่น สำหรับวิชาเรขาคณิตบนระนาบแบบของยุคลิดนั้นใช้การแปลงแบบ "Rigid Motion" คือ การหมุนแกนและการย้ายแกน เนื่องจากไม่ว่าจะหมุนหรือย้ายแกนไปจากตำแหน่งเดิม พื้นที่ของรูปและความยาวของเส้นจะยังคงมีค่าเท่าเดิม วงกลมก็ยังเป็นวงกลมเช่นเดิม และจุดกึ่งกลางของเส้นใดก็ยังคงเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นนั้นตามเดิม ดังนั้นเรื่องเกี่ยวกับพื้นที่ของรูป ความยาวของเส้น วงกลม และจุดกึ่งกลางของเส้นจึงเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของวิชาเรขาคณิตบนระนาบแบบของยุคลิด ตรงตามหลักเกณฑ์ของไคลน์ แต่สำหรับในวิชาเรขาคณิตโพรเจกทีฟใช้การแปลงแบบ Central Projection คือการฉายรูปบนระนาบหนึ่งไปสู่อีกระนาบหนึ่งโดยให้จุดกำเนิดของการฉายอยู่นอกระนาบทั้งสอง (ดูภาพประกอบ 5.6) และเนื่องจากเมื่อใช้การแปลงแบบนี้วงกลมอาจจะถูกโปรเจกไปเป็นอิลลิปส์ทั้งพื้นที่กับความยาวของเส้นก็จะไม่คงเดิมอีกต่อไป ดังนั้นในวิชาเรขาคณิตโพรเจกทีฟจึงไม่ต้องกล่าวถึงเรื่องเกี่ยวกับวงกลม พื้นที่และความยาวของเส้น แต่เนื่องจากอาจแสดงได้ว่าจุดทั้งหลายซึ่งอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (Collinear Points) จะถูกฉายไปเป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกันตามเดิม และเส้นทั้งหลายซึ่งพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง (Concurrent Lines) ก็จะถูกฉายไปเป็นเส้นที่มาพบกันที่จุด ๆ หนึ่งเช่นเดิม ดังนั้นทั้งสองเรื่องนี้คือการที่จุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และการที่เส้นมาพบกันที่จุด ๆ หนึ่งจึงเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของวิชาเรขาคณิตโพรเจกทีฟ นอกจากนั้นการที่แพพพัสสามารถพิสูจน์ได้ก่อนหน้านี้แล้ว Cross Ratio จะไม่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อใช้การแปลงแบบนี้ ดังนั้น Cross Ratio ก็เป็นอีกเรื่องหนึ่งที่จะต้องกล่าวถึงในวิชาเรขาคณิตโพรเจกทีฟ

อย่างไรก็ตามตั้งแต่ไอนสไตน์ (Einstein) คิดทฤษฎีสัมพันธภาพ (Theory of Relativity) ได้ในปี ค.ศ. 1916 แล้วนักคณิตศาสตร์ก็จำเป็นต้องยกเลิกหลักเกณฑ์ของไคลน์ดังกล่าวมาแล้วข้างต้นเพื่อให้สอดคล้องกับทฤษฎีสัมพันธ์ภาพ



รูป 5.6

การอนุมานของเรขาคณิตระบบยุคลิดและเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด จากสัจพจน์ของเรขาคณิตไพรเจกทีฟเป็นผลสำเร็จในปลายศตวรรษที่ 19 และต้นศตวรรษที่ 20 ทั้ง ๆ ที่ยุคลิดได้เรียบเรียงมาก่อนถึง 500 ปีก่อนที่พวกกลุ่มนักเรขาคณิตไพรเจกทีฟจะค้นคว้าเรื่องนี้เสียอีก

สรุป งานวิจัยเกี่ยวกับเรขาคณิตไพรเจกทีฟยังมีต่อไปจนทุกวันนี้ เพื่อที่จะจำกัดขอบเขตเนื้อหา นักเรขาคณิตได้พยายามค้นหาสัจพจน์ง่าย ๆ และการพิสูจน์ที่สละสลวยกว่างานวิจัยเกี่ยวกับเรขาคณิตไพรเจกทีฟในปริภูมิ n มิติ ความรู้ใหม่ที่มีขอบเขตกว้างขวางมากก็คือ Projective Differential Geometry ซึ่งเกี่ยวกับที่ตั้งหรือคุณสมบัติของเส้นโค้ง หรือผิวโค้ง

เรขาคณิตไพรเจกทีฟมีความสัมพันธ์ที่สำคัญในคณิตศาสตร์ปัจจุบันหลายแขนง ความสัมพันธ์ของเรขาคณิตไพรเจกทีฟกับเรขาคณิตระบบยุคลิดและเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด มีการค้นคว้าระหว่างปลายศตวรรษที่ 19 จึงเป็นการนำเข้าไปสู่เรขาคณิตแนวใหม่

ไพรเจกชันและภาคตัดอาจเรียกเป็นการแปลง คือเริ่มต้นด้วยการกำหนดรูปมาให้สร้างไพรเจกชันจาก Central point และก็จะได้ภาคตัดของไพรเจกชันขบวนการทั้งหมดนี้ได้มาจากรูปแรกจนได้ภาคตัด ภาคตัดนี้เราเรียกว่าการแปลงและเรขาคณิตไพรเจกทีฟนั้นค้นหาสิ่งซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลงนี้ ในปัจจุบันนี้เรขาคณิตแนวใหม่พัฒนาโดยดำเนินไปตามแนวความคิดนี้และเรียกว่า โทโพโลยี แต่ โทโพโลยีพิจารณาถึงการแปลงได้กว้างขวางกว่า

เรขาคณิตโพรเจกทีฟ

งานของเรขาคณิตโพรเจกทีฟมีอิทธิพลต่อวิทยาศาสตร์กายภาพในปัจจุบันมาก เช่น ในใช้ทฤษฎีสัมพันธภาพ ในปัจจุบันแม้ว่าจะมีคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ ที่มีส่วนทำให้วิทยาศาสตร์ก้าวหน้า แต่ก็ไม่มีคณิตศาสตร์แขนงใดที่จะเกี่ยวข้องเท่าเรขาคณิตโพรเจกทีฟในแง่ของแนวความคิด ความเคร่งครัดในการพิสูจน์ การสรุปเหตุผลทางตรรกวิทยาและแนวคิดที่กว้างขวาง

กิจกรรมการเรียนที่ 5.1

ให้นักศึกษาค้นคว้าและศึกษาประวัติและพัฒนาการของเรขาคณิตโพรเจกทีฟเพิ่มเติม และเขียนรายงานโดยสรุป

5.2 สัจพจน์สำหรับเรขาคณิตโพรเจกทีฟ

ในเบื้องต้นนี้ใคร่ขอทำความเข้าใจเรื่องจุดและเส้นในเรขาคณิตโพรเจกทีฟเสียก่อน ในเรขาคณิตโพรเจกทีฟนั้นถือว่าจุดและเส้นเป็นอนิยามศัพท์ เส้นแต่ละเส้นเป็นเซตของจุด ถ้า A เป็นจุดจุดหนึ่งของเส้น $\overleftrightarrow{CD}$ เรากล่าวว่า จุด A **อยู่บน**เส้น $\overleftrightarrow{CD}$ เขียนว่า $A \in \overleftrightarrow{CD}$ อ่านว่า A เป็นสมาชิกของ $\overleftrightarrow{CD}$

ถ้า A อยู่บน $\overleftrightarrow{CD}$ แล้ว กล่าวว่า $\overleftrightarrow{CD}$ อยู่บน A ด้วย สัจพจน์สำหรับการมีอยู่และการตกกระทบของจุดและเส้นในเรขาคณิตโพรเจกทีฟคล้ายกันกับสัจพจน์ ข้อ 1,2,4,5 และ 6 ของเรขาคณิตจำกัดของ 7 จุดและ 7 เส้นที่ศึกษามาแล้ว

P-1 มีอย่างน้อยหนึ่งเส้น

P-2 มีจุดที่ต่างกันอย่างน้อยสามจุดบนแต่ละเส้น

P-3 ถ้า A และ B เป็นจุดใด ๆ ที่ต่างกันสองจุดแล้วมีเส้น $\overleftrightarrow{AB}$ อย่างน้อยหนึ่งเส้นบนทั้ง A และ B

P-4 ถ้า A และ B เป็นจุดสองจุดที่ต่างกันแล้ว จะมีเส้นอย่างมากหนึ่งเส้นเรียกว่า $\overleftrightarrow{AB}$ บนทั้ง A และ B

P-5 จุดทั้งหมดไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน

สัจพจน์สำหรับเรขาคณิตโพรเจกทีฟมิได้มีเพียง P-1 ถึง P-5 เท่านั้น แต่ยังมีข้ออื่น ๆ อีกซึ่งจะกล่าวถึงภายหลังจากที่ได้ศึกษาคุณสมบัติของรูปเรขาคณิตบางรูป ในเรขาคณิตโพรเจกทีฟนั้นเซตของจุดเป็น**รูปเรขาคณิต** ดังนั้นเส้นเส้นหนึ่งเป็นรูปเรขาคณิต เนื่องจากเส้นเป็นอนิยามศัพท์เราอาจสร้างมโนภาพว่าเส้นเป็นรูปใด ๆ ตามที่สัจพจน์กล่าวไว้ โดยปกติมักถือว่าเส้นคือเส้นตรง

ทฤษฎี 5.1 ถ้า A และ B เป็นจุดใด ๆ ที่ต่างกันสองจุดจะมีเส้นเพียงเส้นเดียวเท่านั้น $\overleftrightarrow{AB}$ อยู่บนทั้ง A และ B

พิสูจน์ จาก P-3 มีอย่างน้อยหนึ่งเส้น $\overleftrightarrow{AB}$ อยู่บนทั้ง A และ B
จาก P-4 มีอย่างมากหนึ่งเส้น $\overleftrightarrow{AB}$ อยู่บนทั้ง A และ B
นั่นคือ มีเพียงเส้นเดียวเท่านั้น $\overleftrightarrow{AB}$ อยู่บน A และ B

ทฤษฎี 5.2 เส้นเส้นหนึ่งกำหนดโดยจุดสองจุดของเส้นเส้นนั้น

พิสูจน์ ให้ m เป็นเส้นเส้นหนึ่ง โดย P-2 จะมีจุด A,B และ C

เป็นจุดสามจุดที่ต่างกันบน m

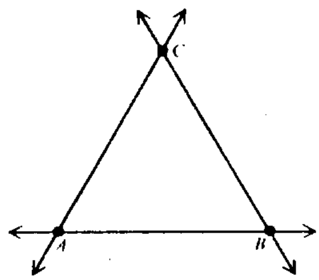
โดย P-3 จะมีเส้น $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ และ $\overleftrightarrow{AC}$

เนื่องจาก $A \in m$ และ $B \in m$ ทำให้ทราบว่า m เป็นเส้นที่ลากผ่านทั้ง A และ B

โดยทฤษฎี 4-1 จะได้ว่า $m = \overleftrightarrow{AB}$

ในทำนองเดียวกัน $m = \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AC}$ โดยทั่ว ๆ ไปเส้น m อาจถูกกำหนดหรือเรียกชื่อด้วยจุดใด ๆ สองจุดที่อยู่บนเส้นนั้น

เมื่อไรก็ตามที่กล่าวถึงจุดหรือเส้นที่กำหนดให้จะหมายถึง จุดที่ต่างกันหรือเส้นที่ต่างกันเสมอ ถ้ากำหนดให้ A และ B เป็นจุดมี C เป็นจุดอีกจุดหนึ่งซึ่ง $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ แล้วรูปที่ประกอบด้วยจุด A,B,C และเส้น $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ เป็น**รูปสามเหลี่ยม** เรียก ΔABC เนื่องด้วยขณะนี้ยังไม่ได้นิยามส่วนของเส้นตรง ดังนั้นสามารถอธิบายรูป ΔABC ได้ว่ามีเส้นสามเส้นเป็น **ด้าน** และมีจุดสามจุดเป็น **จุดยอด** ดังรูป 5.7



รูป 5.7

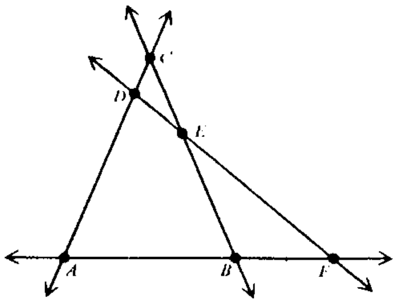
ต่อไปจะพิจารณาการตัดกันของเส้น เส้นสองเส้น m และ n **ตัดกัน** ถ้าเส้นตรงทั้งสองมีจุดร่วมกันอย่างน้อยหนึ่งจุด นั่นคือถ้า $m \cap n \neq \phi$ โปรดสังเกตว่าการกล่าวเช่นนี้จะทำให้ได้ว่าเส้นใด ๆ จะตัดกับตัวของมันเอง ความคิดรวบยอดนี้จะนำไปสู่สัจพจน์

