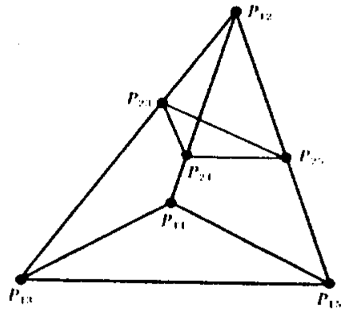


รูปที่ 5.38

ขณะนี้ได้แสดงให้เห็นแล้วว่าถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปอยู่ร่วมระนาบเดียวกันเป็นเพอร์สเปกทีฟจากจุด ๆ หนึ่งแล้วอาจพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองคือรูป $\Delta P_{13}P_{14}P_{15}$ และ $\Delta P_{23}P_{24}P_{25}$ บน plane section ของรูป 5-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิกำหนดขึ้นโดยจุด P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ดังนั้นดังที่ได้อธิบายแล้วเกี่ยวกับรูป 5-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิ

$\overleftrightarrow{P_{13}P_{14}} = m_{134}$, $\overleftrightarrow{P_{23}P_{24}} = m_{234}$, และ $m_{134} \cap m_{234} = P_{34}$;

$\overleftrightarrow{P_{13}P_{15}} = m_{135}$, $\overleftrightarrow{P_{23}P_{25}} \square m_{235}$, และ $m_{235} \cap m_{235} = P_{35}$;

$\overleftrightarrow{P_{14}P_{15}} = m_{145}$, $\overleftrightarrow{P_{24}P_{25}} = m_{245}$, และ $m_{145} \cap m_{245} = P_{45}$.

เช่นกันที่ $\{P_{34}, P_{35}, P_{45}\}$ m_{345} ดังรูป 5 . 3 5 และ

$$P_{13}P_{14}P_{15} \overset{m_{345}}{\underset{\wedge}{=}} P_{23}P_{24}P_{25}$$

ซึ่งจะต้องพิสูจน์ให้เห็นจริง

กรณี 4) เป็น plane dual ของกรณี 3) เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็น plane dual กับตัวของมันเอง ดังหัวข้อ 5.4

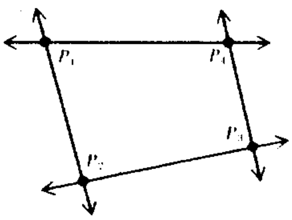
สังเกตว่าการพิสูจน์ทฤษฎีของเดซาร์กส์สำหรับรูปสามเหลี่ยมบนระนาบต้องการสมมุติฐานที่ว่าจุดไม่ทั้งหมดอยู่บนระนาบเดียวกัน ในความเป็นจริงแล้วมีเรขาคณิตในระนาบที่ผิดปกติมาก ๆ หลายประเภทที่ทฤษฎีของเดซาร์กส์ไม่เป็นจริง นั่นคือทฤษฎีของเดซาร์กส์นี้ไม่ได้มีแต่เพียงคุณสมบัติที่ผิดจากธรรมดาซึ่งทำให้การพิสูจน์กรณีที่รูปสามเหลี่ยมไม่อยู่ร่วมระนาบเดียวกันในปริภูมิง่ายขึ้นกว่าการที่จะพิสูจน์กรณีของรูปสามเหลี่ยมซึ่งอยู่ร่วมระนาบเดียวกัน แต่ก็เช่นกันที่ทฤษฎีนี้ไม่จำเป็นต้องจริงเสมอไปสำหรับรูปสามเหลี่ยมบนระนาบนอกเสียจากว่าระนาบนั้นสามารถฝังใน (enbeded) ปริภูมิได้

กิจกรรมการเรียนที่ 5.8

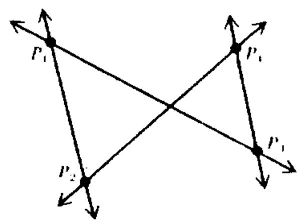
1. จงเขียนรูป 4-จุดบริบูรณ์ในระนาบและรูป 4-เส้นบริบูรณ์ในระนาบ
2. จงเขียนรูป 5-จุดบริบูรณ์ในระนาบและรูป 5-เส้นบริบูรณ์ในระนาบ
3. จงนิยามรูป 5-เส้นบริบูรณ์ในระนาบ
4. จงนิยามรูป 6-จุดบริบูรณ์ในระนาบและรูป 6-เส้นบริบูรณ์ในระนาบ
5. จงนิยามรูป n-เส้นบริบูรณ์ในระนาบ
6. จงเขียนรูป 4-จุดบริบูรณ์ในปริภูมิและรูป 4-ระนาบบริบูรณ์ในปริภูมิ
7. จงนิยามรูป 5-ระนาบบริบูรณ์ในปริภูมิ
8. จงนิยามรูป n-ระนาบบริบูรณ์ในปริภูมิ
9. จงเขียนรูปแสดงเส้นสิบเส้นอยู่ร่วมระนาบเดียวกันและจุดสิบจุดซึ่งแต่ละเส้นผ่านจุดสามจุดและสามจุดเท่านั้น
10. จงพิสูจน์ว่าถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปอยู่บนระนาบที่ต่างกันเป็นเพอร์สเปกทีฟกันจากเส้นเส้นหนึ่งแล้วรูปสามเหลี่ยมทั้งสองเป็นเพอร์สเปกทีฟกันจากจุดจุดหนึ่ง

