บทที่ 4

เรขาคณิตนอกระบบยุคลิด (Non-Euclidean geometry)

เค้าโครงเรื่อง

4.1 ประวัติและพัฒนาการของเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด

4.2 เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก

4.3 เรขาคณิตอิลลิปติก

สาระสำคัญ

1. ความคิดริเริ่มของนักคณิตศาสตร์ที่สำคัญ เช่น แซคเคอรี่ ลัมแบร์ต เกาส์ โบลไย โลบาเชฟสกี้และ รีมันน์ ซึ่งก่อให้เกิดเรขาคณิตระบบอื่นซึ่งต่างไปจากเรขาคณิตระบบยุคลิด
2. สัจพจน์เกี่ยวกับเส้นขนานของเกาส์ โบลไยและโลบาเชฟสกี้
3. คุณสมบัติเบื้องต้นของเส้นขนานในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก
4. การลงรอยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูป ABΩ และ A'B'Ω'
5. รูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ รูปสี่ด้านของลัมแบร์ต การพิสูจน์ว่าผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกน้อยกว่าสองมุมฉาก
6. สัจพจน์เกี่ยวกับเส้นขนานของรีมันน์
7. ทฤษฎีบทเบื้องต้นในเรขาคณิตอิลลิปติก
8. รูปสี่ด้านของแซคเคอรี่และรูปสี่ด้านของลัมแบร์ต ในเรขาคณิตอิลลิปติก
9. การพิสูจน์ว่าผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ในเรขาคณิตอิลลิปติกมากกว่าสองมุมฉาก
10. การเปรียบเทียบเรขาคณิตยุคลิดกับเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกและเรขาคณิตอิลลิปติก

จุดประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้วนักศึกษาสามารถ

1. อธิบายประวัติและพัฒนาการของเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด
2. เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างเรขาคณิตระบบยุคลิดเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกและเรขาคณิตอิลลิปติก
3. แก้ปัญหาโจทย์ต่าง ๆ ในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก
4. แก้ปัญหาโจทย์ต่าง ๆ ในเรขาคณิตอิลลิปติก

4.1 ประวัติและพัฒนาการของเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด

เป็นที่ทราบกันว่าเรขาคณิตระบบแรกของโลก ได้แก่ เรขาคณิตระบบยุคลิด ยุคลิดเป็นผู้รวบรวมผลงานของนักคณิตศาสตร์รุ่นก่อนเขาและของเขาเองไว้ในหนังสืออีลีเมนต์ ถึง 13 เล่ม เป็นหนังสือที่มีชื่อเสียงลักษณะสำคัญของเรขาคณิตในระบบยุคลิดนั้นเป็นแบบแผนความคิดที่มีข้อตกลงเบื้องต้น คือ ยุคลิดกำหนดประโยคที่ยอมรับว่าจริง โดยไม่มีการพิสูจน์ 10 ประโยคก่อนเป็นอักเซียม 5 ประโยค และ สัจพจน์ 5 ประโยค อักเซียม 5 ประโยคคือ

A.1 สิ่งทั้งหลายที่เท่ากับสิ่งเดียวกันย่อมเท่ากัน

A.2 ถ้าเอาสิ่งที่เท่ากันมาเพิ่มให้สิ่งที่เท่ากันแล้ว ผลย่อมเท่ากัน

A.3 ถ้าเอาสิ่งที่เท่ากันออกจากสิ่งที่เท่ากันแล้ว ส่วนที่เหลือย่อมเท่ากัน

A.4 สิ่งทั้งหลายที่ทับกันได้สนิทนั้นย่อมเท่ากัน

A.5 ส่วนทั้งหมดย่อมใหญ่กว่าบางส่วน

สัจพจน์ ทั้ง 5 คือ

P.1 สามารถลากเส้นตรงจากจุดใด ๆ ไปยังจุดใด ๆ อีกจุดหนึ่งได้

P.2 สามารถเขียนวงกลมที่มีจุดใด ๆ เป็นจุดศูนย์กลางและรัศมียาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดความยาวใด ๆ ที่ลากมาจากจุดศูนย์กลางนั้นได้

P.3 สามารถต่อเส้นตรงที่เห็นว่าจำกัดออกไปโดยไม่มีที่สิ้นสุดได้

P.4 มุมฉากทุกมุมย่อมเท่ากัน

P.5 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้นโดยทำมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเข้าน้อยกว่า 2 มุมฉากแล้ว ถ้าต่อเส้นตรงทั้งสองออกไปโดยไม่มีที่สิ้นสุดเส้นตรงทั้งสองนั้นก็จะไปตัดกันบนข้างที่มุมรวมกันได้น้อยกว่าสองมุมฉาก

จากนั้นก็สร้างทฤษฎีต่าง ๆ จากประโยคทั้ง 10 นี้ได้มากมายถึง 456 บท ยุคลิดใช้วิธีการทางตรรกศาสตร์ที่เรียกว่าการสังเคราะห์ (synthesis) คือเริ่มจากนิยาม ข้อตกลงและทฤษฎีขั้นต้นไปหาทฤษฎีที่ยุ่งยากซับซ้อนตามลำดับ การพิสูจน์ของยุคลิดได้ชื่อว่าเป็นการพิสูจน์โดยอาศัยวิธีการทางตรรกศาสตร์ได้อย่างสวยงามมาก อย่างไรก็ตามในสมัยหลัง ๆ ปรากฏว่า อักเซียม และ สัจพจน์ ทั้ง 10 ของยุคลิดมีผู้ชี้จุดบกพร่องมากมาย นักคณิตศาสตร์สมัยหลังจึงมาแก้ไขข้อบกพร่องทางตรรกศาสตร์ของเรขาคณิตระบบยุคลิด ทำ

ให้เรขาคณิตระบบนี้มีรากฐานทางตรรกศาสตร์ที่สมบูรณ์ขึ้นนักคณิตศาสตร์เหล่านี้ เช่น พาช (Pasch), เปอาโน (Peano), ฮิลแบร์ต (Hilbert) สำหรับฮิลแบร์ต นั้นได้สร้างสัจพจน์ขึ้นเพื่อขจัดข้อบกพร่องของเรขาคณิตระบบยุคลิดและถือกันว่าดีที่สุด

เมื่อพิจารณาข้อตกลงเบื้องต้น 10 ข้อของยุคลิด พบว่าสัจพจน์ที่ 5 ของยุคลิดได้รับการวิพากษ์วิจารณ์มากที่สุด เป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้นักคณิตศาสตร์ผู้ที่มีความสนใจเกี่ยวกับเรื่องนี้ในสมัยต่อ ๆ มาเกิดความพยายามที่จะพิสูจน์ให้ได้ว่าที่ 5 นี้ ควรจะเป็นทฤษฎีมากกว่าเป็นสัจพจน์ เพราะเมื่อพิจารณาดูแล้วจะเห็นได้ว่ากติกาข้อนี้ขาดความรัดกุม และไม่มีความชัดเจนในตัวของมันเอง นักคณิตศาสตร์หลายท่านแปลกใจว่าจำเป็นต้องถือว่า สัจพจน์ที่ 5 เป็นกติกาด้วยหรือมันไม่ใช่ได้มาจากทั้ง 9 ที่มีอยู่นั้นหรือ หรืออย่างน้อยที่สุดมันก็ควรจะมีอย่างอื่นมาใช้แทนที่ดีกว่านี้ อันเนื่องมาจากสัจพจน์ที่ 5 ของยุคลิดที่กล่าวว่า

"ถ้า**เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้นโดยทำให้มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเข้าน้อยกว่าสองมุมฉากแล้ว ถ้าต่อเส้นตรงทั้งสองออกไปโดยไม่มีที่สิ้นสุด เส้นตรงทั้งสองนั้นก็จะไปตัดกันบนข้างที่มุมรวมกันได้น้อยกว่าสองมุมฉาก"** สัจพจน์นี้คือสัจพจน์ของการขนานกัน ยุคลิดเองก็รู้สึกยุ่งยากใจในการให้คำจำกัดความว่า **เส้นขนาน** คืออะไร เขานิยามไว้ในคำนิยามที่ 23 ว่า

"เส้นขนานเป็นเส้นตรงสองเส้นบนระนาบเดียวกันซึ่งไม่ว่าจะต่อปลายทั้งสองออกไปไกลเท่าไร และต่อออกไปทางไหนก็จะไม่พบกันเลย"

ในจำนวนกติกาที่สร้างขึ้นแทนกติกาของยุคลิดนั้น ที่ใช้กันมากที่สุดก็คือ กติกาที่จอห์น เพลย์แฟร์ (John Playfair) ค.ศ. 1748 - 1819 นักคณิตศาสตร์และนักฟิสิกส์ชาวสก๊อต เป็นผู้ทำให้รู้จักกันแพร่หลายอยู่ในปัจจุบันนี้ แม้ว่า ไปรคลัส (Proclus) จะได้กล่าวไว้ตั้งแต่ศตวรรษที่ 15 และมีคนใช้มาก่อนหน้าแล้วก็ตาม กติกานั้นกล่าวว่า **"เราสามารถลากเส้นตรงผ่านจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ให้ขนานกับเส้นตรงอีกเส้นที่กำหนดให้ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น"** ซึ่งมีปรากฏอยู่ในเรขาคณิตชั้นมัธยมทั่วไป ส่วนแบบอื่น ๆ ที่มีผู้เสนอขึ้นมาให้ใช้แทนกติกาเรื่องการขนานของยุคลิดข้อนั้น ที่สำคัญ ๆ คือ