ข้อที่ 6 ของเรขาคณิตโพรเจกทีฟ

P-6 ถ้าเส้นหนึ่งตัดด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมโดยไม่ผ่านจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมแล้ว

เส้นนี้จะตัดด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยม

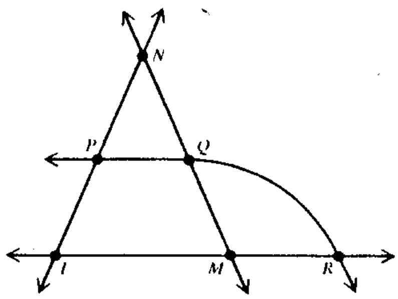
สัจพจน์ P-6 นี้อาจแสดงด้วยรูป 5.8 และเขียนให้เข้าใจง่ายขึ้นดังนี้



รูป 5.8

กำหนดรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ABC ถ้า $D \in \overleftrightarrow{AC}$, $D \notin \{A,C\}$, $E \in \overleftrightarrow{BC}$, และ $E \notin \{B,C\}$ แล้วจะมีจุดจุดหนึ่ง F ซึ่ง $F \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$

สังเกตว่าจุด F ที่กล่าวถึงนี้มีได้เพียงจุดเดียว ดังนั้น $F = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$ ข้อสังเกตนี้เป็นความจริงแต่ก็ต้องการการพิสูจน์โดยระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์ซึ่งจะละไว้เป็นกิจกรรมการเรียนสำหรับนักศึกษา (กิจกรรมการเรียนที่ 5.2 ข้อ 4)



รูป 5.9

ให้นักศึกษาดูรูป 5.9 เป็นรูปที่เกิดจากการกำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นที่ลาก เชื่อมจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง IN และ MN ซึ่งไม่น่าแปลกใจเลยเมื่อทราบภาย

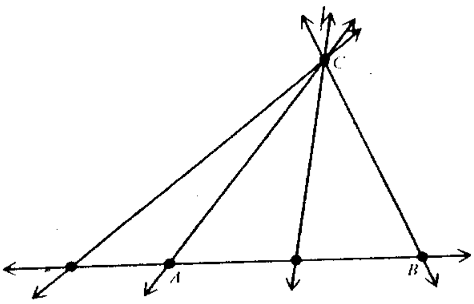
หลังว่าสัจพจน์ P-6 นำไปสู่ข้อสรุปว่าไม่มีเส้นขนานในเรขาคณิตโพรเจกทีฟ นั่นคือเส้นร่วมระนาบสองเส้นใด ๆ ต้องตัดกัน ก่อนจะอธิบายเรื่องนี้ให้ลึกซึ้งจำเป็นต้องนิยามระนาบเสียก่อน

จาก P-1 มีเส้น $\overleftrightarrow{AB}$ เส้นหนึ่ง

จาก P-2 $\overleftrightarrow{AB}$ บรรจุอย่างน้อย 3 จุด

จาก P-5 มีจุด ๆ หนึ่งคือจุด C ซึ่ง $C \notin \overleftrightarrow{AB}$

ตามทฤษฎี 4.1 ทำให้ได้ว่าแต่ละจุดบน $\overleftrightarrow{AB}$ กับจุด C กำหนดเส้นขึ้นเส้นหนึ่ง จำนวนจุดทั้งหมดบนเส้นที่กำหนดโดยจุด C และทุก ๆ จุดบน $\overleftrightarrow{AB}$ กำหนดระนาบ $\overleftrightarrow{AB}$ - C นั่นคือระนาบกำหนดโดยเส้น $\overleftrightarrow{AB}$ และจุด C (รูป 5.10)



รูป 5.10

สามารถพิสูจน์ได้ว่าระนาบ $\overleftrightarrow{AB}$ - C เป็นระนาบที่กำหนดโดยจุด A, B และ C (กิจกรรมการเรียน ข้อ 2) และอาจคิดเสมือนว่าเป็นระนาบ ABC (กิจกรรมการเรียน ข้อ 7)

ขณะนี้เรากำลังศึกษาเรขาคณิตซึ่งมีคุณสมบัติต่าง ๆ ที่ค่อนข้างจะใหม่และแปลกสำหรับพวกเราทุกคน ฉะนั้นเราจำเป็นต้องระมัดระวังเป็นพิเศษขณะที่เราพิจารณารูปในระนาบ

เมื่อจะพิสูจน์คุณสมบัติแต่ละข้อที่เราประสงค์จะนำเอาไปใช้ในเรขาคณิตนี้ คุณสมบัติ 4 ประการ ซึ่งมีประโยชน์อย่างยิ่งกำหนดโดยทฤษฎี 4 ทฤษฎีต่อไปนี้ (การพิสูจน์เว้นไว้เป็นกิจกรรมการเรียน(ข้อ 6,8,9 และ 10)

ทฤษฎี 5.3 ถ้าจุดสองจุดของเส้นเส้นหนึ่งอยู่บนระนาบแล้วทุก ๆ จุดของเส้นนี้อยู่บนระนาบ

ทฤษฎี 5.4 จุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกันกำหนดระนาบขึ้นระนาบหนึ่ง

ทฤษฎี 5.5 เส้นสองเส้นใด ๆ ตัดกันจะทำให้เกิดระนาบขึ้นระนาบหนึ่ง

ทฤษฎี 5.6 เส้นสองเส้นใด ๆ ที่อยู่ร่วมระนาบจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่งและจุดเดียวเท่านั้น

กิจกรรมการเรียนที่ 5.2

จากสัจพจน์ P-1 - P-5 จงพิสูจน์ว่า

1. มีรูปสามเหลี่ยมอย่างน้อยหนึ่งรูป
2. ระนาบ $\overleftrightarrow{AB} - C$ กำหนดโดยจุดสามจุด A,B และ C ที่ไม่ได้อยู่บนเส้นเดียวกัน
3. มีอย่างน้อย 7 จุดและ 7 เส้น
4. กำหนดให้ A,B และ C เป็นจุดสามจุดซึ่ง $C \notin \overleftrightarrow{AB}$,$D \in \overleftrightarrow{AC}$, $D \notin \{A,C\}$, $E \in \overleftrightarrow{BC}$, $E \notin \{B,C\}$, และ $F \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$ แล้ว $F = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$
5. ถ้า $F \in \overleftrightarrow{AB} - D$, $G \in \overleftrightarrow{AB} - D$ และ $F \neq G$ แล้ว $\overleftrightarrow{FG} \cap \overleftrightarrow{AB} \neq \phi$ นั่นคือ $\overleftrightarrow{FG}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{AB}$
6. ทฤษฎี 5.3 ถ้า $F \in \overleftrightarrow{AB} - D$, $G \in \overleftrightarrow{AB} - D$ และ $F \neq G$ แล้ว $\overleftrightarrow{FG} \subset \overleftrightarrow{AB} - D$
7. $\overleftrightarrow{AB} - D = \overleftrightarrow{BD} - A = \overleftrightarrow{DA} - B = \overleftrightarrow{AD} - B = \overleftrightarrow{DB} - A = \overleftrightarrow{BA} - D$, เรียกว่า ระนาบ ABD
8. ทฤษฎี 5.4
9. ทฤษฎี 5.5
10. ทฤษฎี 5.6 ถ้า $\overleftrightarrow{FG}$ และ $\overleftrightarrow{RS}$ เป็นเส้นบนระนาบ ABD และ $\overleftrightarrow{FG} \neq \overleftrightarrow{RS}$ เป็นจุดจุดเดียวเท่านั้น

5.3 สัจพจน์สำหรับปริภูมิโพรเจกทีฟ

สัจพจน์ข้อ 1 ถึงข้อ 5 เป็นรากฐานของการมีอยู่ของระนาบโพรเจกทีฟและยังเป็นหลักสำคัญของการพิสูจน์คุณสมบัติบางประการของรูปในระนาบโพรเจกทีฟซึ่งอธิบายแล้วในหัวข้อ 5.2 นอกจากนี้ยังมีสัจพจน์ที่จำเป็นต่อการพิจารณาคุณสมบัติต่าง ๆ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสัจพจน์ที่จะใช้พิสูจน์การมีอยู่ของปริภูมิโพรเจกทีฟเพื่อจะกำกัดให้ปริภูมิโพรเจกทีฟเป็นจักรวาลของการศึกษาเรขาคณิตโพรเจกทีฟ

P-7 จุดทั้งหมดไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน

ถ้า ABD เป็นระนาบแล้วโดย P-7 จะมีจุด H ซึ่ง H ε ABD และจากทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่าแต่ละจุดของ ABD กับ H กำหนดเส้นขึ้นเส้นหนึ่ง จุดทั้งหมดบนเส้นที่กำหนดโดย H และจุดของระนาบ ABD จะกำหนด **ปริภูมิ 3 มิติ** ABD - H อาจเขียนว่า ปริภูมิ ABDH

การศึกษารูปเรขาคณิตในปริภูมิโพรเจกทีฟนั้นจำเป็นต้องระมัดระวังอย่างยิ่งในการพิสูจน์คุณสมบัติ 6 ประการ ซึ่งเขียนไว้เป็นทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 5.7 ถ้าจุดสองจุดของเส้นหนึ่งอยู่ในปริภูมิสามมิติแล้วทุกจุดของเส้นอยู่ในปริภูมิสามมิติ

ทฤษฎี 5.8 ถ้าจุดสามจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นเดียวกันของระนาบระนาบหนึ่งอยู่ในปริภูมิสามมิติแล้ว ทุก ๆ จุดของระนาบอยู่บนปริภูมิสามมิติ

ทฤษฎี 5.9 ปริภูมิสามมิติกำหนดโดยจุดใด ๆ สี่จุดที่ไม่ได้อยู่ร่วมระนาบเดียวกัน

ทฤษฎี 5.10 เส้นเส้นหนึ่งและระนาบระนาบหนึ่งในปริภูมิสามมิติต้องมีจุดร่วมกันอย่างน้อยหนึ่งจุด

ทฤษฎี 5.11 ระนาบใด ๆ ที่ต่างกันสองระนาบ ในปริภูมิสามมิติมีเส้นร่วมกันเพียงเส้นเดียวเท่านั้น

ทฤษฎี 5.12 ระนาบสามระนาบใด ๆ ในปริภูมิสามมิติมีจุดร่วมกันอย่างน้อยหนึ่งจุด

(การพิสูจน์ทฤษฎี 5.7-5.12 เป็นกิจกรรมการเรียน)

จากสัจพจน์ P-1 ถึง P-7 ทำให้สามารถขยายความคิดไปสู่ปริภูมิ 4 มิติ และ n มิติ สำหรับจำนวนเต็มบวกใด ๆ $n > 3$

E - 1 จุดทั้งหมดไม่ได้อยู่ในปริภูมิสามมิติเดียวกัน

ถ้า ABCD เป็นปริภูมิ 3 มิติแล้ว E - 1 ทำให้ได้ว่าจะมีจุดหนึ่งจุด $E \notin ABCD$ ซึ่งจุดทั้งหมดบนเส้นตรงทั้งหลายที่กำหนดโดยจุด E และจุดแต่ละจุดของปริภูมิ ABCD นิยามว่าเป็นปริภูมิ 4 มิติ ABCDE

E - 2 จุดทั้งหมดไม่อยู่ในปริภูมิ 4 มิติ เดียวกัน

ถ้า ABCDE เป็นปริภูมิ 4 มิติแล้ว E - 2 ทำให้ได้ว่าจะมีจุดหนึ่งจุด $F \notin ABCDE$ ซึ่งจุดทั้งหมดบนเส้นตรงทั้งหลายที่กำหนดโดยจุด E และจุดแต่ละจุดของปริภูมิ ABCDE นิยามว่าเป็นปริภูมิ 5 มิติ ABCDEF

กระบวนการนี้กระทำต่อเนื่องไปไม่สิ้นสุดพบว่าการศึกษาถึงปริภูมิ n มิติ ($n > 3$) มีการนำไปประยุกต์ใช้ได้มากมายแต่ในที่นี้จะกำกัดจักรวาลหรือกรอบอ้างอิงเพียงปริภูมิสามมิติ

สัจพจน์ต่อไปนี้เรียกว่าเป็น**สัจพจน์ของการปิด**

P-8 จุดทั้งหมดอยู่ในปริภูมิสามมิติเดียวกัน

P 1.1 - P 1.7 ในหัวข้อ 2.3 ทำให้ได้ว่า P-1 ถึง P-6 สอดคล้องด้วย แท้จริงแล้วเรขาคณิต 7 จุด 7 เส้นเป็นเรขาคณิตจำกัดบนระนาบโพรเจกทีฟ เช่น ในการศึกษาเกี่ยวกับเรขาคณิตจำกัดในหัวข้อ 2.3 เป็นหลักประกันว่า ภายใต้ P-1 ถึง P-8 จะมีอย่างน้อย 15 จุด 15 ระนาบ และ 35 เส้น