5.9 รูป N-จุดเชิงเดียวในระนาบ (Simple Plane N-Points)

รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูป 3-จุดเชิงเดียวในระนาบ อาจนิยามว่าสี่มุมเชิงเดียวในระนาบเป็นรูป 4-จุดเชิงเดียวในระนาบและอาจนิยามรูปซึ่งประกอบด้วยจุด 4 จุดร่วมระนาบเดียวกันได้แก่จุด P_1, P_2, P_3, P_4 โดยไม่มีสามจุดใด ๆ อยู่บนเส้นเดียวกัน และเส้นสี่เส้นคือ $\overleftrightarrow{P_1P_2}$, $\overleftrightarrow{P_2P_3}$, $\overleftrightarrow{P_3P_4}$, $\overleftrightarrow{P_4P_1}$ ได้มาจากการพิจารณาจุดในอันดับของจุดที่กำหนดให้ สังเกตว่า รูป 4-จุดเชิงเดียว $P_2P_1P_3P_4$ แตกต่างจากรูป 4-จุดเชิงเดียว $P_1P_2P_3P_4$ (รูป 5.39)



$P_1P_2P_3P_4$



$P_2P_1P_3P_4$

รูปที่ 5.39

รูปที่ประกอบด้วยจุด n จุด (จุดยอด) ร่วมระนาบเดียวกัน

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, P_n,$$

$n \geq 3$, ไม่มีจุดสามจุดใด ๆ อยู่บนด้านเดียวกันและเส้น n เส้น (ด้าน)

$$\overleftrightarrow{P_1P_2}, \overleftrightarrow{P_2P_3}, \overleftrightarrow{P_3P_4}, \ldots, \overleftrightarrow{P_{n-1}P_n}, \overleftrightarrow{P_nP_1},$$

ได้มาจากการพิจารณาจุดในอันดับของจุดที่กำหนดให้

รูป n-จุดเชิงเดียวในระนาบ (simple plane n-point) เป็นรูปประกอบด้วยเส้น n เส้น (ด้าน) ร่วมระนาบเดียวกัน

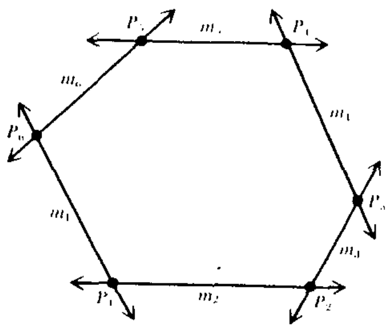
$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n,$$

$n \geq 3$ ไม่มีเส้นสามเส้นใด ๆ บนจุดยอดเดียวกัน และมีจุดจำนวน n จุด

$$m_1 \cap m_2,\ m_2 \cap m_3,\ m_3 \cap m_4, \ldots,\ m_{n-1} \cap m_n,\ m_n \cap m_1$$

ได้มาจากการพิจารณาเส้นในอันดับของเส้นที่กำหนดให้เป็น **รูป n-เส้นเชิงเดียวในระนาบ** (simple plane n-line)

รูป 6-เส้นเชิงเดียวในระนาบคือ **รูปหกเหลี่ยม** (สังเกตจากรูป 5.40) อาจกล่าวได้ว่ารูปหกเหลี่ยม $m_1m_2m_3m_4m_5m_6$ ทับกันสนิทหรือเป็นรูปเดียวกันกับรูป 6-จุดเชิงเดียวในระนาบ $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$



รูปที่ 5.40

เราได้นิยามรูปหกเหลี่ยมว่าเป็นรูป 6-เส้นแทนที่จะกล่าวว่า 6-จุดเพื่อว่าจะสามารถพิจารณาจุดทแยงมุม อย่างไรก็ตามสามารถตั้งชื่อรูปหกเหลี่ยมด้วยการเรียกชื่อด้านหรือมิฉะนั้นก็เรียกชื่อจุด แต่ละด้านของรูปหกเหลี่ยมมีด้านตรงข้ามการเรียกชื่อด้านตรงข้ามใดทำได้โดยพิจารณาตามแผนภาพโดยดูตามเส้นที่โยงไว้เป็นคู่ดังนี้

$$\overline{P_1P_2}\quad P_3\quad \overline{P_4P_5}P_6$$

หมายความว่าสำหรับรูปหกเหลี่ยม $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ (รูป 5.40) ด้าน