1. จะต้องมีรูปสามเหลี่ยมอย่างน้อยที่สุด 1 แบบที่มีมุมภายในทั้งสามรวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก
2. จะต้องมีรูปสามเหลี่ยมคู่หนึ่งที่คล้ายกัน แต่ไม่เท่ากัน
3. จะต้องมีเส้นตรงอยู่คู่หนึ่งที่อยู่ห่างกันเป็นระยะทางเท่ากันโดยตลอด
4. เราสามารถเขียนวงกลมหนึ่งให้ผ่านจุดใด ๆ 3 จุด ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเส้นเดียวกันได้

5. เราสามารถลากเส้นตรงผ่านจุดใด ๆ ที่อยู่ภายในมุมที่น้อยกว่า 60° ให้ตัดแขนทั้งสองแขนได้

นอกจากนี้ยังมีผู้พยายามเปลี่ยนแปลงกติกาของ สัจพจน์ที่ 5 นี้ให้เป็นทฤษฎีที่สร้างขึ้นบนพื้นฐานของกติกาอีก 9 ข้อที่เหลือได้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าจะพิสูจน์ว่า กติกาสัจพจน์ที่ 5 นั้น โดยแท้ที่จริงไม่ใช่กติกาที่เคยยอมรับโดยไม่มีการพิสูจน์เช่นกติกาข้ออื่น ๆ นักเรขาคณิตพยายามเช่นนี้มามากกว่า 2000 ปี และในที่สุดก็ทำให้คณิตศาสตร์ได้ก้าวหน้าไปไกลที่สุดอีกแง่หนึ่งในจำพวกคณิตศาสตร์แผนใหม่ทั้งหมด และกว่าจะไปไกลถึงขั้นนั้นก็ได้มีการพิสูจน์อยู่หลายอย่าง ผลที่สุดก็จำเป็นต้องใช้กติกาที่ถือว่าเป็นเหมือนกับแบบเดิมได้โดยปริยายนั่นเอง อย่างไรก็ตามจากการที่นักคณิตศาสตร์หลายคนพยายามพิสูจน์ว่าสัจพจน์ที่ 5 เป็นทฤษฎีบท แต่พิสูจน์ไม่ได้ หรือพิสูจน์ได้บ้างแต่ไม่จบ บางพวกก็ได้แต่เสนอแนวคิดเท่านั้นการค้นคว้าเหล่านี้ทำให้เกิดเรขาคณิตนอกระบบยุคลิดขึ้น ขอทำความเข้าใจเกี่ยวกับคำว่าอักเซียมกับ สัจพจน์ ยุคลิดถือว่าคำทั้งสองนี้มีความหมายต่างกันกล่าวคือเขาถือว่า อักเซียม หมายถึงสิ่งที่ถือว่าเป็นจริงในวิทยาการทุกแขนง เช่น ถ้าหักสิ่งที่เท่ากันออกจากสิ่งที่เท่ากันส่วนที่เหลือย่อมเท่ากัน เป็นต้น ส่วน สัจพจน์ หมายถึงสิ่งที่ถือว่าเป็นจริงในทางเรขาคณิต เช่น จะลากเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุดใด ๆ ไปยังจุดใด ๆ อีกจุดหนึ่งได้เป็นต้น แต่ในสมัยปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ไม่ถือว่าคำทั้งสองมีความหมายต่างกันบุคคลที่พยายามพิสูจน์สัจพจน์ที่ 5 เริ่มต้นด้วยบุคคลต่อไปนี้

ไตเลมี (Ptolemy) นักคณิตศาสตร์กรีก ค.ศ. 85 - 165 ซึ่งมีชื่อไปพ้องกับกษัตริย์อียิปต์ไตเลมีมีแนวความคิดดังนี้

พิจารณาเส้นขนานและเส้นผ่า (transversal) ถ้าต่อเส้นผ่านี้ออกไปเส้นผ่าจะไม่ขนานกับเส้นทั้งสอง ผลบวกที่เกิดจากมุมภายในทางด้านหนึ่งจะมากกว่าสองมุมฉาก และอีกด้านหนึ่งเช่นกัน ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะผลบวกของมุมทั้งสี่จะเป็นสี่มุมฉากบุคคลต่อมาคือ

ไปรคลัส (Proclus) ค.ศ. 410 - 485 เป็นนักคณิตศาสตร์คนสำคัญ ซึ่งให้ความรู้เกี่ยวกับประวัติเรขาคณิตในสมัยแรก ๆ ของกรีก เขาวิจารณ์งานการพิสูจน์ของไตเลมีว่า การพิสูจน์มีจุดอ่อนที่ว่าเป็นการสุ่มที่ว่าเส้นขนานหนึ่งคู่จะเกิดเมื่อมีเส้นตรงที่กำหนดให้ ซึ่งเท่ากับการสุ่มสัจพจน์

ไปรคลัสได้พยายามพิสูจน์ว่า

ถ้ามีเส้นตรงตัดเส้นหนึ่งของเส้นขนานแล้ว เส้นตรงนี้ก็ต้องตัดเส้นขนานอีกเส้นหนึ่งด้วย

แนสร์-เอด-ดิน (Nasr-ed-Din) ค.ศ. 1201 - 1274

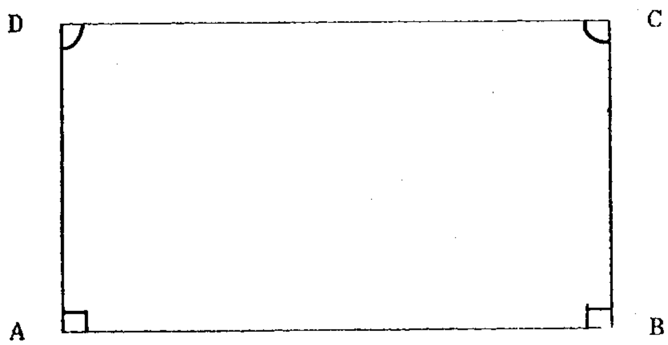
แนสร์-เอด-ดิน เป็นนักดาราศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ชาวเปอร์เซีย เขาสนใจที่จะศึกษาสัจพจน์ที่ 5 เช่นกัน แนสร์-เอด-ดินยืนยันโดยปราศจากการพิสูจน์ว่า **ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมแหลมจะสั้นกว่าด้านที่เกิดเป็นมุมแหลม** จากข้อสรุปนี้เขาได้นำไปใช้เป็นแนวคิดในการพิสูจน์ผลงานต่อไป แต่ก็ได้เป็นเพียงแนวความคิดเท่านั้น เพราะเขาไม่ประสบความสำเร็จในการพิสูจน์สัจพจน์ที่ 5 แต่ความคิดของเขาเป็นความคิดอันสำคัญที่จะพัฒนาต่อมา

จอห์น วอลลิส (John Wallis) ค.ศ. 1616 - 1703

วอลลิสพยายามพิสูจน์สัจพจน์ที่ 5 โดยใช้สมมุติฐานว่า **ถ้ามีรูปสามเหลี่ยมจะสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันอีกรูปหนึ่งไม่ว่าขนาดใด ๆ**

เจอโรลาโม แซคเคอรี่ (Girolamo Saccheri) ค.ศ. 1667 - 1733

แซคเคอรี่เป็นนักบวชนิกายเยซูอิส และเป็นศาสตราจารย์ทางคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยพาเวีย (Pavia) เป็นชาวอิตาลี แซคเคอรี่พยายามพิสูจน์สัจพจน์ที่ 5 โดยวิธีที่เรียกว่า การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง (reductio ad absurdum) นั่นคือ เขาพยายามพิจารณากรณีของรูปที่เป็นไปได้ทั้งหมดแล้วตัดกรณีต่าง ๆ ออกไปทั้งสิ้นเหลือเพียงกรณีที่มีรากฐานมาจากสัจพจน์ที่ 5 เท่านั้น แซคเคอรี่เขียนหนังสือชื่อ "Euclid Freed of Every Flaw" ในปี ค.ศ. 1733 เพื่อแสดงความพยายามที่จะพิสูจน์สัจพจน์ที่ 5 แซคเคอรี่มีชื่อเสียงเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางอ้อมมองเห็นแนวทางในการนำเอาวิธีนี้มาตรวจสอบกติกาเรื่องการขนานด้วย เขาสามารถแสดงได้ง่าย ๆ ว่า ถ้าในรูปสี่ด้าน ABCD มีมุม A และมุม B เป็นมุมฉากและมีด้าน AD = BC แล้ว มุม D จะต้องเท่ากับมุม C รูปสี่ด้าน นี้เรียกว่า รูปสี่ด้านแซคเคอรี่ (Saccheri quadrilateral) ซึ่งผลที่ได้ขณะนี้มีทางเป็นไปได้อยู่สามกรณีเท่านั้นคือ