กิจกรรมการเรียนที่ 5.3

จากสัจพจน์ P-1 ถึง P-7 จงพิสูจน์ว่าสำหรับปริภูมิสามมิติ ABD-H ที่กำหนดให้นั้น

1. มีอย่างน้อย 15 จุด

2. ถ้า $F \in ABD - H$ และ $G \in ABD-H$ แล้ว $\overleftrightarrow{FG} \cap ABD \neq \phi$; นั่นคือ ถ้า $\overleftrightarrow{FG}$ เป็นเส้นใด ๆ ซึ่งจุด F และ G อยู่ในปริภูมิสามมิติ ABD-H แล้ว $\overleftrightarrow{FG}$ บรรจุอย่างน้อยหนึ่งจุดของระนาบ ABD
3. ทฤษฎี 5.7 ถ้า $F \in ABD-H$ และ $G \in ABD-H$ แล้ว $\overleftrightarrow{FG} \subset ABD-H$ นั่นคือถ้าจุดสองจุดของเส้นเส้นหนึ่งอยู่ในปริภูมิสามมิติแล้วทุกจุดของเส้นนี้อยู่ในปริภูมิสามมิติ
4. ทฤษฎี 5.8 ถ้า $\{R,S,T\}$ ABD-H และ $T \in \overleftrightarrow{RS}$ แล้วระนาบ RST เป็นเซตย่อยของ ABD-H นั่นคือถ้าจุดสามจุดที่ไม่ได้อยู่ในเส้นเดียวกันบนระนาบอยู่ในปริภูมิสามมิติแล้วทุกจุดของระนาบอยู่ในปริภูมิสามมิติ

5.4 **ทวิภาวะ** (Duality)

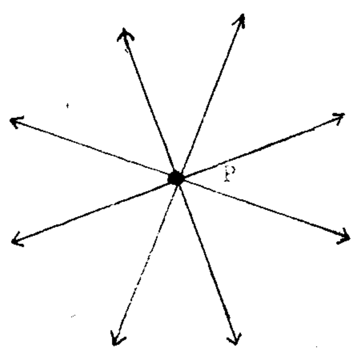
ได้กล่าวมาแล้วว่าเซตของจุดเป็นรูปเรขาคณิต เส้นเป็นเซตของจุดเซตย่อย ใด ๆ ของเส้นและเซตใด ๆ ของจุดบนเส้นตรงเป็น line figure **ระนาบเป็นเซตของจุด เซตย่อยใด ๆ ของระนาบและเซตใด ๆ ของจุดเซตใด ๆ ของเส้นบนระนาบเป็นรูปแบน** (plane figure) **ปริภูมิสามมิติซึ่งเป็นจักรวาลของการศึกษาเรขาคณิตโพรเจกทีฟขณะนี้เป็นเซตของจุด เซตย่อยใด ๆ ของปริภูมิและเซตใด ๆ ของจุด เส้นและระนาบเป็นรูปในปริภูมิ** (Space figure)

บนระนาบใดก็ตามมีการสมนัยระหว่างจุดและเส้นซึ่งอาจสังเกตได้จากการเปรียบเทียบประพจน์หรือข้อความ สองข้อความ เช่น

รูปบนระนาบที่ประกอบด้วยเซตของจุดทั้งหลายที่เรียงกันอยู่บนเส้น m เรียก ว่า **ระบบจุดอิงสองจุด** (pencil of points) ซึ่งมี m เป็นแกน

รูป 5.11

รูปบนระนาบที่ประกอบด้วยเซตของเส้นทั้งหลายที่อยู่บนจุด P เรียกว่า **ระบบเส้นตรงอิงสองเส้น** (pencil of lines) ซึ่งมี P เป็นจุดศูนย์กลาง



รูป 5.12

ซึ่งก่อนที่จะศึกษาถึงทวิภาวะในระนาบ planar duality นั้นจำเป็นที่จะต้องทำความเข้าใจความหมายของทวิภาวะก่อน ดังนี้

การที่ประพจน์หนึ่งได้มาจากอีกประพจน์หนึ่งโดยการสลับที่ของสมาชิกคู่ใดคู่หนึ่ง เช่นนี้แสดงว่ามีทวิภาวะเกิดขึ้น หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งจะได้ว่าประพจน์ทั้งสองเป็นคู่เสมอกัน (dual) ซึ่งกันและกันประพจน์ที่เกิดขึ้นนี้ จะต้องเป็นจริงหรือสมเหตุสมผลด้วยจึงจะถือว่ามีทวิภาวะเกิดขึ้น

นั่นคือ ทวิภาวะจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ

1. มีการสลับที่ของสมาชิกคู่หนึ่ง
2. ประพจน์ที่เกิดขึ้นใหม่ต้องสมเหตุสมผลด้วย

เช่น

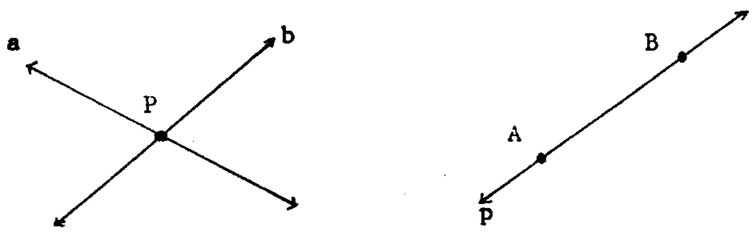
เส้นตรงสองเส้นกำหนดจุดจุดหนึ่ง (จริง)

จุดสองจุดกำหนดเส้นตรงเส้นหนึ่ง (จริง)

เช่นนี้ แสดงว่ามีทวิภาวะเกิดขึ้น

ทวิภาวะเป็นได้ 3 สถานะ คือ

1. เกิดขึ้นระหว่างประพจน์กับประพจน์ เช่น
   ก. บนจุดสองจุดที่ต่างกันมีเส้นเพียงเส้นเดียวและเส้นเดียวเท่านั้น
   ข. บนเส้นสองเส้นที่ต่างกันมีจุดเพียงจุดเดียวและจุดเดียวเท่านั้นอีกตัวอย่างหนึ่งคือ
   ก. จุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันกำหนดระนาบระนาบหนึ่ง
   ข. ระนาบสามระนาบที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันกำหนดจุดจุดหนึ่ง
2. เกิดขึ้นระหว่างรูปกับรูป เช่น



รูป 5.13

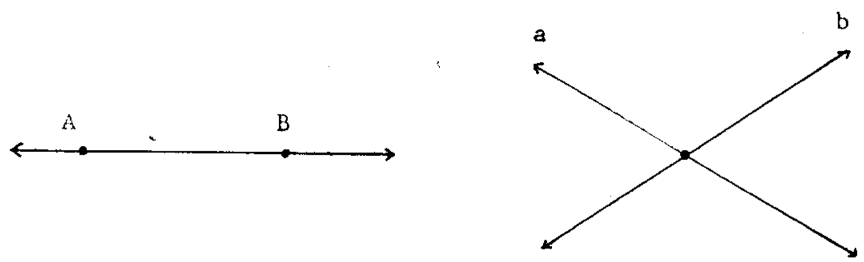
3. เกิดขึ้นระหว่าง การกระทำ (operation) กับการกระทำ

ทวิภาวะมี 3 แบบ

1. เกิดจากการสลับที่ระหว่างเส้นกับจุด แบบนี้มีชื่อเรียกว่า plane duality หรือบางทีก็เรียกว่า planar duality เป็นการที่ประพจน์หนึ่งได้มาจากอีกประพจน์หนึ่งโดยการสลับที่ของจุดกับเส้นคือ เส้นเป็นจุด จุดเป็นเส้น ประพจน์ทั้งสองเรียกว่าเป็น plane dual ซึ่งกันและกัน

"บนจุดสองจุดสองจุดที่ต่างกันมีเส้นเพียงเส้นเดียวและเส้นเดียวเท่านั้น" เมื่อสลับที่ระหว่างจุดกับเส้นจะได้ประพจน์ใหม่เป็น

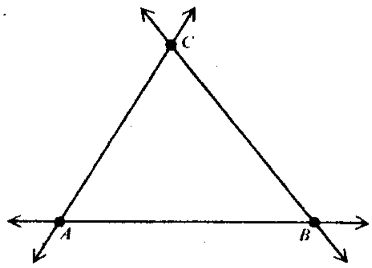
"บนเส้นสองเส้นที่ต่างกันมีจุดเพียงจุดเดียวและจุดเดียวเท่านั้น" ประพจน์ทั้งสองแสดงได้ดังรูป



รูป 5.14

จากรูปจะเห็นว่าบนระนาบถ้า A และ B เป็นจุดสองจุดที่ต่างกันแล้วจะมีเส้นเพียงเส้นเดียวเท่านั้น $\overleftrightarrow{AB}$ บนทั้ง A และ B บนระนาบถ้า a และ b เป็นเส้นสองเส้นที่ต่างกันแล้วจะมีจุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น คือ $a \cap b$ บนทั้ง a และ b

จุด A,B และ C ซึ่งอยู่บนระนาบเดียวกันแต่ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน กำหนดเส้นขึ้นสามเส้น $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ และ $\overleftrightarrow{AC}$ ดังรูป



รูป 5.15

จุดสามจุดและเส้นสามเส้นประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมหนึ่ง รูป plane dual ของประพจน์นี้คือ

"เส้นสามเส้น a,b และ c ซึ่งอยู่บนระนาบเดียวกันแต่ไม่อยู่บนจุดเดียวกัน กำหนดจุดสามจุดได้แก่ $a \cap b$, $b \cap c$ และ $a \cap c$ เส้นสามเส้นและจุดสามจุดกำหนดรูปสามเหลี่ยมขึ้นรูปหนึ่ง

อาจเรียก plane dual ของรูปสามเหลี่ยมว่ารูปสามด้าน (a trilateral) เพื่อย้ำว่าเราเริ่มด้วยเส้นสามเส้นแทนที่จะเริ่มด้วยจุดสามจุด แต่ไม่ว่าจะกล่าวอย่างไรรูปที่เกิดขึ้นก็ยังคงเป็นรูปสามเหลี่ยมเสมอ กรณีที่เกิดขึ้นนี้กล่าวได้ว่า รูปสามเหลี่ยมเป็น self-dual บนระนาบ คุณสมบัติข้อนี้จะใช้เมื่อพิจารณา plane dual ของ P-6 ในที่สุดจะพบว่ามีประโยชน์อย่างยิ่งที่จะเน้นบทบาทของจุดและเส้นโดยพิจารณา P-6 ในรูปของ

บนระนาบใด ๆ ถ้าลากเส้น m ผ่านจุดจุดหนึ่งบนด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมและผ่านจุดจุดหนึ่งบนด้านที่สองของรูปสามเหลี่ยมโดยไม่ผ่านจุดยอดแล้วเส้น m จะผ่านจุดซึ่งอยู่บนด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมนี้

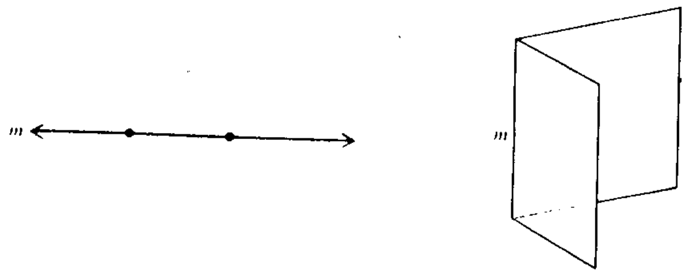
นอกจากนี้ยังสามารถแสดงว่า plane dual ของแต่ละสัจพจน์เป็นจริง และ plane dual ของทฤษฎีต่าง ๆ เป็นจริงด้วย

2. ทวิภาวะที่เกิดจากการเปลี่ยนที่กันระหว่างจุดกับระนาบมีชื่อเรียกว่า **Space duality** เช่น ประพจน์สองประพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

"จุดสองจุดที่ต่างกันกำหนดเส้นตรงเส้นเดียวเท่านั้น"

"ระนาบสองระนาบที่ต่างกันกำหนดเส้นตรงเส้นเดียวเท่านั้น"

ประพจน์ทั้งสองแสดงถึง **principle of space duality**



รูป 5.16

ประพจน์ใดที่เป็นจริงโดยที่ประพจน์นั้นกล่าวถึงการมีอยู่และการตกกระทบของจุด เส้นและระนาบในปริภูมิโพรเจกทีฟทำให้เกิดประพจน์ที่เป็นจริงอีกประพจน์หนึ่งโดยการเปลี่ยนที่กันระหว่าง "จุด" และ "ระนาบ" โดยที่เส้นยังคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลง ประพจน์ทั้งสองเรียกว่าเป็น space dual ซึ่งกันและกัน