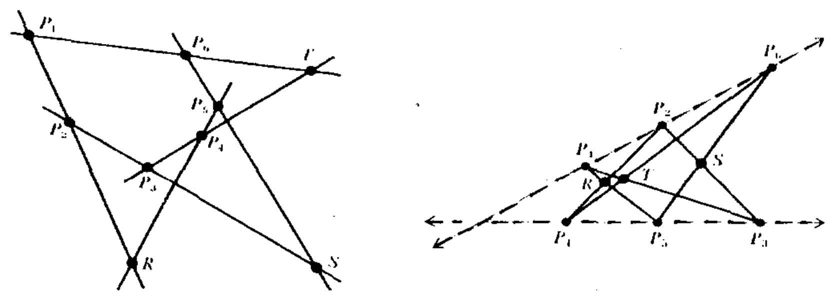
$\overleftrightarrow{P_1P_2}$ และ $\overleftrightarrow{P_4P_5}$ เป็นด้านตรงข้ามกัน

$\overleftrightarrow{P_2P_3}$ และ $\overleftrightarrow{P_5P_6}$ เป็นด้านตรงข้ามกัน และ

$\overleftrightarrow{P_3P_4}$ และ $\overleftrightarrow{P_1P_6}$ เป็นด้านตรงข้ามกัน

บนระนาบโพรเจกทีฟ เส้นสองเส้นใด ๆ ตัดกันที่จุด ๆ เดียวเท่านั้น (ทฤษฎี 5.6) ดังนั้นบนระนาบโพรเจกทีฟด้านตรงข้ามกันสองด้านใด ๆ ของรูปหกเหลี่ยมตัดกันเสมอ จุดสามจุดของผล

ตัดของด้านตรงข้ามของรูปหกเหลี่ยม เป็นจุดทแยงมุม (diagonal points) ของรูปหกเหลี่ยม ในแต่ละรูปของรูปที่ 5.41 จุดทแยงมุมของรูปหกเหลี่ยม $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ คือ R,S และ T



รูปที่ 5.41

รูป 6-เส้นเชิงเดียวในระนาบ (รูปหกเหลี่ยม) มีเส้น 6 เส้น (ด้าน) ร่วมระนาบเดียวกัน ไม่มีเส้นสามเส้นใด ๆ อยู่บนจุดยอดเดียวกันจุดยอดหกจุด ด้านตรงข้ามกันสามคู่ และจุดทแยงสามจุด รูป 6-จุดเชิงเดียวในระนาบมีจุดร่วมระนาบเดียวกัน 6 จุด ไม่มีจุดสามจุดใด ๆ อยู่บนด้านเดียวกัน ด้าน 6 ด้าน มุมตรงข้ามกันสามคู่และมีเส้นทแยงสามเส้น

ทฤษฎี 5.14 **ทฤษฎีของปัปปุส** (Theorem of Pappus)

ถ้าจุดยอดแต่ละจุดของรูป 6-เส้นเชิงเดียวในระนาบอยู่บนเส้นหนึ่งในสองเส้นซึ่งไม่ได้เป็นเส้นในหกเส้นแล้ว คู่ของด้านตรงข้ามของเส้นหกเส้นกำหนดจุดร่วมเส้นตรงเดียวกัน

ทฤษฎีของปัปปุสนี้สามารถกล่าวให้ชัดเจนขึ้นคือ **ถ้ารูปหกเหลี่ยมเขียนบรรจุภายใน** (inscribe) **เส้นสองเส้นซึ่งไม่ใช่ด้านของรูปหกเหลี่ยมแล้ว จุดทแยงมุมของรูปหกเหลี่ยมอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน**

การพิสูจน์ทฤษฎีของปัปปุสพิสูจน์ได้หลังจากที่ได้ศึกษาสัจพจน์ของการสมนัยแบบโพรเจกทีฟระหว่างระบบเส้นตรงอิงสองจุด เมื่อสัจพจน์ P-7 และ P-8 ถูกแทนโดยข้อสมมุติ

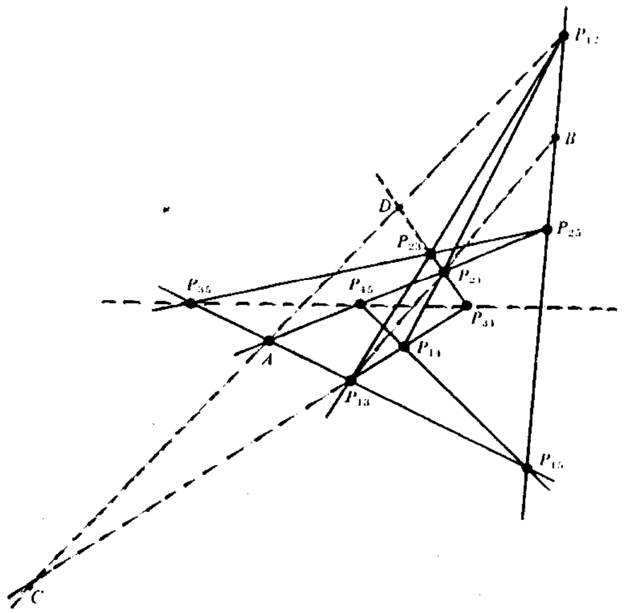
ว่าจุดทั้งหมดอยู่บนระนาบเดียวกันทฤษฎีของปัปปุสนี้บางครั้งบางคราวอาจใช้เป็นสัจพจน์และมีประโยชน์ต่อการพิสูจน์ ทฤษฎีของเดซาร์กส์สำหรับกรณีที่รูปสามเหลี่ยมสองรูปอยู่ร่วมระนาบเดียวกัน