รูป 4.1

1. $\hat{D} = \hat{C}$ ต่างก็เป็นมุมฉาก (right angles)

2. $\hat{D} = \hat{C}$ ต่างก็เป็นมุมแหลม (acute angles)

1. $\hat{D} = \hat{C}$ ต่างก็เป็นมุมป้าน (obtuse angles)

ทั้งสามกรณีนี้ แซคเคอรี่ให้ชื่อว่าเป็นสมมุติฐานว่าเป็นมุมแหลม (hypothesis of the acute angles) สมมุติฐานว่าด้วยเป็นมุมฉาก และสมมุติฐานว่าด้วยเป็นมุมป้าน ตามลำดับ และกำหนดแบบงานที่ต้องทำไว้ว่าจะต้องแสดงว่าสมมุติฐานแบบที่ 1 หรือไม่ก็แบบที่ 3 อย่างใดอย่างหนึ่ง จะต้องเป็นแบบที่นำไปสู่ข้อขัดแย้งให้ได้ จากนั้นโดยวิธีพิสูจน์ทางอ้อมก็จะสรุปได้ว่า สมมุติฐานแบบที่ 2 ต้องใช้ได้ แซคเคอรี่ ยังสามารถแสดงต่อไปว่าสมมุติฐานนี้ก็เหมือนกับเป็นการพิสูจน์กติกาเรื่องการขนานอยู่ในตัวแล้วด้วย

สำหรับการพิสูจน์ว่าสมมุติฐานแบบที่ 3 เป็นไปไม่ได้นั้น เราถือว่าเส้นตรงยาวไม่จำกัดด้วยซึ่งทำให้พอจะพิสูจน์ได้ แต่การขจัดสมมุติฐานแบบที่ 1 ทำได้ไม่ง่ายนัก และมาทราบภายหลังว่าถ้าในตอนนี้เขาไม่มีความปรารถนาอย่างแรงกล้าที่จะพิสูจน์ว่าเป็นไปไม่ได้ แต่ยอมรับว่าไม่สามารถหาขัดแย้งใด ๆ ได้แล้วก็ไม่มีปัญหาเลยว่า แซคเคอรี่จะต้องได้รับเกียรติว่าเป็นผู้ค้นพบเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด (Non-Euclidean Geometry) เป็นคนแรก แต่นี่ไม่ใช่เช่นนั้นและงานของเขาก็มีคนรุ่นเดียวกันให้ความสนใจน้อยมากจนในไม่ช้าก็ถูกลืมไป เพิ่งมามีคนชาติเดียวกันคือ บัลตรามิ (Baltrami) ค.ศ. 1835-1900 รื้อฟื้นขึ้นมาเมื่อ ค.ศ. 1889 นี่เอง

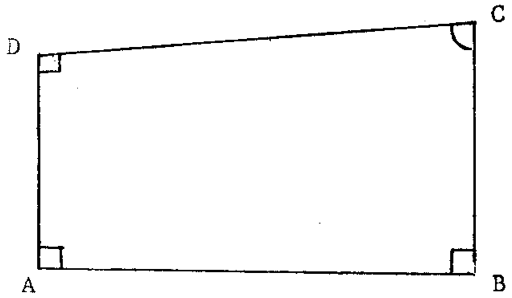
แต่ทว่างานการค้นคว้าพิสูจน์เป็นสิ่งที่ยากแซคเคอรี่จึงพยายามตั้งทฤษฎีหลายบท เฉพาะที่สำคัญที่จะขอเพิ่มเติมจากผลงานเดิม คือ เขาพิสูจน์ว่าหากสมมุติฐานอันใดอันหนึ่งเป็นจริงขึ้นในรูปสี่ด้านแซคเคอรี่รูปหนึ่งแล้วสมมุติฐานนั้นย่อมเป็นจริงสำหรับรูปสี่ด้านแซคเคอรี่ทุกรูป

สมมุติฐานทั้งสามของเขามีทั้งมุมฉาก มุมป้าน และมุมแหลม จะทำให้ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งย่อมจะเท่ากับมากกว่าหรือน้อยกว่าสองมุมฉาก

โยฮัน ลัมแบร์ต (Johann Lambert)

ลัมแบร์ตเป็นชาวเยอรมัน หลังจากแซคเคอรี่ตีพิมพ์หนังสือเล่มนั้นได้ 33 ปี ลัมแบร์ตก็เขียนหนังสือตรวจสอบแบบคล้าย ๆ กัน ไว้ในหนังสือชื่อ Die theorie der Parallelinen ในการพิสูจน์เขาเลือกเอารูปเหลี่ยมคล้าย ๆ กับของแซคเคอรี่ที่มีมุมฉาก 3 มุม (ครึ่งหนึ่งของรูปของแซคเคอรี่เป็นหลัก) และสมมุติฐานทั้งสองข้อ กล่าวคือ แซคเคอรี่เพียงแต่แสดงไว้ว่าตามสมมุติฐานทั้ง 3 นั้นจะได้ว่ามุมภายในของสามเหลี่ยมจะต้องรวมกันได้น้อยกว่า เท่ากับหรือมากกว่าสองมุมฉาก ตามที่ได้จากสมมุติฐานแบบที่ 1 หรือแบบที่ 3 นั้นจะต้องเป็นสัดส่วนกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนั้นด้วย แต่ถึงกระนั้นการพิสูจน์สมมุติฐานทั้งสอง

แบบว่าจะต้องเกิดขึ้นไม่ได้นั้นเขาก็ทำได้ไม่ดีไปกว่าแซคเคอรี่



รูปที่ 4.2

คาร์ล ฟรีดริค เกาส์ (Carl Friedrich Gauss) เยอรมัน ค.ศ.1777-1855

เกาส์เป็นชาวเยอรมันที่สนใจสัจพจน์ที่ 5 ของยุคลิด เขามีความเห็นว่าเรขาคณิตแบบยุคลิดเป็นเพียงความจริงที่แท้ จึงคิดว่าไม่มีประโยชน์ที่จะยึดมั่นอีกต่อไป อาจกล่าวได้ว่าเกาส์เป็นคนแรกที่ยอมรับความคิดที่แตกต่างไปจากเรขาคณิตของยุคลิด เขาพยายามคิดและสร้างทฤษฎีขึ้นใหม่เขารวบรวมเอาเรื่องราวของเรขาคณิตนอกระบบยุคลิดไว้มากมาย แต่ก็ไม่ได้พิมพ์เผยแพร่

นิโคไล อิวาโนวิช โลบาเชฟสกี้ (Nikolai Iwanowich Lobachevsky) ค.ศ. 1793-1856

ศาสตราจารย์วิชาคณิตศาสตร์แห่งมหาวิทยาลัยคาแซน (Kasan) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย เขาสนใจในทฤษฎีเส้นขนานตั้งแต่ปี ค.ศ.1815 ปี ค.ศ.1823 ได้เขียนตำราวิชาตรีโกณมิติเพื่อสอนในมหาวิทยาลัยที่สอนอยู่แต่มิได้ถูกพิมพ์ขึ้น ซึ่งต้นฉบับคงถูกเก็บรักษาไว้จนปี ค.ศ. 1909 จึงถูกค้นพบและมีการพิมพ์ขึ้น เขาได้กล่าวไว้ว่าการค้นคว้าเรื่องราวของเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด และการค้นพบที่ทำแต่ก่อนรวมทั้งการพิสูจน์ต่าง ๆ ที่พยายามทำกันขึ้นจะถูกยอมรับแต่เพียงคำวิจารณ์ คำอธิบายไม่มีค่าพอที่จะได้รับการยอมรับว่าเป็นการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เลย สามปีต่อมาเขาได้เสนอเรื่อง "หลักเกณฑ์ในทางตรีโกณมิติและความเข้าใจที่ตรงจุดเรื่องราวที่น่าสนใจของทฤษฎีเส้นขนาน" "(Exposition succinte des primcipdes de la geometric avic rend domonstration regourouse du theoreme des poralleles)" ไปยังแผนกฟิสิกส์และคณิตศาสตร์แห่งมหาวิทยาลัยคาแซน ในเล่มเขาอธิบายหลักเกณฑ์ทั่วไปของเรขาคณิตในจินตนาการซึ่งกว้างขวางกว่า

ของยุคลิด เช่นที่ว่าเส้นขนานสองเส้นลากมายังจุด ๆ หนึ่ง โดยผ่านจุดหนึ่งที่กำหนดให้ และผลบวกของมุมภายในสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จะน้อยกว่าสองมุมฉากเสมอ

ผลงานเกี่ยวกับสัจพจน์ของความขนานถูกพิมพ์เป็นครั้งแรกใน วารสารคาแซน (Kasan Bulletin) ในปี ค.ศ. 1829 - 1830 ผลงานของเขาพิมพ์เผยแพร่ก่อนของโบลไย (Bolyai) เสียอีก แต่ผลงานของเขาพิมพ์เป็นภาษารัสเซีย จึงยากแก่นักคณิตศาสตร์ชาติอื่น ๆ จะเข้าใจได้