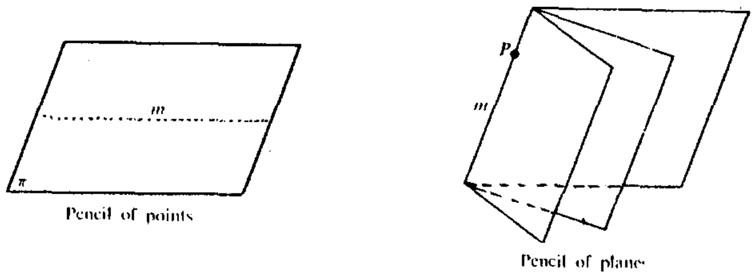
เมื่อประพจน์หนึ่งเกิดจากอีกประพจน์หนึ่งโดยการเปลี่ยนที่กันระหว่าง "จุด" และ "ระนาบ" เรียกว่าประพจน์หนึ่งเป็น space dual ของอีกประพจน์หนึ่ง เช่น

เซตของจุดและเส้นบนระนาบเป็น plane figure กับ เซตของระนาบและเส้นบนจุดเป็น point fugure

ความคิดรวบยอดของ a point figure ทำให้ทราบว่านิยามของระบบจุดอิงสองจุด และ ระบบเส้นตรงอิงสองเส้น เป็น space dual ซึ่งกันและกัน คือ

บนระนาบ π เซตของจุดทั้งหมดบนเส้น m เป็น ระบบจุดอิงสองจุดซึ่งมีแกน m

บนจุด P เซตของระนาบทั้งหมดบนเส้น m เป็นระบบระนาบอิงสองระนาบมีแกน m

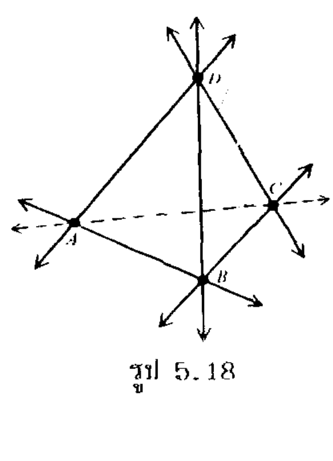


รูป 5.17

เช่นเดียวกันกับ planar duality space dual ของแต่ละสัจพจน์และแต่ละทฤษฎีเป็นจริงและ principle of space duality ไม่จำเป็นต้องเขียนไว้เป็นสัจพจน์

ในการศึกษาเรื่องราวของ space dual นั้นพบว่ามีรูปในปริภูมิที่เป็น self-dual เช่น "จุด 4 จุดได้แก่ A,B,C และ D ซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกำหนดเส้นขึ้น 6 เส้น $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, และ $\overleftrightarrow{CD}$ กับระนาบ 4 ระนาบ BCD,ACD,ABD และ ABC **จุดสี่จุด เส้นหกเส้นและระนาบสี่ระนาบนี้ประกอบกันขึ้นเป็นทรงสี่หน้า (tetrahedron)"**

space dual ของประพจน์นี้คือ ระนาบ 4 ระนาบ α,β,γ และ σ ซึ่งไม่อยู่บนจุดเดียวกันกำหนดเส้น 6 เส้น $\alpha \cap \beta, \alpha \cap \gamma, \alpha \cap \sigma, \beta \cap \gamma, \beta \cap \sigma$ และ $\gamma \cap \sigma$ และจุดสี่จุด $\beta \cap \gamma \cap \sigma$, $\alpha \cap \gamma \cap \sigma, \alpha \cap \beta \cap \sigma$, และ $\alpha \cap \beta \cap \gamma$; ระนาบสี่ระนาบเส้น 6 เส้น และจุดสี่จุดประกอบเป็นทรงสี่หน้า เราอาจใช้ชื่อเดียวกันสำหรับ space dual figure เนื่องจากจะได้เซตของจุดเซตเดียวกัน รูปรูปเดียวกัน เช่นเราอาจให้ α = BCD, β = ACD, γ = ABD, α = ABC, $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{CD}$, $\alpha \cap \gamma = \overleftrightarrow{BD}$ ฯลฯ ดังรูป



รูป 5.18

3. ทวิภาวะที่เกิดจากการเปลี่ยนที่กันระหว่างระนาบกับเส้นมีชื่อเรียกว่า Bundle Duality

กิจกรรมการเรียนที่ 5.4

1. จงเขียนประพจน์ที่เป็น plane dual ของสัจพจน์ต่อไปนี้

1) P - 1	2) P - 2	3) P - 3
4) P - 4	5) P - 5	6) P - 6

2. จงเขียนประพจน์ที่เป็น plane dual ของทฤษฎี

1) 5 - 1	2) 5 - 4	3) 5 - 6

3. จงเขียนประพจน์ที่เป็น space dual ของสัจพจน์

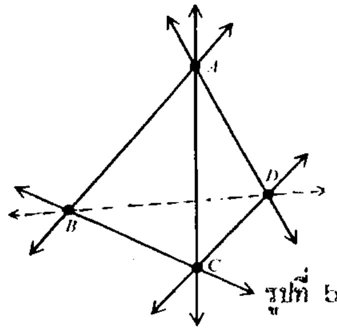
1) P - 1	2) P - 2	3) P - 3
4) P - 4	5) P - 5	6) P - 6
7) P - 7	8) P - 8	

4. จงเขียนประพจน์ที่เป็น space dual ของทฤษฎี

1) 5.1	2) 5.2	3) 5.3
4) 5.4	5) 5.5	6) 5.6
7) 5.7	8) 5.8	9) 5.9
10) 5.10	11) 5.11	12) 5.12

5.5 ภาคตัด (Sections)

ถ้า F เป็นรูปในปริภูมิ เช่นเซตของจุด เส้น และระนาบ ให้ P เป็นจุดใด ๆ ซึ่งไม่ได้เป็นจุดของ F ไม่อยู่บนเส้นของ F และไม่อยู่บนระนาบของ F แล้ว แต่ละจุดของ F กับจุด P จะกำหนดเส้นเส้นหนึ่ง แต่ละเส้นของ F กับจุด P กำหนดระนาบระนาบหนึ่ง เซตของเส้นและเซตของระนาบเป็น point section ของ F โดยจุด P



รูปที่ 5.19

เมื่อกำหนด point section จะไม่คำนึงถึงระนาบของ F เพราะว่าทุกระนาบของ F ในปริภูมิกำหนดด้วยจุด P เท่านั้นตัวอย่างเช่นให้ F เป็นทรงสี่หน้า ABCD ดังรูป 5.19 ประกอบด้วย

จุด 4 จุด : A,B,C,D;

เส้นตรง 6 เส้น : $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{CD}$; และ

ระนาบ 4 ระนาบ : ABC, ABD, ACD, BCD

point section ของ F โดยจุด P ซึ่งไม่ได้เป็นจุดของ F ไม่ได้อยู่บนเส้นของ F และไม่อยู่บนระนาบของ F ประกอบด้วย

เส้น 4 เส้น : $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$, $\overleftrightarrow{PD}$; และ

ระนาบ 6 ระนาบ : PAB, PAC, PAD, PBC, PBD และ PCD

space dual ของ point section เป็น plane section

plane section ของทรงสี่หน้า ABCD ตามรูป 5.19 โดยระนาบ β ซึ่งไม่ได้เป็นระนาบของ F ไม่อยู่บนเส้นของ F และไม่อยู่บนจุดของ F ประกอบด้วย

จุด 6 จุด : $\beta \cap \overleftrightarrow{AB}$, $\beta \cap \overleftrightarrow{AD}$, $\beta \cap \overleftrightarrow{BC}$, $\beta \cap \overleftrightarrow{BD}$, $\beta \cap \overleftrightarrow{CD}$; และ

เส้น 4 เส้น : $\beta \cap$ ABC, $\beta \cap$ ABD, $\beta \cap$ ACD และ

$\beta \cap$ BCD

สังเกตว่าเมื่อสร้าง plane section นั้นจะไม่คำนึงถึงจุดของ F เนื่องจากทุกจุดของ F ในปริภูมิกำหนดโดย β

ถ้าให้ F เป็นรูปในปริภูมิ ใด ๆ และให้ p เป็นเส้นตรงใด ๆ ซึ่งไม่ใช่เส้นของ F ไม่ใช่จุดของ F และไม่อยู่บนระนาบของ F แล้วแต่ละจุดของ F กับเส้น p กำหนดระนาบขึ้นระนาบหนึ่งและแต่ละระนาบของ F กับเส้น p กำหนดจุดจุดหนึ่งเซตของระนาบและเซตของจุดเป็น line section ของ F ด้วยเส้น p

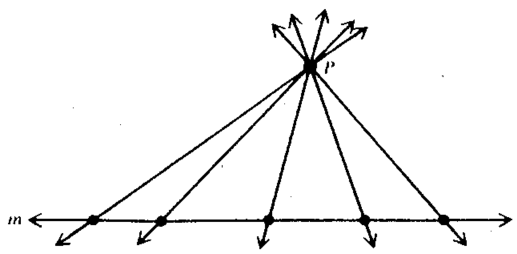
line section ของทรงสี่หน้า ABCD ในรูป 5.19 โดยเส้น p ที่ไม่ผ่านจุดของ F ไม่ใช่เส้นของ F และไม่ได้อยู่บนระนาบของ F ประกอบด้วย

ระนาบ 4 ระนาบ : pA, pB, pC, pD และ

จุด 4 จุด : $p \cap ABC$, $p \cap ABD$, $p \cap ACD$, และ $p \cap BCD$

เมื่อสัญลักษณ์ pA แทนระนาบที่กำหนดด้วยเส้น p และจุด A

สังเกตว่าเมื่อสร้าง line section จะไม่คำนึงถึงเส้นตรงทั้งหลายของ F เนื่องจากแต่ละเส้นของ F ในปริภูมิกำหนดโดย p



รูปที่ 5.20

สามารถสร้าง point sections และ line sections ของรูปแบนบนระนาบนั้น point section ของรูป F โดยจุด P ซึ่งไม่เป็นจุดของ F เป็นเซตของเส้นและเป็นเส้นซึ่งกำหนดโดยจุด P และจุดของ F

line section ของรูปแบนเป็น plane dual ของ point section กล่าวอีกอย่างหนึ่งคือบนระนาบนั้น line section ของรูป F โดยเส้น p ซึ่งไม่ได้เป็นเส้นของ F เป็นเซตของจุดซึ่งเกิดจากการตัดกันของเส้น p กับเส้นของ F

อาจมองรูป 5.20 ว่าเป็น line section ของระบบเส้นตรงอิงสองเส้น (pencil of lines) ซึ่งมีจุด P เป็นจุดศูนย์กลางโดยเส้น m

สังเกตว่าบนระนาบนั้นภาคตัดของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นโดยเส้น m ที่ซึ่งไม่ใช่เส้นในระบบเส้นตรงอิงสองเส้นเป็นระบบจุดอิงสองจุด (pencil of points) มี m เป็นแกน

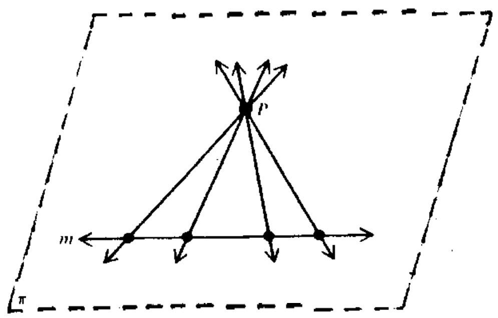
ภาคตัดของระบบจุดอิงสองจุดโดยจุด P ซึ่งไม่ได้เป็นจุดในระบบจุดอิงสองจุดเป็นระบบเส้นตรงอิงสองเส้นที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด P

สามารถนำหลักเบื้องต้นของ planar duality และ space duality มาใช้อย่างมีประสิทธิภาพทั้งนี้ต้องระมัดระวังเมื่อจะให้คำจำกัดความ นิยาม หรืออธิบายเงื่อนไขของการตกกระทบ (incidence) เพื่อให้เข้าใจดียิ่งขึ้นให้พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ภาคตัดของระบบจุดอิงสองจุดบนแกน m โดยจุด P ซึ่งไม่ได้เป็นจุดของระบบจุดอิงสองจุดเป็นระบบเส้นตรงอิงสองเส้นซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ P (รูปที่ 5.20)