กิจกรรมการเรียนที่ 5.9

1. จงนิยามและเขียนรูป 6-จุดเชิงเดียวในระนาบ
2. จงนิยามและเขียนรูป 6-เส้นเชิงเดียวในระนาบ
3. จงเขียนรูปของทฤษฎีของปัปปุส
4. จงเขียนข้อความและวาดรูปสำหรับ plane dual ของทฤษฎีของปัปปุส
5. รูปที่กำหนดให้แสดง $\Delta P_{13}P_{14}P_{15}$ และ $\Delta P_{23}P_{24}P_{25}$ เพอร์สเปกทีฟจากจุด P_{12} จุดที่เพิ่มเติมเข้ามากำหนดโดย

   $A = \overleftrightarrow{P_{13}P_{15}} \cap \overleftrightarrow{P_{24}P_{25}}$ $\qquad$ $B = \overleftrightarrow{P_{13}P_{24}} \cap \overleftrightarrow{P_{15}P_{25}}$

   $C = \overleftrightarrow{P_{13}P_{14}} \cap \overleftrightarrow{P_{12}A}$ $\qquad$ $D = \overleftrightarrow{P_{23}P_{24}} \cap \overleftrightarrow{P_{12}A}$



รูปที่ 5.42

5.1) จงประยุกต์ทฤษฎีของปัปปุสเข้ากับรูปหกเหลี่ยมต่อไปนี้

ก) $P_{14}P_{15}P_{12}AP_{24}P_{13}$,

ข) $P_{23}P_{25}P_{12}AP_{13}P_{14}$,

ค) $P_{24}AP_{13}CBD$

5.2) ใช้สัจพจน์ P-1 ถึง P-6 และทฤษฎีของปัปปุสและพิสูจน์ทฤษฎีของเดซาร์กส์ สำหรับรูป Δ ร่วมระนาบเดียวกัน

5.10 **การแปลงแบบโพรเจกทีฟ** (Projective Transformations)

รูปเพอร์สเปกทีฟที่กล่าวถึงในหัวข้อ 5.9 ได้แก่รูปสองรูป F และ F' เป็น **โพรเจกทีฟ**กันเขียนว่า $F \barwedge F'$ ถ้ามีลำดับจำกัดของภาวะเพอร์สเปกทีฟ

$$F \doublebarwedge F_1,\ F_1 \doublebarwedge F_2,\ F_2 \doublebarwedge F_3,\ \ldots,\ F_k \doublebarwedge F'$$

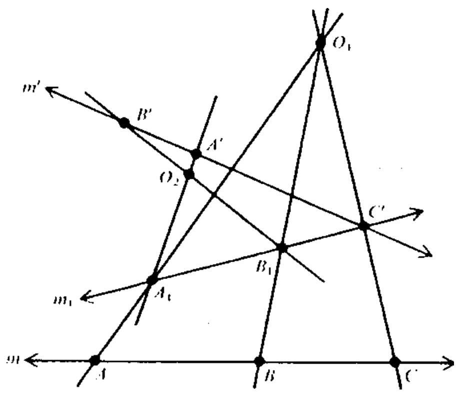
ดังนั้นรูปสองรูปเป็นโพรเจกทีฟถ้ามีการสมนัยแบบ 1-1 ระหว่างสมาชิกของรูปทั้งหมดและถ้าทุกคู่ของสมาชิกที่สมนัยกันสัมพันธ์กันโดยลำดับจำกัดของภาวะเพอร์สเปกทีฟลำดับเดียวกัน

ทฤษฎี 5.15 จุดใด ๆ สามจุดที่ต่าง ๆ บนเส้น m เป็นโพรเจกทีฟกับจุดใด ๆ สามจุดที่ต่างกันบนเส้น m'

กำหนดให้ จุดสามจุดที่ต่างกัน A,B,C บน m และจุดสามจุดที่ต่างกัน A',B',C', บน m'

จะพิสูจน์ว่า $ABC \barwedge A'B'C'$ **นั่นคือต้องแสดงว่ามีลำดับจำกัดของภาวะเพอร์สเปกทีฟที่**

ทำให้การสมนัยเช่นนี้เกิดขึ้น เส้น m และ m' อาจร่วมระนาบหรือไม่ร่วมระนาบเดียวกัน



รูปที่ 5.43

โดยสัจพจน์ P-2 ทำให้ทราบว่าถ้า m และ m' ไม่อยู่ร่วมระนาบเดียวกันจะมีจุดที่สามเรียกว่า O_1 บน $\overleftrightarrow{CC'}$ บนระนาบ ACC' ให้ m_1 เป็นเส้นที่สามผ่าน C' นั่นคือ $m_1 \neq m'$, $m_1 \neq \overleftrightarrow{CC'}$ จาก plane dual ของสัจพจน์ P-2 ดังนั้นบนระนาบ ACC' และโดยทฤษฎี 5.6 ให้ $\overleftrightarrow{O_1A} \cap m_1 = A_1$ และ $\overleftrightarrow{O_1B}$ $m_1 = B_1$ บนระนาบ $A'C'A_1$ ของผลตัดของ m_1 และทำให้