จาโนส์ โบลไย (Janos Bolyai) ค.ศ. 1802 - 1860

โบลไยเป็นชาวฮังการีเป็นลูกของแฟรงค์ วอล์ฟกัง โบลไย (Frank Volfgang Bolyai) เขาเป็นศาสตราจารย์คณิตศาสตร์ที่ Maros-Vssaihely ปี ค.ศ. 1804 ได้ส่งผลงานเกี่ยวกับทฤษฎีเส้นขนานไปให้เกาส์ แต่เขาก็ถูกคัดค้านและชี้แจงข้อผิดพลาดอยู่เสมอ เขาก็แก้ไปให้ใหม่ในปีค.ศ.1808 ในปี ค.ศ. 1823 เป็นปีที่โบลไยทำงานเพื่อทฤษฎีนอกระบบยุคลิดอย่างจริงจัง ซึ่งโบลไยผู้พ่อก็ได้แนะนำให้เขาจัดพิมพ์ผลงานออกมาให้แพร่หลาย

ซึ่งเป็นจริงเพราะเมื่อเขาเผยแพร่ผลงานออกไป ก็มีอีกหลาย ๆ คนกำลังค้นพบอยู่ด้วยคือ โลบาเชฟสกี้ ที่คาแซน, เกาส์ ที่ คัตทิงเกน, ทอร์บัส ที่ โคโลญ ผลงานของโบลไยถูกพิมพ์ทั้งหมดเมื่อปี ค.ศ. 1832 แต่อย่างไรก็ตาม โบลไยก็ดีใจที่ค้นพบก่อนโลบาเชฟสกี้แห่งรัสเซีย และโลบาเชฟสกี้ก็ไม่เคยได้ยินชื่อโบลไยมาก่อนเลยทั้ง ๆ ที่ทั้งสองติดต่อกับเกาส์ทั้งทางตรงและทางอ้อมหลังจากนั้นทั้งสองก็มีกำลังใจและกล้าที่จะแสดงผลงานของตนที่เคยส่งให้เกาส์ออกเผยแพร่ด้วยตนเองในปัจจุบันเราถือว่าทั้งโบลไย และโลบาเชฟสกี้ ต่างก็ค้นพบโดยไม่เกี่ยวข้องกันเลย

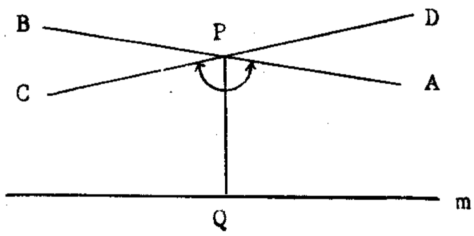
เกาส์ โบลไย และโลบาเชฟสกี้ ได้สร้างสัจพจน์ที่ 5 ขึ้นใหม่ สัจพจน์ที่ 5 ของยุคลิดซึ่ง เพลย์แฟร์ ได้แก้แล้วกล่าวคือ

"จะสามารถลากเส้นขนานผ่านจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ และขนานกับเส้นที่กำหนดให้นี้ได้เพียงเส้นหนึ่งและเส้นเดียวเท่านั้น"

เกาส์ โบลไย และโลบาเชฟสกี้ ได้เขียนสัจพจน์ที่ 5 เสียใหม่ว่า

"จะสามารถลากเส้นขนานผ่านจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นที่กำหนดให้ และขนานกับเส้นที่กำหนดให้นี้ได้มากกว่าหนึ่งเส้น"

จากสัจพจน์ใหม่นี้รวมกับข้อสมมุติอื่น ๆ ของเรขาคณิตระบบยุคลิด ทำให้เราสามารถแสดงได้ว่ามีเส้นตรงสองเส้นที่ผ่านจุด P และไม่ตัดกับเส้น m



รูป 4.3

เส้นขนานสองเส้นนี้คือ $\overleftrightarrow{AB}$ กับ $\overleftrightarrow{CD}$ ซึ่งต่างก็ทำให้เกิดมุมแหลมกับเส้นตั้งฉาก $\overleftrightarrow{PQ}$ ที่ลากจาก P มายัง m มุมแหลมทั้งสองนี้คือ α และเท่ากันด้วย เส้นใด ๆ ก็ตามที่ผ่านจุด P และอยู่ในมุม APC จะตัด m ส่วนเส้นอื่น ๆ จะไม่ตัดเส้น m เส้นสองเส้นที่ผ่านจุด P นี้ก็จะเป็นเส้นขอบเขตที่แบ่งเส้นทั้งหลายที่ผ่านจุด P ออกเป็นสองพวก พวกหนึ่งตัด m จะขนานกับ m โลบาเชฟสกี้ เรียกเส้นสองเส้นคือ $\overleftrightarrow{AB}$ กับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่เป็นเส้นแบ่งเขตนี้ว่าเป็นเส้นขนานกับ m ส่วนเส้นอื่น ๆ ที่ผ่าน P และไม่ตัด m เรียกว่าไฮเพอร์พาราลเลล (hyperparallel) กับ m มุมแหลม α นี้เรียกว่า **มุมแห่งการขนาน** (angle of parallelism) โลบาเชฟสกี้ย้ำว่ามุม α นี้ขึ้นอยู่กับ h ซึ่งเป็นความยาวของเส้นตั้งฉาก $\overleftrightarrow{PQ}$ เขาแทน $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นฟังก์ชันว่า $\pi(h)$ เขาแสดงต่อไปว่า ถ้า

$$\alpha = 2 \text{ arc } \tan e^{-1}$$

จะได้

$$\pi(h) = 2 \text{ arc } \tan e^{-1}$$

และ

$$h = \ln \cot \frac{\pi(h)}{2}$$

เราจะเห็นว่ามุมแห่งการขนานกัน $\alpha = \pi(h)$ นี้เพิ่มจาก 0 ถึง $\pi/2$ ขณะที่ h ลดจาก ∞ มา 0

เมื่อ $h \to \infty$ และ $\alpha \to 0$ เส้นที่ผ่านจุด P ก็จะไม่ตัด m ทำให้เราเห็นว่าจะมีเส้นขนานสองเส้นที่ไม่ตัด m

เรขาคณิตของบุคคลทั้งสามนี้เรียกว่า เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic geometry) และเรขาคณิตโดยสัจพจน์ใหม่นี้และมีผลทำให้มุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันย่อมน้อยกว่า 2 มุมฉาก นั่นคือผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC ในระนาบไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic plane)

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 180^{\circ}$$

แบร์นฮาร์ด รีมันน์ (Riemann Bernhard) ค.ศ. 1826-1866 ชาวเยอรมัน

รีมันน์ เป็นศิษย์ของเกาส์ ได้เสนอแนวความคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตใหม่ขึ้นในปี ค.ศ. 1854 เป็นเรขาคณิตที่ไม่มีเส้นขนาน รีมันน์ ได้เขียนสัจพจน์ที่ 5 เสียใหม่ว่า

"ถ้าลากเส้นผ่านจุดที่ไม่อยู่บนเส้นที่กำหนดให้แล้ว จะไม่มีเส้นใดเลยที่ไม่ตัดกับเส้นที่กำหนดให้นี้

เขาสามารถแสดงว่า ถ้าเราไม่สมมุติว่าเส้นตรงมีความยาวไม่จำกัดแล้ว และยึดถือใหม่ว่าเพียงแต่ไม่สิ้นสุดหรือไม่มีขอบเขตขีดคั่นได้เท่านั้น เมื่อได้เปลี่ยนแปลงกติกาอื่น ๆ อีกเล็กน้อยก็ทำให้เกิดมีเรขาแบบที่ไม่ใช่ยุคลิดขึ้นอีกแบบหนึ่ง โดยใช้สมมุติฐานว่าเป็นมุมป้านนั้น

เรขาคณิตของรีมันน์นี้เรียกว่าเรขาคณิตอิลลิปติก (Elliptic Geometry) เรขาคณิตชนิดนี้มีผลทำให้ผลบวกของมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมย่อมมากกว่า 2 มุมฉาก นั่นคือในสามเหลี่ยมใด ๆ เรขาคณิตอิลลิปติก จะได้

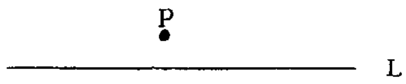
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^{\circ}$$

เฟลิกซ์ ไคลน์ (Felix Klien) ค.ศ. 1849 - 1925

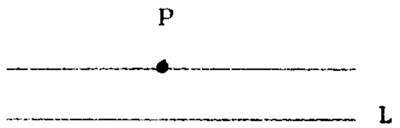
ไคลน์ได้พยายามสร้างเรขาคณิตขึ้นใหม่ ในศตวรรษที่ 19 และกลายเป็นเรขาโปรเจกทีฟ ไคลน์แบ่งเรขาคณิตออกเป็น 3 แบบ ในปี ค.ศ. 1871 คือ