ถ้าเขียน plane dual หรือ space dual ของประโยคนี้จำเป็นต้องอาศัยความจริงที่ว่า m และ p อยู่ร่วมระนาบเดียวกัน เมื่อเขียนประโยคที่กำหนดให้นี้ใหม่ในพจน์ของการตกกระทบของจุด เส้น และระนาบจะเป็นดังนี้

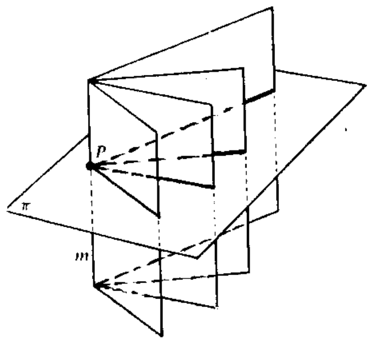
ข้อความ ภาคตัดของระบบจุดอิงสองจุด ซึ่งอยู่บนระนาบ π และอยู่บนเส้น m โดยจุด P ซึ่งอยู่บนระนาบ π แต่ไม่อยู่บนเส้น m เป็นระบบเส้นตรงอิงสองเส้นซึ่งอยู่บนระนาบ π และอยู่บนจุด P (รูปที่ 5.21)



รูปที่ 5.21

Plane dual ของข้อความที่กำหนดให้ : ภาคตัดของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นซึ่งอยู่บนระนาบ π และอยู่บนจุด M โดยเส้น p ซึ่งอยู่บนระนาบ π แต่ไม่อยู่บนจุด M เป็นระบบจุดอิงสองจุด ซึ่งอยู่บนระนาบ π และอยู่บนเส้น p

Space dual ของข้อความที่กำหนดให้ : ภาคตัดของระบบระนาบอิงสองระนาบซึ่งอยู่บนจุด P และอยู่บนเส้น m โดยระนาบ π ซึ่งอยู่บนจุด P แต่ไม่ได้อยู่บนเส้น m เป็นระบบเส้นตรงอิงสองเส้นซึ่งอยู่บนจุด P และอยู่บนระนาบ π (รูปที่ 5.22)



รูปที่ 5.22

Space dual ของ plane dual ของข้อความ : ภาคตัดของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นซึ่งอยู่บนจุด P และบนระนาบ π โดยเส้น m ซึ่งอยู่บนจุด P แต่ไม่อยู่บนระนาบ π เป็นระบบระนาบอิงสองระนาบ ซึ่งอยู่บนจุด P และอยู่บนเส้น m (รูปที่ 5.22)

กิจกรรมการเรียนที่ 5.5

1. จงเขียนข้อความที่เป็น space dual ของ "ถ้า F เป็นรูปในปริภูมิเช่นเซตของจุดเส้นและระนาบให้ P เป็นจุดใด ๆ ซึ่งไม่ได้เป็นจุดของ F ไม่อยู่บนเส้นของ F และไม่อยู่บนระนาบของ F แล้ว แต่ละจุดของ F กับจุด P กำหนดเส้นเส้นหนึ่ง แต่ละเส้นของ F กับจุด P กำหนดระนาบระนาบหนึ่ง เซตของเส้นและเซตของระนาบเป็น point scetion ของ F โดยจุด P"

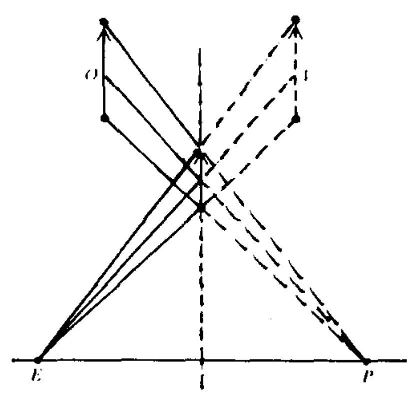
2. จงเขียนรูปสามเหลี่ยม ABC และ point section ของ ΔABC โดยจุด P ซึ่ง P เป็นจุดซึ่ง
   2.1 อยู่บนระนาบ ABC
   2.2 ไม่อยู่บนระนาบ ABC
3. จงเขียนรูปสามเหลี่ยม RST และ
   3.1 line section F ของ ΔRST โดยเส้น p ซึ่ง p อยู่บนระนาบ RST
   3.2 point section ของ line section F
4. จงเขียนรูปสามเหลี่ยม UVM และระนาบ UVM จงเขียนรูป
   4.1 point section G ของ ΔUVM โดยจุด P
   4.2 line section ของ G

5.6 รูปเพอร์สเปกทีฟ (Perspective Figures)

เมื่อพิจารณาภาพของสิ่งต่าง ๆ ที่แวดล้อมตัวเราพบว่าส่วนสัดที่ปรากฏแก่สายตามีลักษณะที่ของไกลเห็นเล็ก ของใกล้เห็นใหญ่ หรือเมื่อดูภาพเหมือนที่จิตรกรวาดไม่ว่าจะเป็นภาพทิวทัศน์หรือ ภาคคน สัตว์ สิ่งของ ฯลฯ พบว่าจิตรกรมีวิธีเขียนภาพให้ได้ส่วนสัดอย่างที่เห็นด้วยตาจริงเรียกภาพที่มีลักษณะเช่นนี้ว่ารูปเพอร์สเปกทีฟ

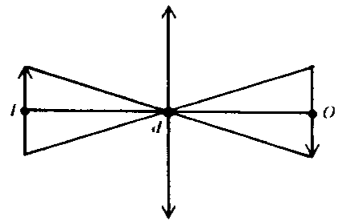
พิจารณาวัตถุ O ว่าเป็นเซตของจุด (รูปที่ 5.23) แต่ละจุดของวัตถุ O และจุดที่สมนัยกันของภาพของวัตถุที่ปรากฏในกระจกซึ่งจะเรียกว่าภาพ M ปรากฏในระนาบของกระจกเงาอยู่บนเส้นเส้นหนึ่ง (ไพรเจกเตอร์) มี P เป็นจุด ๆ หนึ่งบนเส้นนี้ด้วยโดยจุด P อยู่อีกด้านหนึ่งของกระจกเงานั่นคือจุด P อยู่ในทางตรงข้ามกับผู้สังเกต E ลักษณะเช่นนี้กล่าวได้ว่าวัตถุและภาพ M ที่ปรากฏเป็นเพอร์สเปกทีฟกันเมื่อเทียบกับจุด P ทำนองเดียวกันแต่ละจุดของภาพ V ที่มีรูปร่างเหมือนวัตถุ O ทุกประการอยู่ด้านหลังกระจกเงากับจุดที่สมนัยกันของภาพ M อยู่บนเส้นเดียวกันนี้และมีจุด E เป็นจุดที่แสดงตำแหน่งดวงตาของผู้สังเกตดังนี้ V และ M ที่ปรากฏขึ้นเป็นเพอร์สเปกทีฟกันเมื่อเทียบกับจุด E

ในการศึกษาเรื่องราวของแสงพบว่าจุด P และดวงตา E ของผู้สังเกตอยู่ห่างจากระนาบของกระจกเงาเป็นระยะเท่ากันจากระนาบ และเส้น PE ตั้งฉากกับระนาบของกระจกเงา



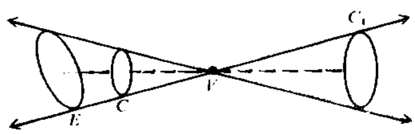
รูปที่ 5.23

รูปเพอร์สเปกทีฟที่สามารถอธิบายได้โดยหลักการเดียวกันนี้ได้แก่ ภาพ I บนฟิล์มเนกาทีฟในกล้องถ่ายภาพรูเข็ม และภาพของวัตถุ O เป็นเพอร์สเปกทีฟกันเมื่อเทียบกับรูเข็ม P เนื่องจากจุดสมนัยอยู่บนเส้นที่ผ่าน P (รูปที่ 5.24)



รูปที่ 5.24

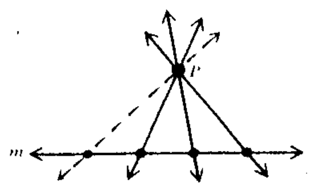
การสมนัยกันระหว่างภาคตัดกรวยปกติเช่น วงรี พาราโบลาและไฮเพอร์โบลาเป็นการสมนัยแบบเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับจุดยอด V ของกรวยเมื่อพิจารณาโดยรวมจุดในจินตนาการเข้าไว้ด้วย การสมนัยนี้อธิบายได้ด้วยรูปวงกลมและรูปวงรี ดังรูป 5.25 วงกลม C เป็นเพอร์สเปกทีฟกับวงกลม C_1 เมื่อเทียบกับจุด V เช่นเดียวกันกับที่วงกลม C เป็นเพอร์สเปกทีฟกับรูปวงรี E เมื่อเทียบกับจุด V เพราะในแต่ละกรณีมีการสมนัยของจุดบนเส้นที่ผ่าน V



รูปที่ 5.25

ภาวะเพอร์สเปกทีฟระหว่างวงกลมและวงรี (รูปที่ 5.25) ทำให้ทราบว่ารูปเพอร์สเปกทีฟไม่จำเป็นต้องมีรูปร่างเหมือนกัน อย่างไรก็ตามรูปเพอร์สเปกทีฟก็ยังต้องมีคุณสมบัติบาง

สิ่งที่ยังคงอยู่ อาจมองว่าเรขาคณิตโพรเจกทีฟเป็นการศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติยืนยงเหล่านี้ขณะที่ขนาด รูปร่าง ระยะทางและมุมเปลี่ยนไปจากเดิม พบว่าในเรขาคณิตโพรเจกทีฟนั้นความสัมพันธ์ของการตกกระทบ การมีอยู่และคุณสมบัติอีกสองสามประการยังคงไว้ไม่เปลี่ยนแปลงซึ่งคุณสมบัติเหล่านี้พอเพียงที่จำทำให้สามารถบันทึกภาพไว้ได้



รูปที่ 5.26

line section โดยเส้น m ของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นมีจุดศูนย์กลาง P ซึ่ง $P \notin m$ เป็นระบบจุดอิงสองจุดมี m เป็นแกน (รูปที่ 5.26)

แต่ละเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นตัดกับ m เป็นจุดเรียกว่า **เทรซ** (trace) ของเส้นบน m เส้นที่แตกต่างกันมีเทรซต่างกันการสมนัยระหว่างเส้นและเทรซของเส้นนั้นเป็นการสมนัยระหว่างเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นกับจุดของระบบจุดอิงสองจุด เรียกการสมนัยเช่นนี้ว่าระบบเส้นตรงอิงสองเส้นกับระบบจุดอิงสองจุดเป็น**เพอร์สเปกทีฟ**

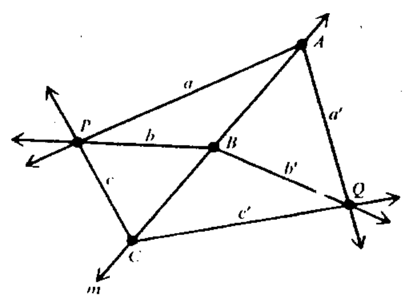
จุดของระบบจุดอิงสองจุดและเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นเป็น**เพอร์สเปกทีฟ** เพราะมีการสมนัยระหว่างจุดและเส้นในลักษณะที่สมาชิกสองสมาชิกได้แก่จุด ๆ หนึ่งกับเส้น ๆ หนึ่งมีจุดของระบบจุดอิงสองจุดร่วมกันหนึ่งจุด การสมนัยนี้อาจอธิบายได้ด้วยการกล่าวว่า บนระนาบนั้น line section ของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นโดยเส้นเส้นหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นก่อให้เกิดภาวะเพอร์สเปกทีฟของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นและระบบจุดอิงสองจุดซึ่งแต่ละเส้นอยู่บนจุดที่สมนัยกัน

line section โดยเส้น m ของระบบระนาบอิงสองระนาบ m ไม่อยู่บนระนาบใดระนาบหนึ่งเป็นระบบจุดอิงสองจุดมี m เป็นแกนแต่ละระนาบของระบบระนาบอิงสองระนาบตัด

กับ m ที่จุด ๆ หนึ่งเรียกว่าเทรซของระนาบบน m ระนาบที่ต่างกันมีเทรซต่างกัน การสมนัยกันระหว่างระนาบของระบบระนาบอิงสองระนาบและจุดของระบบจุดอิงสองจุดเป็นการสมนัยกันแบบเพอร์สเปกทีฟเนื่องจากสมาชิกที่สมนัยกันสองสมาชิกใด ๆ ได้แก่ระนาบระนาบหนึ่งกับจุดอีกจุดหนึ่งมีจุดของระบบจุดอิงสองจุดร่วมกัน

plane section โดยระนาบ π ของระบบระนาบอิงสองระนาบกับแกน m ซึ่ง $m \cap \pi = P$ เป็นระบบเส้นตรงอิงสองเส้นมี P เป็นจุดศูนย์กลาง แต่ละระนาบของระบบระนาบอิงสองระนาบตัดกับระนาบ π เป็นเส้นตรงเรียกว่าเทรซของระนาบบน π ระนาบที่ต่างกันมีเทรซต่างกัน การสมนัยกันระหว่างระนาบของระบบระนาบอิงสองระนาบและเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นเป็นการสมนัยแบบเพอร์สเปกทีฟเนื่องจากสมาชิกสองสมาชิกใด ๆ ได้แก่ระนาบระนาบหนึ่งกับเส้นอีกเส้นหนึ่งมีเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นร่วมกัน