$$O_2 = \overleftrightarrow{A_1A'} \cap \overleftrightarrow{B_1B'}$$

ดังนั้น จากรูป 5.43

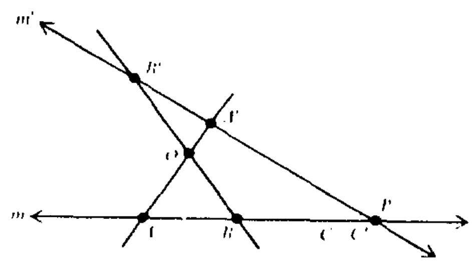
$$ABC \overset{O_1}{\underset{\wedge}{=}} A_1B_1C' \overset{O_2}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'$$

และนั่นคือ $ABC \underset{\wedge}{-} A'B'C'$

ถ้า m และ m' อยู่ร่วมระนาบเดียวกันแล้วทั้ง m = m' หรือ m ≠ m' ถ้า m ≠ m' แล้ว $m \cap m' = P$ และทั้ง P ทับกันสนิทหรือ P ไม่ทับกันสนิทกับสมาชิกทั้งสองในคู่ของจุดสมนัยที่กำหนดให้ แยกพิจารณาเป็นสองกรณี

1) ถ้า P ไม่สมนัยกันกับสมาชิกทั้งสองของคู่ของจุดสมนัยที่กำหนดให้ สมมุติ P = C = C' ดังรูป 5.44 และจากทฤษฎี 5.6 ให้ $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB} = O$, แล้ว

$$ABC \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C' \text{ และนั่นคือ } ABC \underset{\wedge}{-} A'B'C'$$



รูปที่ 5.44

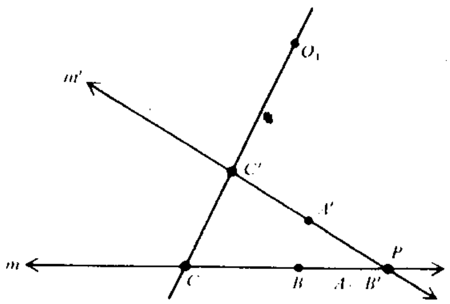
2) ถ้า p ไม่ทับกันสนิทกับสมาชิกทั้งสองของคู่ของจุดสมนัยแล้ว เนื่องจาก $m \cap m' = P$ และจุดอย่างมากสองคู่ของจุดที่กำหนดให้ของจุดสมนัยสามารถเข้ามาเกี่ยวข้องกับจุด P ตัวอย่างเช่น เราสามารถมี $A = P = B'$ ดังรูป 5.45 นั่นคืออาจสมมุติว่าคู่หนึ่งไม่เกี่ยวข้องกับ P นั่นคือ ถ้า $C \neq P \neq C'$ จะได้ $C \neq C'$ มีเส้น $\overleftrightarrow{CC'}$ กับจุดที่สาม O_1 ดังรูป 5.43 เราอาจให้ m_1 เป็นเส้นที่สามผ่าน C' และนิยาม

$$A_1 = m_1 \cap \overleftrightarrow{O_1A},\ B_1 = m_1 \cap \overleftrightarrow{O_1B},\ O_2 = \overleftrightarrow{A_1A'} \cap \overleftrightarrow{B_1B'}$$

และมี

$$ABC \overset{O_1}{\underset{\wedge}{=}} A_1B_1C' \overset{O_2}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C',$$

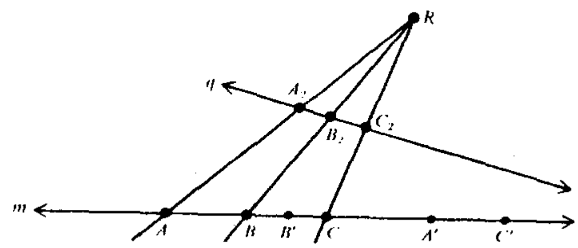
และนั่นคือ $ABC \underset{\wedge}{-} A'B'C'$



รูปที่ 5.45

ในที่สุดถ้า $m = m'$ จะมีจุดจุดหนึ่ง R ซึ่งไม่อยู่บน m และเส้นเส้นหนึ่ง $q \neq m$ บนระนาบของ R และ m เราอาจนิยาม (รูปที่ 5.46)

$$A_2 = q_2 \cap \overleftrightarrow{RA},\ B_2 = q \cap \overleftrightarrow{RB},\ C_2 = q \cap \overleftrightarrow{RC};$$



รูปที่ 5.46

พิจารณา A,B, และ C ซึ่งเป็นจุดบนเส้น m เป็นเพอร์สเปกทีฟเมื่อเทียบกับ R กับจุด A_2, B_2 และ C_2 บนเส้น q และกับกระบวนการเช่นเดียวกับที่อธิบายไปแล้วจะได้ $A_2B_2C_2 \; \overset{-}{\wedge} \; A'B'C'$