1. เรขาคณิตแบบ โบลไย, โลบาเชฟสกี้ เรียกว่า เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก
2. เรขาคณิตแบบยุคลิด เรียกว่า เรขาคณิตพาราโบลิก
3. เรขาคณิตแบบรีมันน์ เรียกว่า เรขาคณิตอิลลิปติก

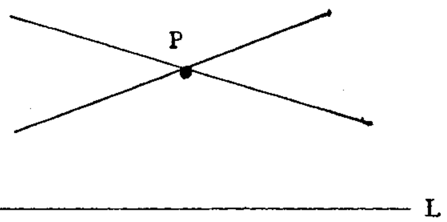
การแบ่งนี้ตั้งอยู่บนรากฐานของจำนวนเส้นขนานที่ผ่านจุดที่กำหนดให้ ถ้าไม่มีเส้นขนานเลยก็เป็น เรขาคณิตอิลลิปติก ถ้ามีเส้นขนาน 1 เส้น ก็เป็น เรขาคณิตพาราโบลิก ถ้ามีเส้นขนานมากกว่า 1 เส้น ก็เป็น เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก



ไม่มีเส้นขนานเลย อิลลิปติก



มีเส้นขนาน 1 เส้น พาราโบลิก



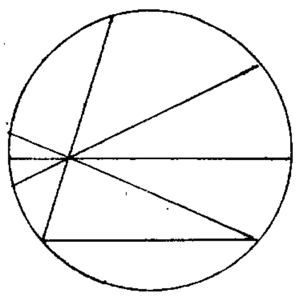
มีเส้นขนานมากกว่า 1 เส้น ไฮเพอร์โบลิก

รูป 4.4

จากนี้จะเห็นว่าเรขาคณิตอิลลิปติกนั้นก็คือเรขาคณิตของรีมันน์ เรขาคณิตพาราโบลิกคือเรขาคณิตระบบยุคลิด เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกนั้นคือเรขาคณิตของโบลไยและโลบาเชฟสกี้ บางครั้งจึงเรียกเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกว่า เรขาคณิตรีมันน์ และเรียกเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกว่าเรขาคณิตโลบาเชฟสกี้ การจำแนกเรขาคณิตของ ไคลน์นี้เป็นที่ยอมรับกันและใช้กันอยู่ทุกวันนี้

ในปี ค.ศ. 1871 ไคลน์ ชี้ให้เห็นว่า เรขาคณิตของรีมันน์นั้นมี 2 อย่าง อย่างแรกก็คือบนทรงกลม ซึ่งมีความจริงว่าเส้น 2 เส้น จะตัดกันเป็นจุด 2 จุด และอีกอย่างหนึ่งก็คือ บนทรงรีซึ่งความจริงว่าเส้น 2 เส้น จะตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้นด้วยคุณสมบัติของจุดตัดของเส้นนี้แหละ ไคลน์ จึงเรียกเรขาคณิตทั้งสองประเภทว่า double-elliptic และ single-elliptic ตามลำดับ

ไคลน์ ได้สร้างตัวแบบสำหรับเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกขึ้น ซึ่งเขาได้รับอิทธิพลมาจาก เคย์เล่ย์ (ค.ศ.1820 - 1895) นักคณิตศาสตร์อังกฤษ ตัวแบบของไคลน์สำหรับเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกเป็นดังนี้



รูป 4.5

"ระนาบ" ประกอบด้วยจุดที่อยู่ภายในวงกลมเท่านั้น จุดนอกวงกลมไม่นับว่าอยู่บนระนาบ แต่ละจุดที่อยู่ในวงกลมเราเรียกว่า "non-Euclidean point" คอร์ดแต่ละเส้นของวงกลมเรียกว่า non-Euclidean "straight line" จากนี้จะเห็นว่า สัจพจน์ที่ 1 ถึงที่ 4 ของยุคลิดเป็นจริง ในตัวแบบนี้และสัจพจน์ของการขนานในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกก็เป็นจริงด้วย

คำว่าเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด (non-Euclidean Geometry) นี้มีชื่อเรียกเป็นครั้งแรกโดย เกาส์ซึ่งเขาเรียกเรขาคณิตที่คิดขึ้นใหม่ว่าเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด ในปัจจุบันนี้คำว่านอกระบบยุคลิดมิได้หมายเฉพาะถึงเรขาคณิตของเกาส์เท่านั้น **โดยปกติคำว่านอกระบบยุคลิดหมายถึง เรขาคณิตอิลลิปติก และ เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก** ส่วนเรขาคณิตอื่น ๆ ที่ไม่ได้ใช้สัจพจน์ของการขนานหรือสัจพจน์ที่ 5 ของยุคลิด นั้น เรียกว่า **เรขาคณิตที่ไม่ใช่ยุคลิด** (not-Euclidean geometry) นั่นก็หมายความว่า non-Euclidean geometry กับ not-Euclidean geometry มีความหมายต่างกัน ดังนั้นเราจึงเห็นว่าเรขาคณิตนอกระบบยุคลิดเป็นเซตย่อยของเรขาคณิตที่ไม่ใช่ระบบยุคลิด

กิจกรรมการเรียนที่ 4.1

1. เรขาคณิตนอกระบบยุคลิดมีประวัติและความเป็นมาอย่างไร จงอธิบาย
2. นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ คาร์ล ฟรีดริค เกาส์ (Carl Friedrich Gauss) ค.ศ. 1977-1855) กับนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียชื่อ นิโคไล อิวาโนวิช โลบาเชฟสกี้ (Nikolai Iwanovich Lobacheoski ค.ศ. 1792-1856) มีบทบาทอย่างไรในพัฒนาการของเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด
3. เกาส์และโลบาเชฟสกี้มีความเห็นเกี่ยวกับเส้นขนานในเรขาคณิตนอกระบบยุคลิดอย่างไร
4. Riemannian Geometry เป็นอีกชื่อหนึ่งที่ใช้เรียกเรขาคณิตระบบใด นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ แบร์นฮาร์ด รีมันน์ (Bernhard Riemann ค.ศ. 1826-1866) กล่าวถึงเส้นขนานในเรขาคณิตรีมันน์อย่างไร

4.2 เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก

เริ่มต้นตั้งแต่ปลายคริสต์ศตวรรษที่ 18 ถึงคริสต์ศตวรรษที่ 19 ได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านได้พยายามที่จะพิสูจน์สัจพจน์เกี่ยวกับเส้นขนานของยุคลิดว่าสัจพจน์นี้ไม่เป็นผลสืบเนื่องมาจากสัจพจน์อันอื่น แต่การพิสูจน์ของบรรดานักคณิตศาสตร์เหล่านั้นก็ไม่เป็นผลสำเร็จ

นักคณิตศาสตร์ที่มีความเห็นขัดแย้งกับสัจพจน์เส้นขนานของยุคลิดนั้น มีอยู่ด้วยกัน 3 ท่าน คือ เกาส์ โบลไย และ โลบาเชฟสกี้

ถึงแม้ว่าบุคคลทั้งสามจะมีชีวิตอยู่คนละประเทศก็ตาม แต่เขาก็มีความคิดตรงกันในการที่จะเขียนสัจพจน์เกี่ยวกับเส้นขนานขึ้นใหม่ซึ่งมีข้อความขัดแย้งกับสัจพจน์เส้นขนานของยุคลิด คือ สัจพจน์เส้นขนานของยุคลิด โดยจอห์น เพลย์แฟร์ ได้กล่าวไว้ว่า

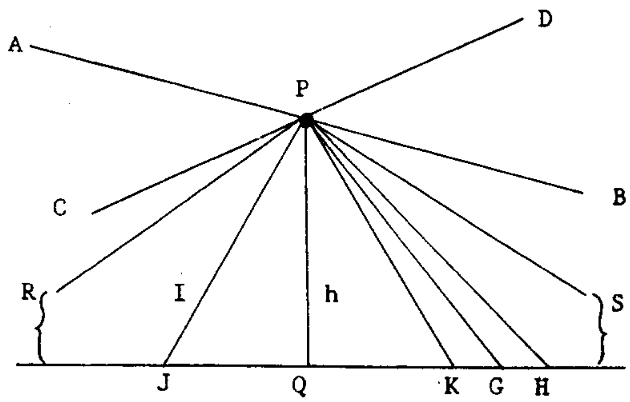
จะสามารถลากเส้นขนานผ่านจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นที่กำหนดให้ และขนานกับเส้นที่กำหนดให้ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

สัจพจน์ใหม่ของเกาส์ โบลไย และโลบาเชฟสกี้ กล่าวว่า

"จะสามารถลากเส้นขนานผ่านจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นที่กำหนดให้ และขนานกับเส้นที่กำหนดให้นี้ ได้มากกว่าหนึ่งเส้น"

จากสัจพจน์ใหม่นี้ ทำให้เกิดเรขาคณิตระบบใหม่ขึ้นอีกระบบหนึ่ง ซึ่งไม่ใช่เรขาคณิตแบบของยุคลิด เรียกว่า เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก และเพื่อเป็นการให้เกียรติแก่โลบาเชฟสกี้ ผู้คิดเรขาคณิตระบบไฮเพอร์โบลิกนี้จึงมีชื่ออีกชื่อหนึ่งว่า ***เรขาคณิตของโลบาเชฟสกี้*** (Lobachevskian Geometry)