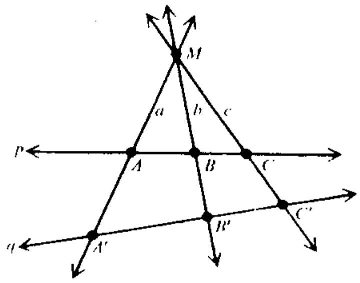
การสมนัยกันแบบเพอร์สเปกทีฟระหว่าง
ระบบจุดอิงสองจุด กับระบบจุดอิงสองจุด
ระบบเส้นตรงอิงสองเส้นกับระบบเส้นตรงอิงสองเส้น หรือ
ระบบระนาบอิงสองระนาบกับระบบระนาบอิงสองระนาบ
เป็นสิ่งที่เกิดขึ้นได้



รูปที่ 5.27

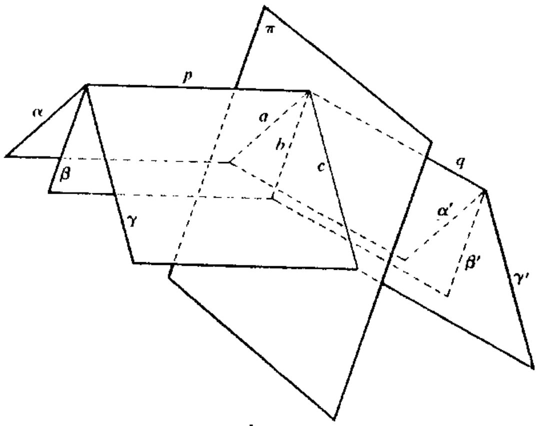
ในรูปที่ 5.27 เส้นแต่ละเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นมี P เป็นจุดศูนย์กลางมีเทรซบนเส้น m แต่ละเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นมีจุดศูนย์กลาง Q มีเทรซบนเส้น m แต่

ละจุดของ m เป็นเทรซของเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นที่มีศูนย์กลางที่ P และเป็นเทรซของเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นที่มีศูนย์กลางที่ Q ดังนั้นจุดบน m ทำให้เกิดพื้นฐานของการสมนัยกันระหว่างเส้นของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นสองระบบ เส้นสองเส้นสมนัยกันก็ต่อเมื่อเส้นทั้งสองมีเทรซเหมือนกันบน m **การสมนัยนี้เป็นการสมนัยกันแบบเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับเส้น m** (perspective correspondence with respect to the line m) **เนื่องจากสมาชิกสองสมาชิกที่สมนัยกันอันได้แก่เส้นบน P และบน Q มีจุดของเส้น m ร่วมกัน**



รูปที่ 5.28

รูปที่ 5.28 เป็น plane dual ของรูปที่ 5.27 และแสดงการสมนัยแบบเพอร์สเปกทีฟระหว่างระบบจุดอิงสองจุดสองระบบ แต่ละจุดของระบบจุดอิงสองจุดบนเส้น p กับจุด M กำหนดเส้นเส้นหนึ่งเรียกว่า**ไพรเจกเตอร์** (Projector) ของจุดบน M ในทำนองเดียวกันแต่ละจุดของระบบจุดอิงสองจุดบนเส้น q กับจุด M กำหนดเส้นเส้นหนึ่ง จุดที่ต่างกันบนระบบจุดอิงสองจุดระบบใดระบบหนึ่งมีไพรเจกเตอร์ต่างกัน จุดสองจุดของระบบจุดอิงสองจุดที่ต่างกันสมนัยกันก็ต่อเมื่อจุดทั้งสองเป็นไพรเจกเตอร์เดียวกันบน M **การสมนัยนี้เป็นการสมนัยแบบเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับจุด M เนื่องจากสมาชิกสองสมาชิกที่สมนัยกันได้แก่จุดบน p และจุดบน q มีเส้นบน M ร่วมกัน**



รูปที่ 5.29

รูปที่ 5.29 เป็น space dual ของรูปที่ 5.28 **เป็นรูปที่แสดงการสมนัยแบบเพอร์สเปกทีฟ**ระหว่างระบบระนาบอิงสองระนาบกับระบบระนาบอิงสองระนาบ แต่ละระนาบของระบบระนาบอิงสองระนาบบน p กับระนาบ π กำหนดเส้นตรงเส้นหนึ่งเรียกว่า**เทรซ** ของระนาบบน π ในทำนองเดียวกันระนาบแต่ละระนาบของระบบระนาบอิงสองระนาบบน q กับระนาบ π กำหนดเส้นเส้นหนึ่ง ระนาบที่ต่างกันของระบบระนาบอิงสองระนาบระบบใดระบบหนึ่งมีเทรซต่างกัน ระนาบสองระนาบของระบบระนาบอิงสองระนาบที่ต่างกัน ระนาบสองระนาบของระบบระนาบอิงสองระนาบที่ต่างกันสมนัยกันก็ต่อเมื่อระบบทั้งสองมีเทรซเดียวกันบนระนาบ π **การสมนัยนี้เป็นการสมนัยแบบเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับระนาบ π** เนื่องจากสมาชิกที่สมนัยกันสองสมาชิกได้แก่ระนาบบนเส้น p และระนาบบนเส้น q มีเส้นบน π ร่วมกัน

สัญลักษณ์ $\overset{}{\hat{=}}$ ใช้เพื่อแสดงว่ารูปสองรูปเป็นเพอร์สเปกทีฟกันในรูปที่ 5.29 เส้น a,b,c ของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นศูนย์กลางที่จุด P มีเทรซเหมือนกันเมื่อเทียบกับเส้น m และเส้น a',b',c' ของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นมีศูนย์กลางที่จุด Q กล่าวว่าเซตของเส้นสองเซตเป็นเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับเส้น m เขียนแทนด้วย

$$abc \overset{m}{\hat{=}} a'b'c'$$

สังเกตว่าอันดับของสมาชิกในข้อความของภาวะเพอร์สเปกทีฟแสดงการสมนัยของ a กับ a',b กับ b' และ c กับ c'

ในทำนองเดียวกันในรูปที่ 5.28 การสมนัยระหว่างจุดของเซตของจุดสองเซต แสดงด้วยเส้นที่ผ่าน M เซตสองของจุดสองเซตเป็นเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับจุด M และเขียนว่า

$$ABC \overset{M}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'$$

ในรูปที่ 5.29 การสมนัยระหว่างระนาบของเซตของระนาบสองเซต แสดงโดยเส้นบน π เซตของระนาบสองเซตเป็นเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับระนาบ π และเขียนแทนด้วย

$$\alpha\beta\gamma \overset{\pi}{\underset{\wedge}{=}} \alpha'\beta'\gamma'$$

โดยทั่ว ๆ ไปการสมนัยของจุด เส้น และระนาบของรูป F กับจุด เส้น และระนาบ เทียบกับรูป F' เป็น **ภาวะเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับจุดที่กำหนดให้** O $(F \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} F')$ ก็ต่อเมื่อ

1) การสมนัยเป็นแบบ 1 - 1
2) แต่ละคู่ของจุดที่สมนัยกันอยู่บนเส้นที่ผ่าน O และ
3) แต่ละคู่ของเส้นที่สมนัยกันอยู่บนระนาบที่ผ่าน O

ถ้า $F \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} F'$ แล้วจุด O เป็น

ศูนย์กลางของภาวะเพอร์สเปกทีฟ (center of perspectivity) สำหรับ F และ F' การสมนัยของจุด, เส้น และระนาบของรูป F กับจุดเส้นและระนาบเมื่อเทียบกับรูป F' เป็น **เพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับระนาบ π ที่กำหนดให้** $(F \overset{\pi}{\underset{\wedge}{=}} F')$ ก็ต่อเมื่อ

1) การสมนัยเป็นแบบ 1 - 1
2) แต่ละคู่ของระนาบ สมนัยกันอยู่บนเส้นบน π และ
3) แต่ละคู่ของเส้นสมนัยผ่านจุด ๆ หนึ่งบน π

ถ้า $F \overset{\pi}{\underset{\wedge}{=}} F'$, แล้วระนาบ π เป็นระนาบของภาวะเพอร์สเปกทีฟ (plane of perspectivity) **สำหรับ F และ F'**

เพื่อให้สอดคล้องกับนิยามของการสมนัยของจุดและเส้นของรูปแบน F กับจุด O และ

เทียบกับระนาบ F' เป็นเพอร์สเปกทีฟเทียบกับจุด O ที่กำหนดให้ ($F \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} F'$) ก็ต่อเมื่อ

1) การสมนัยเป็นแบบ 1 - 1 และ

2) **แต่ละคู่ของเส้นสมนัยอยู่บนจุดของเส้น m**

ถ้า $F \overset{m}{\underset{\wedge}{=}} F'$ **แล้วเส้น m เป็นแกนของภาวะเพอร์สเปกทีฟ** (axis of perspectivity)

สำหรับ F และ F' อาจเขียนแทนด้วย $F \underset{\wedge}{=} F'$ เมื่อไรก็ตามที่รูปสองรูปสัมพันธ์กันโดย

การเป็นเพอร์สเปกทีฟกัน

กิจกรรมการเรียนที่ 5.6

จงเขียนรูปแสดงการสมนัยกันแบบเพอร์สเปกทีฟระหว่าง

1. ระบบจุดอิงสองจุด และระบบเส้นตรงอิงสองเส้น
2. ระบบจุดอิงสองจุด และระบบระนาบอิงสองระนาบ
3. ระบบเส้นตรงอิงสองเส้น และระบบระนาบอิงสองระนาบ

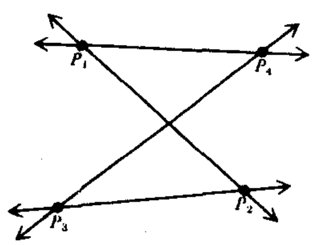
• จงเขียนรูปเพื่อแสดงว่า

4. ระบบเส้นตรงอิงสองเส้นสองชุดเป็นเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับเส้นเส้นหนึ่ง
5. ระบบจุดอิงสองจุด สองชุดเป็นเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับจุด ๆ หนึ่ง
6. ระบบระนาบอิงสองระนาบเป็นเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับระนาบ
7. $\Delta ABC \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} \Delta A'B'C'$
8. $\Delta ABC \overset{m}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'$

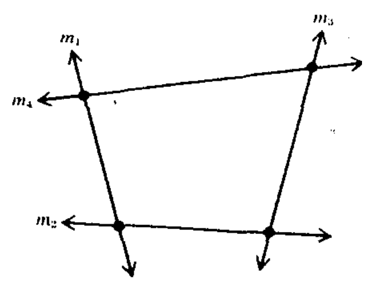
5.7 รูปสี่เหลี่ยมและรูปสี่ด้าน (Quadrangles and Quadrilateral)

รูปที่ประกอบด้วยจุดมุมสี่จุดซึ่งอยู่ร่วมระนาบเดียวกัน P_1, P_2, P_3, P_4 โดยที่จุดสามจุดใด ๆ ไม่อยู่บนเส้นเดียวกันและเส้นสี่เส้น $\overleftrightarrow{P_1P_2}$, $\overleftrightarrow{P_2P_3}$, $\overleftrightarrow{P_3P_4}$, $\overleftrightarrow{P_4P_1}$ ซึ่งได้จากจุดมุมซึ่งเรียงลำดับรูปวงกลม เป็น**รูปสี่เหลี่ยมเชิงเดียวในระนาบ** (simple plane quadrangle) $P_1P_2P_3P_4$ (รูปที่ 5.30) สังเกตว่าด้านของรูปอาจตัดกับจุดซึ่งไม่ได้เป็นจุดมุมของรูปสี่เหลี่ยมเชิงเดียวในระนาบ

plane dual ของรูปสี่เหลี่ยมเชิงเดียวในระนาบเส้นเป็นรูปสี่ด้านเชิงเดียวในระนาบ ดังรูปที่ 5.31