ดังนั้นเรามี

$$ABC \overset{R}{=} A_2B_2C_2 \; \overset{-}{\wedge} \; A'B'C'$$

การพิจารณากรณีที่จะเป็นไปได้ของทฤษฎี 5.15 ทำได้อย่างครบถ้วนแล้วและยังแสดงให้เห็นว่าภายในสภาวการณ์เป็นไปได้ของจุดที่กำหนดให้สามจุดใด ๆ ที่ต่างกันของเส้น m เป็นโพรเจกทีฟกับจุดที่กำหนดให้สามจุดใด ๆ ที่ต่างกันบนเส้น m' สังเกตว่าในแต่ละกรณีต้องการภาวะเพอร์สเปกทีฟสามครั้งโดยทั่ว ๆ ไปภาวะเพอร์สเปกทีฟ $F \underset{\wedge}{=} F'$ อาจถูกมองว่าเป็นการส่งของรูป F ไปทั่วถึงรูป F' และนั่นคือเป็น **การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟ** (perspective transformation) ของ F ไปทั่วถึง F'

สังเกตว่าถ้า $F \underset{\wedge}{=} F'$ แล้ว $F' \underset{\wedge}{=} F$ นั่นคือการผกผันของการแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟเป็นการแปลงเพอร์สเปกทีฟ ภาวะโพรเจกทีฟ (projectivity) ใด ๆ $F \; \overset{-}{\wedge} \; F'$ อาจถูกมองว่าเป็นการส่งของ F ไปทั่วถึง F' และเป็น **การแปลงแบบโพรเจกทีฟ** (projective transformation) ของ F ไปทั่วถึง F' เนื่องจากภาวะเพอร์สเปกทีฟครั้งเดียวเป็นลำดับจำกัดของภาวะเพอร์สเปกทีฟด้วย การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟใด ๆ เป็นการแปลงแบบโพรเจกทีฟ

ด้วย กล่าวอีกอย่างคือ ถ้า $F \underset{\wedge}{=} F'$ แล้ว $F \underset{\wedge}{-} F'$ แต่บทกลับของข้อความนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง

เส้นจำนวนบนเส้นโพรเจกทีฟ ถูกกำหนดด้วยจุดสามจุดของเส้น ทฤษฎี 5.15 ทำให้ได้ว่าเส้นจำนวนบนเส้นโพรเจกทีฟสมมูลกันภายใต้การแปลงโพรเจกทีฟ พิกัดบนระนาบโพรเจกทีฟจะถูกกำหนดด้วยจุดสี่จุดโดยที่ไม่มีจุดสามจุดใด ๆ อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันพิกัดสำหรับปริภูมิโพรเจกทีฟ 3 มิติ จะถูกกำหนดด้วยจุดห้าจุดโดยที่ไม่มีจุดสี่จุดใด ๆ อยู่ร่วมระนาบเดียวกัน ทฤษฎีสำหรับจุดบนระนาบและในปริภูมิซึ่งสมนัยกับทฤษฎี 5.15 มีดังต่อไปนี้

ทฤษฎี 5.16 บนระนาบ π จุดสี่จุดใด ๆ ซึ่งไม่มีจุดสามจุดอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันเป็นโพรเจกทีฟกับจุดสี่จุดใด ๆ ซึ่งไม่มีจุดสามจุดใด ๆ อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันบนระนาบ π'

ทฤษฎี 5.17 จุดห้าจุดใด ๆ ซึ่งไม่มีจุดสี่จุดอยู่ร่วมระนาบเดียวกันเป็นโพรเจกทีฟกับจุดห้าจุดใด ๆ ซึ่งไม่มีจุดสี่จุดใด ๆ อยู่ร่วมระนาบเดียวกัน

สามารถพิสูจน์ทฤษฎี 5.16 และทฤษฎี 5.17 ได้ ขณะนี้เราจะถือว่าข้อความในทฤษฎีเป็นสัจพจน์ อย่างไรก็ตามจะไม่นำทฤษฎีทั้งสองไปรวมเข้ากับเซตของสัจพจน์ เพราะว่าข้อความในทฤษฎีสามารถพิสูจน์จะได้และย่อมเป็นทฤษฎีตามหลักข้อตกลงทางเรขาคณิต แต่จะไม่พิสูจน์ในที่นี้

กิจกรรมการเรียนที่ 5.10

1. พิจารณาจุด A,B และ C บนเส้น m

   1.1 เลือกเส้น $m_1 \neq m$ และจุด O_1 ซึ่ง $O_1 \notin m$ และ $O_1 \notin m_1$ แล้วสร้าง A_1,B_1,C_1 บน m_1 จนกระทั่ง

$$ABC \overset{O_1}{\underset{\wedge}{=}} A_1B_1C_1$$

1.2 เลือกเส้น $m_2 \neq m_1$ และจุด O_2 ซึ่ง $O_2 \notin m$ และ $O_2 \notin m_2$ แล้วสร้าง A_2, B_2, C_2 บน m_2 ทำให้

$$A_1B_1C_1 \overset{O_2}{\underset{\wedge}{=}} A_1B_1C_1$$

2. ใช้รูปในกิจกรรมการเรียนข้อ 1 กำหนดจุดสองจุด D และ E บน $\overleftrightarrow{AB}$ และหาจุด D_1 และ E_1 บน $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ และ D_2 กับ E_2 บน $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ ทำให้

$$ABCDE \overset{O_1}{\underset{\wedge}{=}} A_1B_1C_1D_1E_1 \overset{O_2}{\underset{\wedge}{=}} A_2B_2C_2D_2E_2$$