จากสัจพจน์ใหม่นี้ ทำให้เราพบว่า ถ้าหากมีเส้นตรงที่มากกว่าหนึ่งเส้น ที่ผ่านจุดที่กำหนดให้และไม่ตัดกับเส้นตรงที่กำหนดให้แล้ว จำนวนเส้นตรงที่ผ่านจุดนั้นจะมีมากมาย (Infinite) ถ้า P เป็นจุดที่กำหนดให้ (รูป 4.6) l เป็นเส้นที่กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ผ่านจุด P โดยไม่พบกับเส้นตรง l แล้วเส้นตรงใด ๆ ก็ตามที่ผ่านจุด P ซึ่งอยู่ภายในมุม APC และ DPB จะไม่พบกับเส้นตรง l ด้วย



รูป 4.6

ถ้าเริ่มต้นจากเส้นตั้งฉาก $\overleftrightarrow{PQ}$ ซึ่งลากจากจุด P ไปตั้งฉากกับเส้นตรง l ที่จุด Q โดยให้เส้น $\overleftrightarrow{PQ}$ หมุนไปรอบจุด P ขั้นแรกให้หมุนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เส้น $\overleftrightarrow{PQ}$ ก็จะยังคงพบกับเส้น l ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งหมุนไปถึงจุดหนึ่งที่ $\overleftrightarrow{PQ}$ จะไม่พบกับเส้น l ดังนั้นจะเห็นว่าบรรดาเส้นตรงที่ผ่านจุด P นั้นจะถูกแบ่งออกเป็น 2 เซต คือ เซตของเส้นตรงที่พบกับเส้นตรง l และเซตของเส้นตรงที่ไม่พบกับเส้นตรง l

จากสัจพจน์ของเดเดคินด์ ได้กล่าวไว้เกี่ยวกับเซตของเส้นตรงที่ผ่านจุด P นี้ว่า ถ้าเราแบ่งเส้นตรงที่ผ่านจุด P ออกเป็น 2 เซต ดังกล่าวมาแล้วนั้น จะต้องมีเส้นตรงที่เป็นเส้นสุดท้ายที่ตัดกับเส้นตรง l หรือว่าจะต้องมีเส้นแรกที่ไม่ตัดกับเส้นตรง l แต่ว่าในกรณีนี้ เราไม่สามารถที่จะหาเส้นสุดท้ายที่พบกับเส้นตรง l ได้ หรืออีกนัยหนึ่งเราไม่สามารถจะบอกได้ว่า เส้นตรงเส้นแรกที่ไม่พบกับเส้นตรง l นั้น อยู่ที่ใด

สมมุติว่าให้ $\overleftrightarrow{PG}$ เป็นเส้นตรงเส้นสุดท้ายที่พบกับเส้นตรง l และให้ $m(\overline{GH})$ เป็นระยะทางจาก G ไปในทางตรงข้ามกับ Q ถึงจุด H แต่ $\overleftrightarrow{PH}$ ก็ยังคงเป็นเส้นตรงที่พบกับเส้นตรง l อยู่ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่เราสมมุติไว้ข้างต้นว่า $\overleftrightarrow{PG}$ เป็นเส้นสุดท้ายที่ตัดกับเส้นตรง l ดังนั้นเราจึงไม่อาจที่จะหาเส้นตรงเส้นสุดท้ายที่พบกับเส้นตรง l ได้ และถ้าหากว่า $\overleftrightarrow{PQ}$ หมุนไปในทางตามเข็มนาฬิกาก็จะได้ผลอย่างเดียวกัน ดังนั้น (ตามรูป) จะทำให้มีเส้นตรงอีกสองเส้นคือ $\overleftrightarrow{PR}$ และ $\overleftrightarrow{PS}$ ที่ผ่านจุด P และไม่พบกับเส้นตรง l และยิ่งไปกว่านั้น มุม RPQ กับมุม SPQ จะต้องเท่ากันด้วย

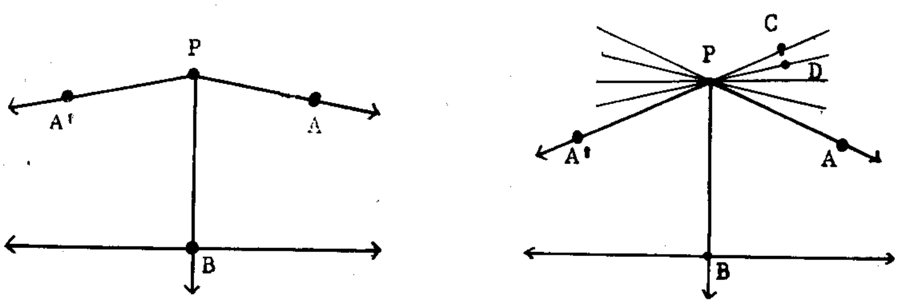
สมมุติให้มุมทั้งสอง คือ มุม RPQ กับมุม SPQ ไม่เท่ากัน ดังนั้นจะต้องมีมุมใดมุมหนึ่งโตกว่า ให้มุม RPQ โตกว่ามุม SPQ เพื่อจะทดสอบสมมุติฐานอันนี้ สร้างมุม IPQ ให้เท่ากับมุม SPQ เส้น $\overleftrightarrow{PI}$ พบกับเส้นตรง l ที่จุด J และจาก จุด Q บนเส้นตรง l วัดระยะ QK ไปในทางตรงข้ามกับ J ให้ $\overline{QK}$ เท่ากับ $\overline{QJ}$ ลาก $\overline{PK}$ จะทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้นสองรูป คือ ΔQPK กับ ΔQPJ และมุม ΔQPK เท่ากับมุม QPJ และจะต้องเท่ากับมุม QPS ด้วย (ตามที่กำหนดให้) แต่ $\overleftrightarrow{PS}$ เป็นเส้นตรงที่ไม่ตัดกับเส้นตรง L เพราะฉะนั้นก็จะเกิดข้อขัดแย้งกับข้อสมมุติฐานข้างต้นว่า มุม RPQ ไม่เท่ากับมุม SPQ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า มุม RPQ จะต้องเท่ากับมุม SPQ

เป็นการง่ายที่จะแสดงว่า ทั้งมุม RPQ และมุม SPQ เป็นมุมแหลม เพราะถ้าหากว่า ถ้าทั้งสองมุมต่างก็เป็นมุมฉากแล้ว $\overleftrightarrow{PR}$ และ $\overleftrightarrow{PS}$ จะต้องอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และจะต้องเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{PQ}$ ด้วยแต่เส้นที่ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{PQ}$ นั้น จะไม่พบกับเส้นตรง l อยู่แล้ว (จากสัจพจน์ของยุคลิด) และจาก สัจพจน์ ใหม่ที่กล่าวไว้ข้างต้นว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด P และไม่พบกับเส้นตรง l นั้น มีอยู่หลายเส้น และเนื่องจากว่า $\overleftrightarrow{PR}$ และ $\overleftrightarrow{PS}$ ไม่ได้อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า จะต้องมีเส้นตรงอีกหลายเส้นที่ผ่านจุด P ภายในมุม RPS แล้วไม่พบกับ เส้นตรง l ดังนั้น มุม RPQ และ SPQ จะต้องเป็นมุมแหลม

จากเหตุผลที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ สามารถที่จะสรุปลงเป็นทฤษฎีได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 3.1 ถ้า l เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ P เป็นจุด ๆ หนึ่งที่ไม่อยู่ใน เส้นตรง l แล้ว จะมีเส้นตรงสองเส้นที่ผ่านจุด P ซึ่งไม่ตัดกับ เส้นตรง l ซึ่งทำให้เกิดมุมแหลม กับเส้นตั้งฉากที่ลากจาก P ไปสู่เส้นตรง l ขึ้นสองมุมเท่า ๆ กัน และเส้นตรงทุกเส้นที่ผ่าน จุด P ภายในมุมแหลมนี้ จะต้องพบกับเส้นตรง l ในขณะที่เส้น อื่น ๆ ไม่พบกับเส้นตรง l

เพื่อให้มองเห็นภาพแนวความคิดใหม่ของเส้นขนาน อาจนึกถึงการหมุนของ รัศมี $\overrightarrow{PB}$ รอบจุด P ซึ่งไม่ได้อยู่บนเส้น m ขณะที่ $\overrightarrow{PB}$ หมุนทวนเข็มนาฬิกาสมมุติว่า $\overrightarrow{PA}$ เป็นรังสีแรกที่ไม่ตัดกับ m (ดังรูป 4.7) กล่าวว่า $\overrightarrow{PA}$ ขนานกับ m



รูป 4.7

ขณะที่ $\overrightarrow{PB}$ หมุนตามเข็มนาฬิกา รังสี $\overrightarrow{PA}$ ถูกสมมุติว่าเป็นรังสีแรกที่ไม่ตัด m ดังนั้นจึงขนานกับ m