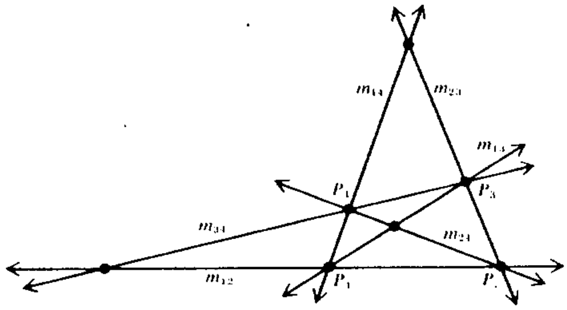
รูปที่ 5.30



รูปที่ 5.31

รูปที่ประกอบด้วยจุด 4 จุด P_1, P_2, P_3, P_4 ซึ่งอยู่ร่วมระนาบเดียวกันโดยไม่มีจุดสามจุดใด ๆ อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน กับด้าน 6 ด้านที่กำหนดโดยจุดสี่จุดนี้เรียกว่า **รูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ในระนาบ** (complete plane quadrangle) ลำดับของจุดยอดทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ในระนาบไม่ใช่สิ่งสำคัญ นั่นคือรูป $P_1P_2P_3P_4$ = รูป $P_3P_2P_1P_4$ ถ้ากำหนดให้ $m_{12} = \overleftrightarrow{P_1P_2}$ และโดยทั่วไป $m_{jk} = \overleftrightarrow{P_jP_k}$ แล้วด้านทั้งหกได้แก่

m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{23}, m_{24} และ m_{34} ดังรูป 5.32

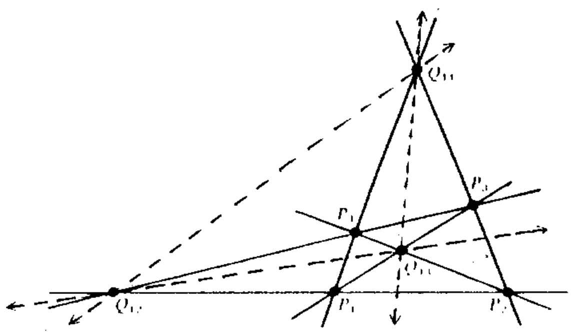


รูปที่ 5.32

ด้านสองด้านใด ๆ ที่ไม่ได้มีจุดร่วมกันเรียกว่า **ด้านตรงข้าม** (opposite sides)

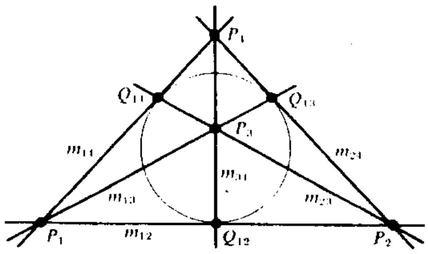
จุดตัดทั้งสามของด้านตรงข้ามได้แก่

$Q_{12} = m_{12} \cap m_{34}$, $Q_{13} = m_{13} \cap m_{24}$ และ $Q_{14} = m_{14} \cap m_{23}$ จุดตัดเหล่านี้ยังเป็น**จุดในแนวทแยงมุม** (diagonal points) ของรูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ ถ้าจุดในแนวทแยงมุมไม่อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันแล้วเรียกรูปสามเหลี่ยม $Q_{12}Q_{13}Q_{14}$ ว่าเป็น **รูปสามเหลี่ยมเฉียง** (diagonal triangle) ของรูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ในระนาบดังรูปที่ 5.33



รูปที่ 5.33

plane dual ของรูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ในระนาบเป็น**รูปสี่ด้านบริบูรณ์ในระนาบ** (complete plane quadrilateral) จุดในแนวทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ในระนาบอาจอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน เนื่องจากเส้นเป็นอนิยามศัพท์ดังนั้นรูปอาจเป็นเช่นเดียวกับเรขาคณิต 7 จุดและ 7 เส้น
(รูปที่ 5.34)



รูปที่ 5.34

หัวข้อ 5.3 พบว่าเรขาคณิต 7 จุดและ 7 เส้นสอดคล้องตาม P-1 ถึง P-6 สัจพจน์ต่อไปนี้ไม่สามารถพิสูจน์จาก P-1 ถึง P-8

P-9 **จุดในแนวทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ในระนาบใด ๆ ไม่อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน**

สัจพจน์ P-9 ทำให้สามารถพิสูจน์ว่าทุก ๆ เส้นบรรจุอย่างน้อย 4 จุด plane dual ของ P-9 อยู่ในกิจกรรมการเรียน 5.7

กิจกรรมการเรียนที่ 5.7

1. จงเขียนรูปสี่เหลี่ยมเชิงเดียวในระนาบเรียกรูปสี่เหลี่ยมนี้ว่ารูป ABCD แล้วใช้จุด 4 จุด A,B,C,D นี้เขียนรูปสี่ด้านเชิงเดียวในระนาบโดยให้ชื่อว่ารูป ACBD
2. จงนิยามรูปสี่ด้านเชิงเดียวในระนาบ
3. จงเขียน plane dual ของข้อความ

   "รูปที่ประกอบด้วยจุด 4 จุด P_1, P_2, P_3, P_4 ซึ่งอยู่ร่วมระนาบเดียวกันโดยไม่มีจุดสามจุดใด ๆ อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน กับด้าน 6 ด้านที่กำหนดโดยจุดสี่จุดนี้เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยม บริบูรณ์ในระนาบ"
4. จากรูปที่ 5. ให้ $R = \overleftrightarrow{Q_{12}Q_{14}} \cap \overleftrightarrow{P_2P_4}$ และจงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{P_2P_4}$ มีอย่างน้อย 4 จุดเนื่องจาก $R \neq Q_{13}$, $R \neq P_2$ และ $R \neq P_4$
5. จงใช้สัจพจน์ P-1 ถึง P-9 พิสูจน์ว่าทุก ๆ เส้นมีอย่างน้อย 4 จุด
6. จงเขียน plane dual ของสัจพจน์ P-9

   กำหนดสัจพจน์ P-1 ถึง P-9 จงพิสูจน์
7. plane dual ของสัจพจน์ P-9
8. ทุก ๆ ระนาบมีอย่างน้อย 13 จุด และ 13 เส้น
9. มีจุดอย่างน้อย 40 จุดและมีระนาบอย่างน้อย 40 ระนาบ

5.8 รูป N - จุดบริบูรณ์ (Complete, N-Points)

รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูป 3-จุดบริบูรณ์ในระนาบรูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ในระนาบเป็นรูป 4-จุดบริบูรณ์ในระนาบและอาจนิยามว่าเป็นรูปที่ประกอบด้วยจุด 4 จุดร่วมระนาบเดียวกันโดยไม่มีจุดสามจุดใด ๆ อยู่บนเส้นเดียวกันและเส้นหกเส้นกำหนดโดยจุดสี่จุดนี้ รูปที่ประกอบด้วยจุด 5 จุดร่วมระนาบเดียวกันโดยไม่มีจุดสามจุดใด ๆ อยู่บนเส้นเดียวกันและเส้นสิบเส้นกำหนดโดยจุด 5 จุดนี้รูปนั้นเรียกว่าเป็นรูป **5-จุดบริบูรณ์**โดยทั่วไปสำหรับ $n > 3$ รูปประกอบด้วยจุด n จุดอยู่ร่วมระนาบเดียวกันโดยไม่มีจุดสามจุดใด ๆ อยู่บนเส้นเดียวกัน และเส้นจำนวน $\frac{n(n-1)}{2}$ เส้นกำหนดโดยจุด n จุดนี้เป็นรูป **n จุดบริบูรณ์ในระนาบ** (complete plane n-point) plane dual ของรูป n-จุดสมบูรณ์ในระนาบเป็นรูป **n-เส้นบริบูรณ์ในระนาบ** (complete plane n-line)

รูปที่ประกอบด้วยจุดสี่จุดไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกับเส้นหกเส้นและระนาบสี่ระนาบที่กำหนดโดยจุดสี่จุดเป็นรูป **4 จุดบริบูรณ์ในปริภูมิ** (complete space 4-point) รูปที่ประกอบด้วยจุดห้าจุด ไม่มีจุดสี่จุดใด ๆ อยู่ในระนาบเดียวกันกับเส้นสิบเส้นและระนาบสิบระนาบกำหนดโดยจุดห้าจุดนี้เรียกว่ารูป **5-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิ** (complete space 5-point) สังเกตว่าถ้าจุด 4 จุดใด ๆ ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันแล้วจะเป็นไปไม่ได้เลยที่จุดสามจุดใด ๆ จะอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน โดยทั่วไปสำหรับ $n > 4$ รูปที่ประกอบด้วยจุด n จุด ไม่มีสี่จุดใด ๆ อยู่บนระนาบเดียวกันกับเส้น $\frac{n(n-1)}{2}$ เส้นและระนาบ $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ ระนาบกำหนดโดยจุด n จุดนี้เรียกว่ารูป n-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิ (complete space n-point) space dual ของรูป n-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิเป็นรูป n-ระนาบบริบูรณ์ในปริภูมิ (complete space n-plane)

อาจพิจารณารูป 5-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิในรายละเอียดดังนี้

ให้ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 เป็นจุด 5 จุดใด ๆ ที่ไม่มีจุดสี่จุดอยู่ร่วมระนาบเดียวกัน จุดเหล่านี้กำหนดเส้นสิบเส้นได้แก่ m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15}, m_{23}, m_{24}, m_{25}, m_{34}, m_{35} และ m_{45} ซึ่ง $P_jP_k = m_{jk}$ สำหรับแต่ละเส้น m_{jk} มีจุดที่กำหนดให้ 3 จุดซึ่งไม่อยู่บนเส้นเดียวกันและจุดสามจุดนี้กำหนดระนาบขึ้นระนาบหนึ่ง ตัวอย่างเช่น

เส้น m_{12} บรรจุจุด P_1 และ P_2 จุดสามจุดที่เหลือคือ P_3, P_4 และ P_5 ไม่อยู่บน m_{12} และจุดทั้งสามกำหนดระนาบ π_{345} ดังนั้นจุดห้าจุดที่กำหนดให้กำหนดเส้น 10 เส้นและระนาบ 10 ระนาบ

m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15}, m_{23}, m_{24}, m_{25}, m_{34}, m_{35}, m_{45}

π_{345}, π_{245}, π_{235}, π_{234}, π_{145}, π_{135}, π_{134}, π_{125}, π_{124}, π_{123},

ซึ่งแต่ละระนาบ

$\pi_{ijk} = P_iP_jP_k$,

π_{ijk} = บรรจุจุด P_i, P_j และ P_k และ

π_{ijk} บรรจุเส้น m_{ij}, m_{ik} และ m_{ik}

ตัวอย่างเช่น

π_{345} = บรรจุ P_3, P_4 และ P_5 และ

π_{345} บรรจุเส้น m_{34}, m_{35} และ m_{45}

รูป 5-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิบรรจุจุดห้าจุด เส้นสิบเส้นและระนาบสิบระนาบ ขณะนี้มีสัญลักษณ์ที่ใช้แทนจุด เส้น และระนาบซึ่งทำให้สามารถกำหนดหรือแจกแจงจุดบนเส้นที่กำหนดให้ หรือกำหนดจุดและเส้นบนระนาบที่กำหนดให้ plane section ใด ๆ ของรูป 5-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิโดยระนาบ π ซึ่งไม่บรรจุจุดใด ๆ ใน 5 จุดที่กำหนดให้จะตัดกันเป็นเส้นสิบเส้นของปริภูมิ 5-จุดที่จุด 10 จุด และจะตัดกับระนาบสิบระนาบของปริภูมิ 5-จุดเป็นเส้นสิบเส้น

ใช้ดรรชนีล่างชี้แจงจุดเหล่านี้และให้ $\pi \cap m_{jk} = P_{jk}$ และ $\pi \cap \pi_{ijk} = m_{ijk}$

ดังนั้นจุดสิบจุดของ plane section คือจุดซึ่งเขียนรูป P_{jk} และเส้นสิบเส้นของ plane section คือเส้น m_{ijk} ซึ่งจุด P_{jk} และเส้น m_{ijk} แสดงไว้ในบรรทัดที่สามกับสี่ดังนี้

m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15}, m_{23}, m_{24}, m_{25}, m_{34}, m_{35}, m_{45}

π_{345}, π_{245}, π_{235}, π_{234}, π_{145}, π_{135}, π_{134}, π_{125}, π_{124}, π_{123},

P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{23}, P_{24}, P_{25}, P_{34}, P_{35}, P_{45}

m_{345}, m_{245}, m_{235}, m_{234}, m_{145}, m_{135}, m_{134}, m_{125}, m_{124}, m_{123}

ในปริภูมิ 5 จุด เส้น m_{ij}, m_{ik} และ m_{jk} อยู่บนระนาบ π_{ijk} ดังนั้นใน plane section จึงได้ว่า

จุด P_{ij}, P_{ik} และ P_{jk} อยู่บนเส้น m_{ijk}

ตัวอย่างเช่น

P_{34}, P_{35} และ P_{45} อยู่บนเส้น m_{345};

P_{24}, P_{25} และ P_{45} อยู่บนเส้น m_{245}

คล้าย ๆ กันกับในปริภูมิ 5-จุด ระนาบ

π_{ijk}, π_{ijm} และ π_{ijn} อยู่บนเส้น m_{ij}

ดังนั้นใน plane section จะได้เส้น

m_{ijk}, m_{ijm} และ m_{ijn} อยู่บนจุด P_{ij} .