3. ใช้รูปในกิจกรรมการเรียนข้อ 1 และหาเซตของจุดร่วมเส้นตรงเดียวกัน

$$A_2B_2C_2 \overset{O_3}{\underset{\wedge}{=}} A_3B_3C_3 \overset{O_4}{\underset{\wedge}{=}} ABC$$

4. พิจารณารูปสามเหลี่ยม RST

4.1 เลือกจุด O_1 บนระนาบ RST และวาดรูปแสดงรูปสามเหลี่ยม $R_1S_1T_1$ ทำให้

$$RST \overset{O_1}{\underset{\wedge}{=}} R_1S_1T_1$$

4.2 เลือกจุด O_2 บนระนาบ RST และขยายรูปสำหรับ 4.1 เพื่อแสดงรูปสามเหลี่ยม $R_2S_2T_2$ ทำให้

$$R_1S_1T_1 \overset{O_2}{\underset{\wedge}{=}} R_2S_2T_2$$

5. ทำซ้ำกิจกรรมการเรียนที่ 4 สำหรับเส้น m_1 และ m_2 ทำให้

$$RST \overset{m_1}{\underset{\wedge}{=}} R_1S_1T_1 \overset{m_2}{\underset{\wedge}{=}} R_2S_2T_2$$

5.11 **สัจพจน์ของภาวะโพรเจกทีฟ** (Postulate of Projectivity)

ขณะนี้มีสัจพจน์ของการแปลงแบบโพรเจกทีฟเกิดขึ้นโดยถูกพิจารณาว่าเป็นการสมนัยของจุดบนเส้น m กับจุดบนเส้น m' ดังทฤษฎี 5.15 เป็นได้อย่างเดียวเท่านั้น

P-10 ภาวะโพรเจกทีฟระหว่างระบบจุดอิงสองจุดสองชุด ถูกกำหนดอย่างบริบูรณ์โดยจุดสมนัยสามคู่ที่แตกต่างกัน

การเป็นได้แบบเดียวของภาวะโพรเจกทีฟไม่ได้หมายความว่าจะมีเพียงลำดับของภาวะเพอร์สเปกทีฟลำดับเดียวเท่านั้น จึงจะทำให้เกิดภาวะโพรเจกทีฟที่จริงแล้วสามารถเลือกจุด O_1 และเส้น m_1 ได้อย่างน้อยสองแนวทาง (ดูหัวข้อ 5.10) การเป็นได้แบบเดียวเท่านั้นของภาวะโพรเจกทีฟทำให้ได้ผลตามมาว่าถ้า

$$ABCD \underset{\wedge}{-} A'B'C'D_1'$$

ใช้ลำดับเดียวของภาวะเพอร์สเปกทีฟและถ้า

$$ABCD \underset{\wedge}{-} A'B'C'D_2'$$

ใช้ลำดับเดียวกันหรือลำดับต่างกันของลำดับของภาวะโพรเจกทีฟ แล้ว

$$D_1' = D_2'$$

กล่าวอีกอย่างว่า มีการสมนัยแบบโพรเจกทีฟแบบเดียวเท่านั้นของจุดของเส้น m ไปทั่วถึงจุดของเส้น m' ภายใต้จุดสามจุดที่ต่างกันของเส้น m เกี่ยวข้องเชื่อมโยงกับจุดสามจุดที่ต่างกันของจุดของเส้น m' นอกจากนี้ภายใต้ภาวะโพรเจกทีฟพบว่าจุดจุดเดียวเท่านั้น P' บนเส้น m' สัมพันธ์กับแต่ละจุด P บนเส้น m

นั่นคือถ้าภาวะโพรเจกทีฟสองภาวะเหมือนกันในสามคู่ของจุด แล้วภาวะโพรเจกทีฟถือว่าเป็นอันเดียวกัน

ทฤษฎี 5.18 มีการแปลงแบบโพรเจกทีฟแบบเดียวเท่านั้นของเส้น m ไปทั่วถึงเส้น m' ทำให้

$$ABC \underset{\wedge}{-} A'B'C'$$

เมื่อ A,B,C เป็นจุดสามจุดใด ๆ ที่ต่างกันบน m และ A'B'C' เป็นจุดสามจุดใด ๆ ที่ต่างกันบน m'

พิสูจน์ โดยทฤษฎี 5.15 จะมีภาวะโพรเจกทีฟอย่างน้อยหนึ่งแบบ และโดยสัจพจน์ P-10 มีได้อย่างมากหนึ่งแบบ