ในเรขาคณิตระบบยุคลิดถือว่า รังสี $\overrightarrow{PA}$ และ $\overrightarrow{PA'}$ อยู่บนเส้นเดียวกัน และเป็นเส้นเดียวเท่านั้นที่บรรจุจุด P และขนานกับ m แต่ในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกนั้น รังสีขนานสองรังสีนี้อยู่บนเส้นสองเส้นที่ต่างกัน และเรานิยามว่าแต่ละเส้นเหล่านี้ขนานกับ m

ดังนั้น ถ้า $\overrightarrow{PC}$ เป็นรังสีที่อยู่ตรงข้ามกับ $\overrightarrow{PA}$ ทุก ๆ เส้น $\overleftrightarrow{PD}$ ซึ่ง D เป็นจุดข้างในของ $A\hat{P}C$ ไม่ตัด m (ดังรูป 4.7) มีเพียง $\overleftrightarrow{PA}$ และ $\overleftrightarrow{PA'}$ เท่านั้นที่ขนานกับ m เรียกเส้น m และ $\overleftrightarrow{PD}$ ว่า **เส้นไม่ตัดกัน** (nonintersecting) จะได้ว่า บนระนาบไฮเพอร์โบลิกจึงมีเส้นสามชนิดด้วยกัน

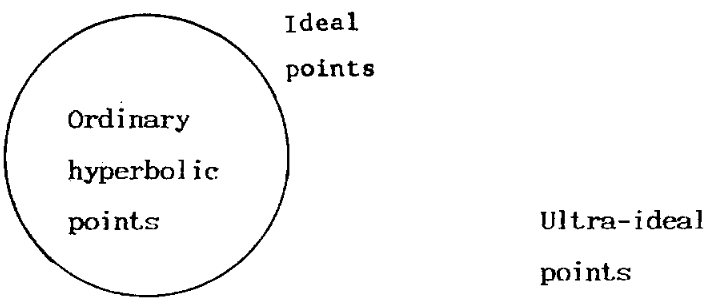
intersecting lines,

parallel lines,

nonintersecting lines.

ถ้า $\overleftrightarrow{PB}$ เป็นเส้นตั้งฉากกับ m ที่ B และ $\overleftrightarrow{PA}$ ขนานกับ m แล้ว $B\hat{P}A$ **เป็นมุมแห่งการขนาน** (angle of parallelism) สำหรับระยะ $\overline{PB}$ ดังรูป 4.7

$B\hat{P}A \cong B\hat{P}A'$



รูป 4.8

เมื่อพิจารณาคุณสมบัติบางประการของเรขาคณิตบนระนาบไฮเพอร์โบลิก ในรูปของตัวแบบหรือตัวแทนของเรขาคณิตระบบนี้ ในเรขาคณิตบนระนาบยุคลิดนั้นใช้ระนาบโคออร์ดิเนตเป็นตัวแบบในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกเราดำเนินตามตัวอย่างของ ไคลน์และปวงกาเร (Poincare) และใช้จุดข้างในของวงกลมบนระนาบยุคลิดเป็นตัวแทนของจุดสามัญ (ordinary hyperbolic points) แม้ว่าการวัดระยะทางและการวัดมุมอาจแตกต่างกัน

ดังรูป 4.8 จุดบนวงกลมเรียกว่า จุดไอดีล (ideal points) และจุดข้างนอกวงกลมเรียกว่า จุดอุลตรา-ไอดีล (Ultra-ideal points) นิยมเรียกวงกลมหนึ่งหน่วยที่กำหนดให้ว่า **absolute** หรือ **fixed circle** สังเกตว่าตัวแทนของระนาบไฮเพอร์โบลิกเป็นเซตย่อยของจุดของระนาบยุคลิด เมื่อใช้ระนาบโคออร์ดิเนตของยุคลิด แต่ละจุด (x,y) อาจนำมาจำแนกแบบของระนาบไฮเพอร์โบลิก คือ

ordinary hyperbolic point ถ้า $x^2 + y^2 < 1$

ideal point ถ้า $x^2 + y^2 = 1$

และ ultra-ideal point ถ้า $x^2 + y^2 > 1$

ไคลน์และปวงกาเรใช้เส้นในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกแตกต่างกันไป โดยไคลน์ใช้จุดข้างในคอร์ดของวงกลม ปวงกาเรพิจารณาเส้นผ่านศูนย์กลางของ fixed circle และเซตของจุดข้างในของ fixed circle ซึ่งอยู่บนวงกลม ซึ่งตั้งฉากกับ fixed circle เส้นไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic lines) สองเส้นมีความสัมพันธ์กันได้สามแบบดังนี้

1. **เป็นเส้นตัดกัน** (intersecting lines) ถ้าเส้นทั้งหมดตัดกันที่จุดธรรมดาเพียงจุดเดียวเท่านั้น

2. **เป็นเส้นขนานกัน** (parallel lines) ถ้าเส้นเหล่านั้นมีจุดไอดีลร่วมกันหนึ่งจุด

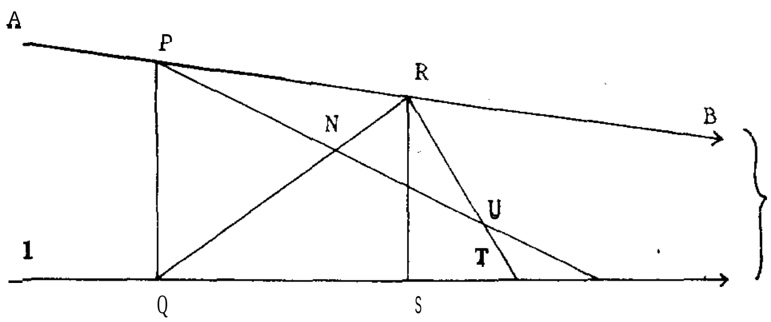
3. **เป็นเส้นไม่ตัดกัน** (nonintersecting lines) ถ้าเส้นเหล่านั้นไม่ตัดกันและไม่ขนานกัน

แบบของปวงกาเรมีประโยชน์มากในการที่จะเข้าใจคุณสมบัติของเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก เราสามารถพิจารณาตัวแบบนี้ในรายละเอียดมากขึ้น เพื่อที่จะทำให้เข้าใจง่ายขึ้น ขอให้คิดถึงเส้นว่าคือวงกลมที่มีรัศมียาวมาก ๆ เราเคยทราบแล้วว่า วงกลมสองวงตั้งฉากกัน เมื่อวงกลมทั้งสองตัดกันเป็นมุมฉาก นั่นคือ เส้นสัมผัสวงกลมที่จุดตัดจะตั้งฉากกับวงกลมที่ A ด้วย เนื่องจากรัศมีใด ๆ $\overline{OA}$ ของวงกลมที่จุดศูนย์กลางที่ O ตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลมที่ A แต่ละคู่ของวงกลมที่ตั้งฉากกันตัดกันที่ A มีเส้นสัมผัสที่บรรจุศูนย์กลางของวงกลมอื่น (การสร้างวงกลมตั้งฉากกับวงกลมที่กำหนดให้กล่าวแล้วในหัวข้อ 1.3)

คุณสมบัติเบื้องต้นของเส้นขนาน

เส้นขนานในเรขาคณิตระบบไฮเพอร์โบลิกนี้ ได้นำเอาความหมายหรือคำนิยามของเส้นขนานของยุคลิดมาใช้ด้วย ซึ่งมีอยู่ด้วยกัน 3 ทฤษฎี ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 4.2 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้แล้ว ทุก ๆ จุดบนเส้นตรงนั้นก็จะขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้



รูป 4.9

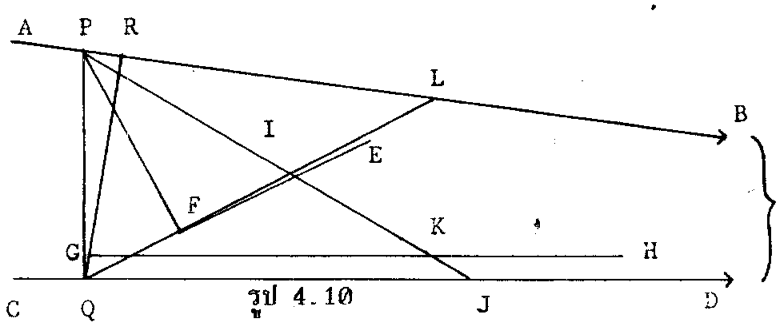
ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ผ่านจุด P และเป็นเส้นขนานทางขวากับเส้นตรง l

เราจะพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นขนานทางขวาของเส้นตรง l ไม่ว่า P จะอยู่ที่ใด ๆ บน $\overleftrightarrow{AB}$

ให้ R เป็นจุดใด ๆ บน $\overleftrightarrow{AB}$ ซึ่งอยู่ถัดจาก $\overleftrightarrow{AP}$ ออกไป ลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ และ $\overleftrightarrow{RS}$ ให้ตั้งฉากกับเส้นตรง l ที่จุด Q และ S ตามลำดับ เราต้องแสดงว่าทุก ๆ เส้นที่ผ่านจุด R และเข้าไปในมุม SRB จะต้องพบกับเส้นตรง l สมมุติให้ $\overleftrightarrow{RT}$ เป็นเส้นตรงที่ลากจาก R และเข้าไปในมุม SRB ซึ่งมี U เป็นจุด ๆ หนึ่งบน $\overleftrightarrow{RT}$