ตัวอย่างเช่น

m_{123}, m_{124} และ m_{125} อยู่บน P_{12};

m_{123}, m_{234} และ m_{235} อยู่บน P_{23};

plane section ของรูป 5-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิโดยระนาบซึ่งไม่ได้บรรจุจุดใด ๆ ในห้าจุดที่กำหนดให้จะประกอบด้วยจุดสิบจุดเส้นสิบเส้นซึ่งแต่ละเส้นมีสามจุดและแต่ละจุดมีเส้นสามเส้นผ่านสัญลักษณ์ที่กำหนดขึ้นทำให้สามารถเขียนรายละเอียดแจงการตกกระทบของจุดและเส้นได้ รูปใน plane section นี้เชื่อมโยงสัมพันธ์กับทฤษฎีของเดซาร์กส์อันเป็นทฤษฎีที่มีชื่อเสียงมากทฤษฎีหนึ่งในวิชาเรขาคณิต อาจพิจารณา plane section ของรูป 5-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิด้วยการพิจารณาปัญหาที่มีต้นมะม่วงสิบต้นปลูกเป็นแถวสิบแถวแถวละสามต้น แล้ววาดรูปตามเงื่อนไขที่กำหนด

สัญลักษณ์รูปที่เกี่ยวข้องกับดรรชนีล่างจะช่วยให้เขียนรูปได้โดยอาจเริ่มต้นด้วยเส้น m_{345} เส้น $\overleftrightarrow{P_{13}P_{35}}$ บรรจุจุดที่สามคือ P_{15} และ

$$\overleftrightarrow{P_{13}P_{34}} \cap \overleftrightarrow{P_{15}P_{45}} = P_{14}$$

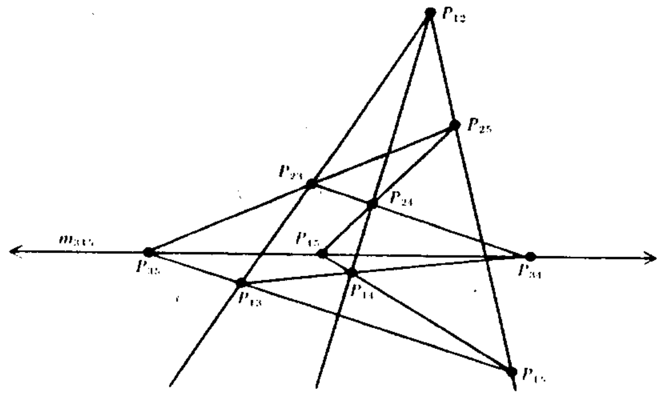
ทำนองเดียวกันจะมีจุด P_{23} ซึ่งไม่อยู่บนเส้น m_{345} เส้น $\overleftrightarrow{P_{23}P_{35}}$ บรรจุ P_{25} และ

$$\overleftrightarrow{P_{23}P_{34}} \cap \overleftrightarrow{P_{25}P_{45}} = P_{24}$$

ทำเช่นนี้จนพบว่ารูปที่ประกอบด้วย $\Delta P_{13}P_{14}P_{15}$ และ $\Delta P_{23}P_{24}P_{25}$ มีความเกี่ยวข้องกันในลักษณะของ

$$P_{13}P_{14}P_{15} \overset{m_{345}}{\underset{\wedge}{=}} P_{23}P_{24}P_{25}$$

ดังรูป 5.35



รูปที่ 5.35

มีเส้นเจ็ดเส้นมีจุด 9 จุดจุดที่หายไปคือจุด 12 ดังนั้น

$\overleftrightarrow{P_{12}P_{23}} = m_{123}$ และบรรจุจุด P_{13}

$\overleftrightarrow{P_{12}P_{24}} = m_{124}$ และบรรจุจุด P_{14}

$\overleftrightarrow{P_{12}P_{25}} = m_{125}$ และบรรจุจุด P_{15}

กล่าวอีกอย่างว่า $P_{13}P_{14}P_{15} \overset{P_{12}}{\doublebarwedge} P_{23}P_{24}P_{25}$

เริ่มที่เส้นเส้นหนึ่งพบว่ามีรูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นเพอร์สเปกทีฟจากเส้นนี้และพบว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองเป็นเพอร์สเปกทีฟจากจุด ๆ หนึ่งด้วยถ้าเริ่มจากจุด P_{12} จะพบว่ามีรูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นเพอร์สเปกทีฟจากจุด P_{12} และพบว่ามีรูปสามเหลี่ยมทั้งสองเป็นเพอร์สเปกทีฟจากเส้น ๆ หนึ่งด้วย

ในการพัฒนาการของรูปของ plane section ของรูป 5-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิจะได้รูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งเป็นเพอร์สเปกทีฟจากเส้น ๆ หนึ่งและพบว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเป็นเพอร์สเปกทีฟจากจุด ๆ หนึ่งด้วย สังเกตว่าสามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีคุณสมบัติว่าเป็นรูปเพอร์สเปกทีฟจากจุด ๆ หนึ่งและพบว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองเป็นเพอร์สเปกทีฟจากเส้นๆ หนึ่งทฤษฎีต่อไปนี้ทำให้ทราบว่าการเป็นเพอร์สเปกทีฟกันนั้นไม่ขึ้นอยู่กับรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดขึ้นโดยเฉพาะเจาะจงเพียงบางรูปเท่านั้น แท้จริงแล้วจะเป็นจริงสำหรับรูปสามเหลี่ยมทุกรูป

ทฤษฎี 5.13 **ทฤษฎีของเดซาร์กส์ (Theorem of Desargues)**

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นเพอร์สเปกทีฟจากจุดจุดหนึ่งแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เป็นเพอร์สเปกทีฟจากเส้น ๆ หนึ่งด้วย

พิสูจน์ พิจารณากรณีสำคัญสี่กรณีของทฤษฎีบทดังนี้

1) ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปบนระนาบที่ต่างกันเป็นเพอร์สเปกทีฟจากจุด ๆ หนึ่งแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เป็นเพอร์สเปกทีฟจากเส้น ๆ หนึ่ง

2) ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปบนระนาบที่ต่างกันเป็นเพอร์สเปกทีฟจากเส้น ๆ หนึ่งแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เป็นเพอร์สเปกทีฟจากจุด ๆ หนึ่ง

3) ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปบนระนาบเดียวกันเป็นเพอร์สเปกทีฟจากจุด ๆ หนึ่งแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เป็นเพอร์สเปกทีฟจากเส้น ๆ หนึ่ง

4) ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปอยู่บนระนาบเดียวกันเป็นเพอร์สเปกทีฟจากเส้น ๆ หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เป็นเพอร์สเปกทีฟจากจุด ๆ หนึ่ง

จะพิสูจน์กรณี 1), 3), และ 4) กรณีที่ 2) ให้เป็นกิจกรรมการเรียนของผู้อ่าน

พิสูจน์ กรณีที่ 1)

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC บนระนาบ π และรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ บนระนาบ $\pi' \neq \pi$ และ

$\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'} = O$ สำหรับจุดบางจุด O

โดยทฤษฎี 5.11 จะมี $\pi \cap \pi' = m$ สำหรับเส้นบางเส้น m

ดังนั้นโดยทฤษฎี 5.3 และ 5.6

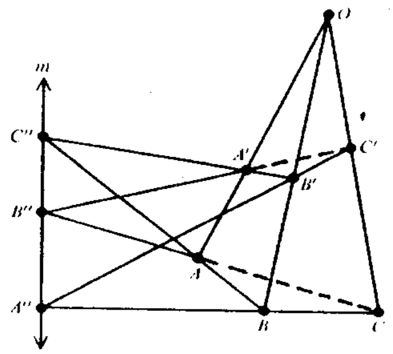
$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{A'B'} \subset \pi'$, และบน OAB จะมี $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = C''$;

$\overleftrightarrow{BC} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{B'C'} \subset \pi'$, และบน OBC จะมี $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = A''$;

$\overleftrightarrow{AC} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{A'C'} \subset \pi'$, และบน OAC จะมี $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = B''$.

ดังนั้น $\{A'',B'',C''\} \subset \pi$, $\{A'',B'',C''\} \subset \pi''$, และดังนั้น $\{A'',B'',C''\} \subset m$

ดังรูป 5.36 ดังนั้น $ABC \overset{m}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'$



รูปที่ 5.36

ต่อไปพิจารณากรณีที่ 3) ความเป็นไปได้เกิดขึ้น 2 ประการคือ

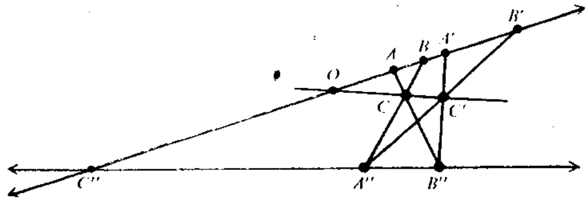
ก. ไพรเจกเตอร์ไม่ต่างกัน

ข. ไพรเจกเตอร์ต่างกัน

ถ้าไพรเจกเตอร์ไม่ต่างกันสมมติว่า $ABC \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'$ และ $\overleftrightarrow{AO} = \overleftrightarrow{BO}$ แล้ว $\overleftrightarrow{CO} \neq \overleftrightarrow{AO}$

เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AO}$ และ $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ (รูปที่ 5.37); $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \overleftrightarrow{AB}$; โดยทฤษฎี 5.6 เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมอยู่ร่วมระนาบเดียวกัน $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = B''$

$\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = A''$, $\overleftrightarrow{A''B''} \cap \overleftrightarrow{AB} = C''$; และ $\triangle ABC \overset{A''B''}{\underset{\wedge}{=}} \triangle A'B'C'$



รูปที่ 5.37

ถ้าสำหรับกรณี 3 ซึ่งโพรเจกเตอร์ต่างกันแล้วอาจพิจารณารูปสามเหลี่ยมเขียนแทนด้วย $\Delta P_{13}P_{14}P_{15}$ และ $\Delta P_{23}P_{24}P_{25}$ ซึ่ง

$$P_{13}P_{14}P_{15} \overset{P_{12}}{\doublebarwedge} P_{23}P_{24}P_{25}$$

ดังรูปที่ 5.38 และสร้างรูป 5-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิโดยมีจุดเหล่านี้อยู่บน plane section รูปใดรูปหนึ่ง จุด P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{23}, P_{24} และ P_{25} ทั้งหมดนี้อยู่บนระนาบ π ด้วยเหตุที่ไม่ใช่ว่าจุดทั้งหมดอยู่ร่วมระนาบเดียวกัน จะมีจุด ๆ หนึ่ง $P_1 \notin \pi$ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{P_1P_{12}}$ มีอย่างน้อยสามจุดให้ P_2 เป็นจุดที่สามของ $\overleftrightarrow{P_1P_{12}}$ ดังนั้นโดยทฤษฎี 5.6 อาจนิยาม

$$P_3 = \overleftrightarrow{P_1P_{13}} \cap \overleftrightarrow{P_2P_{23}} \quad \text{บน} \quad P_1P_{12}P_{13},$$
$$P_4 = \overleftrightarrow{P_1P_{14}} \cap \overleftrightarrow{P_2P_{24}} \quad \text{บน} \quad P_1P_{12}P_{14},$$
$$P_5 = \overleftrightarrow{P_1P_{15}} \cap \overleftrightarrow{P_2P_{25}} \quad \text{บน} \quad P_1P_{12}P_{15}.$$

เนื่องจากโพรเจกเตอร์ $\overleftrightarrow{P_{12}P_{13}}$, $\overleftrightarrow{P_{12}P_{14}}$ และ $\overleftrightarrow{P_{12}P_{15}}$ แตกต่างกันและ $\overleftrightarrow{P_1P_2} \in \pi$ ไม่มีจุดสี่จุดในห้าจุด P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 อยู่ร่วมระนาบเดียวกัน ตัวอย่างเช่นถ้าจุดสี่จุด P_1, P_2, P_3 และ P_4 อยู่ร่วมระนาบเดียวกันแล้ว P_4 จะอยู่บน $P_1P_2P_3 = P_1P_{12}P_{13}$ และ $\overleftrightarrow{P_1P_{14}}$ ก็จะเท่ากับ $\overleftrightarrow{P_1P_{13}}$