ทฤษฎีนี้เป็นจริงทั้งในระนาบและในปริภูมิ

ทฤษฎี 5.19 มีการแปลงแบบโพรเจกทีฟแบบเดียวเท่านั้นของระนาบ π ไปทั่วถึงระนาบ π' ทำให้

$$ABCD \underset{\wedge}{-} A'B'C'D'$$

เมื่อ A,B,C,D เป็นจุดสี่จุดใด ๆ ของ π ไม่มีจุดสามจุดอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน และ A',B',C',D' เป็นจุดสี่จุดใด ๆ ของ π' ไม่มีจุดสามจุดอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน

ทฤษฎี 5.20 มีการแปลงแบบโพรเจกทีฟแบบเดียวเท่านั้นของปริภูมิสามมิติไปทั่วถึงตัวของมันเอง ทำให้

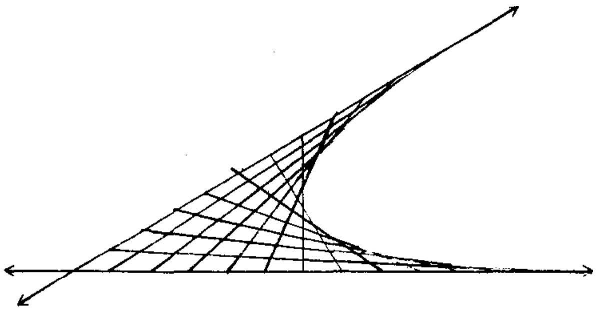
$$ABCDE \underset{\wedge}{-} A'B'C'D'E'$$

เมื่อ A,B,C,D,E เป็นจุดห้าจุดใด ๆ ไม่มีจุดสี่จุดอยู่บนระนาบเดียวกัน และ A',B',C',D',E' เป็นจุดห้าจุดใด ๆ ไม่มีจุดสี่จุดบนระนาบเดียวกัน

การสมนัยแบบโพรเจกทีฟที่อธิบายในทฤษฎี 5.18 ระหว่างระบบจุดอิงสองจุดสองชุดเป็นภาวะโพรเจกทีฟก็ต่อเมื่อ

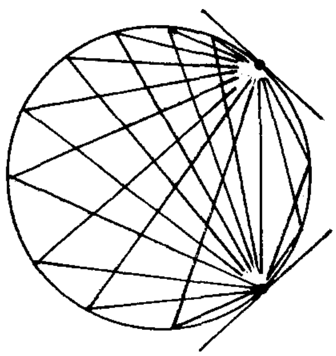
ระบบทั้งสองมีจุดจุดหนึ่งร่วมกัน และจุดที่มีร่วมกันนี้สมนัยกับตัวเอง นั่นคือ สามารถสร้างระบบจุดอิงสองจุดแบบโพรเจกทีฟแต่ไม่เป็นเพอร์สเปกทีฟ

เซตของเส้นทั้งหลายกำหนดโดยจุดสมนัยของระบบจุดอิงสองจุดสองชุดที่เป็นโพรเจกทีฟแต่ไม่เป็นเพอร์สเปกทีฟซึ่งอยู่บนระนาบเดียวกันแต่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกันเป็น line conic ดังรูป 5.47



รูปที่ 5.47

สังเกตว่า line conic เหมือนกับซองบรรจุกรวยกลมที่ศึกษาในวิชาแคลคูลัส เซตของจุดทั้งหลายกำหนดโดยเส้นสมนัยของระบบเส้นตรงอิงสองเส้นสองชุดที่เป็นโพรเจกทีฟแต่ไม่เป็นเพอร์สเปกทีฟซึ่งอยู่บนระนาบเดียวกันแต่ไม่อยู่บนจุดเดียวกันเป็น **point conic** (รูปที่ 5.48) รูปหกเหลี่ยมเป็น **รูปเขียนล้อม** (circumscribed) ของ line conic ถ้าด้านของรูปหกเหลี่ยมเป็นเส้นของ line conic; รูปหกเหลี่ยมเป็นรูปบรรจุข้างใน (inscribed)point conic ถ้าจุดมุมของรูปหกเหลี่ยมเป็นจุดของ point conic



รูปที่ 5.48

กิจกรรมการเรียนที่ 5.11

1. จงเขียน plane dual ของสัจพจน์ P-10
2. จงพิสูจน์ข้อความที่ได้จากกิจกรรมการเรียนข้อ 1 สำหรับระบบเส้นตรงถึงสองเส้นสองชุดซึ่ง
   2.1 ร่วมระนาบเดียวกัน
   2.2 ไม่อยู่ร่วมระนาบเดียวกัน
3. จงสร้างภาวะโพรเจกทีฟระหว่างระบบจุดถึงสองจุดสองชุดซึ่งไม่เป็นภาวะเพอร์สเปกทีฟ
4. สมมุติว่าเส้นหนึ่งเส้นมีแปดจุดจงสร้าง line conic ที่มีอย่างน้อย 8 เส้น
5. จงสร้างการสมนัยแบบโพรเจกทีฟที่ไม่เป็นเพอร์สเปกทีฟระหว่างระบบเส้นตรงถึงสองเส้นสองชุดที่อยู่ร่วมระนาบเดียวกัน
6. สมมุติว่าเส้นหนึ่งเส้นมีอย่างน้อยแปดจุด จงสร้างจุดอย่างน้อยแปดจุดของ point conic