ลาก $\overleftrightarrow{PU}$ และ $\overleftrightarrow{RQ}$ $\overleftrightarrow{PU}$ จะต้องเลยไปตัด l สมมุติให้ตัดที่จุด M และโดยสัจพจน์ของพาช $\overleftrightarrow{PU}$ จะต้องตัด $\overleftrightarrow{RQ}$ ที่ N และโดยสัจพจน์ของพาช อีกครั้งหนึ่ง $\overleftrightarrow{RU}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{QM}$ แต่ $\overleftrightarrow{QM}$ เป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง l เพราะฉะนั้นสรุปได้ว่า เส้นตรงใด ๆ ก็ตามที่ผ่านจุด R และเข้าไปในมุม SRB จะต้องพบกับเส้นตรง l

ทฤษฎีที่ 3.3 ถ้าเส้นตรงเส้นที่หนึ่งขนานกับเส้นตรงเส้นที่สองแล้ว เส้นตรงเส้นที่สองก็จะขนานกับเส้นตรงเส้นที่หนึ่งด้วย



รูป 4.10

ให้ $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นขนานทางขวาของ $\overleftrightarrow{CD}$ ซึ่งผ่านจุด P ลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{QR}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด R จุด R จะต้องอยู่ทางขวาของจุด P เพื่อจะพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{CD}$ จะไม่ตัดกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และจะขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ เราจะต้องแสดงให้เห็นว่า ลากเส้นที่ผ่านจุด Q และอยู่ภายในมุม RQB จะต้องตัดกับเส้นตรง $\overleftrightarrow{RB}$

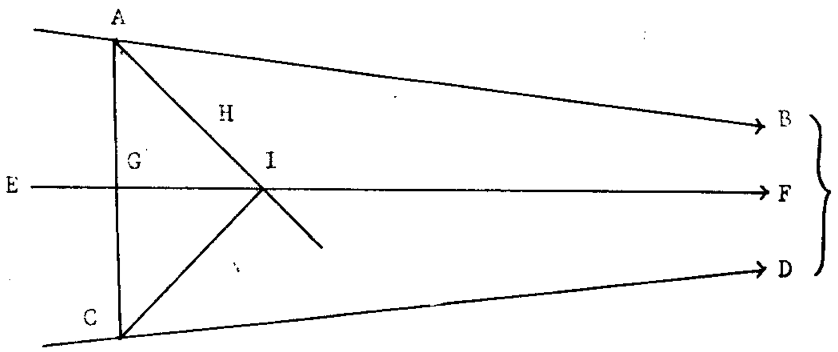
ให้ $\overleftrightarrow{QE}$ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง ที่ลากจากจุด Q เข้าไปในมุม RQD ลาก $\overleftrightarrow{PF}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{QE}$ และ F จะอยู่ด้านเดียวกันกับ E ที่ลากจาก Q บน $\overleftrightarrow{PQ}$ วัดระยะ $m(\overline{PG})$ ให้เท่ากับ $m(\overline{PF})$ จุด G จะอยู่ระหว่าง P และ Q เพราะว่า $m(\overline{PF})$ สั้นกว่า $m(\overline{PQ})$ ลาก $\overleftrightarrow{GH}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{PQ}$ ที่จุด G ต่อไปสร้างมุม GPI ให้เท่ากับ

มุม FPB และต่อ $\overleftrightarrow{PI}$ จนกระทั่งพบกับ CD ที่ J จะเห็นว่า $\overleftrightarrow{GH}$ นั้นตัดด้าน $\overleftrightarrow{PQ}$ ของรูปสามเหลี่ยม PQJ แต่ $\overleftrightarrow{GH}$ จะไม่ตัดด้าน $\overleftrightarrow{QJ}$ และ $\overleftrightarrow{GH}$ จะต้องตัดกับ $\overleftrightarrow{PJ}$ ที่จุดใดจุดหนึ่งสมมุติให้เป็นจุด K

บน PB วัดระยะ $m(\overline{PL})$ ให้เท่ากันกับ $m(\overline{PK})$ และลาก $\overleftrightarrow{FL}$ ดังนั้นรูปสามเหลี่ยม PGK จะเท่ากับรูปสามเหลี่ยม PFL แต่มุม PGK เป็นมุมฉาก เพราะฉะนั้นมุม PFL เป็นมุมฉากด้วย แต่เราสร้าง $P\hat{F}E$ เป็นมุมฉาก ดังนั้น $\overleftrightarrow{FE}$ และ $\overleftrightarrow{FL}$ เป็นเส้นตรงเดียวกัน นั่นคือ $\overleftrightarrow{QE}$ จะตัดกับ $\overleftrightarrow{RB}$ ที่ L

ทฤษฎีที่ 4.4 ถ้าเส้นตรงสองเส้นต่างก็ขนานกันกับเส้นตรงเส้นที่สามแล้วเส้นตรงทั้งสองนั้นก็จะขนานกันด้วย

ขั้นแรกจะพิจารณากรณีที่เส้นตรงเส้นที่สามอยู่ระหว่างเส้นตรงเส้นที่หนึ่งกับเส้นตรงเส้นที่สอง โดยกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ต่างก็ขนานกับเส้นตรง $\overleftrightarrow{EF}$ ไปในทิศทางเดียวกัน



รูป 4.11

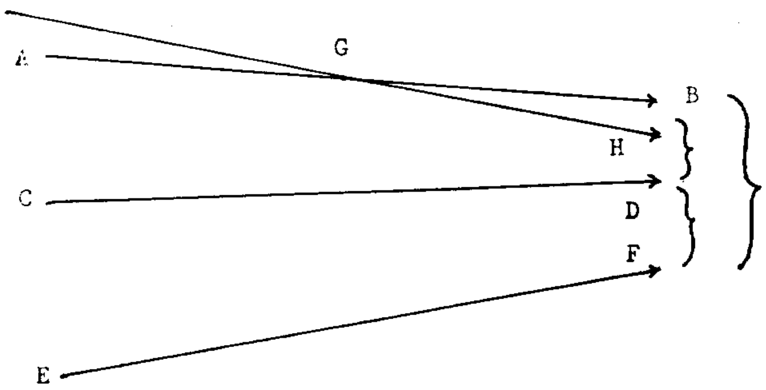
ให้ $\overleftrightarrow{AC}$ ตัดกับเส้นตรง $\overleftrightarrow{EF}$ ที่ G จากจุด A ลากเส้นตรง $\overleftrightarrow{AH}$ ให้เข้าไปในมุม CAB เส้นตรงนี้จะต้องตัดกับ $\overleftrightarrow{EF}$ สมมุติให้เป็นจุด I ลาก $\overleftrightarrow{CI}$

เนื่องจาก $\overleftrightarrow{EF}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ จะทำให้ได้ว่า $\overleftrightarrow{AI}$ ที่สร้างขึ้นมานี้จะตัดกับ $\overleftrightarrow{CD}$

เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB}$ ไม่ตัดกับ $\overleftrightarrow{CD}$ แต่เส้นตรงทุกเส้นที่ลากผ่านจุด A เข้าไปในมุม CAB จะตัดกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ทำให้สรุปได้ว่า $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$

ขั้นต่อไปพิจารณากรณีที่เส้นตรงสองเส้นอยู่ในด้านเดียวกันและต่างก็ขนานกับเส้นที่สาม

โดยให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ต่างก็ขนานกับเส้นตรง $\overleftrightarrow{EF}$ ไปในทิศทางเดียวกัน



รูป 4.12

สมมุติว่า $\overleftrightarrow{AB}$ ไม่ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ให้ G เป็นจุดอยู่บน $\overleftrightarrow{AB}$ ลากเส้นตรงผ่านจุด G ไปถึง H ให้ $\overleftrightarrow{GH}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$

จากที่พิสูจน์มาแล้วในกรณีแรก จะได้ว่า $\overleftrightarrow{GH}$ ต้องขนานกับ $\overleftrightarrow{EF}$ แต่เส้นตรงที่ผ่านจุด G และขนานกับ $\overleftrightarrow{EF}$ จะมีได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น ดังนั้น $\overleftrightarrow{GH}$ จะต้องทับกันสนิทกับ $\overleftrightarrow{AB}$ นั่นคือ $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$

ก่อนที่จะศึกษาแนวความคิดเกี่ยวกับคุณสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตระบบไฮเพอร์โบลิก นักศึกษาจำเป็นต้องมีความรู้เรื่อง**จุดไอดีล** (Ideal Points) และความเกี่ยวข้องกันระหว่างจุดไอดีลกับเส้นขนาน ซึ่งความคิดรวบยอดนี้จะนำไปสู่ความเข้าใจในเรื่องราวต่าง ๆ ได้ชัดเจนขึ้น นักศึกษาเคยทราบว่าเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด ๆ หนึ่งซึ่งอาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า เส้นตรงสองเส้นที่ตัดกันจะมีจุดร่วมกันหนึ่งจุด แต่เส้นตรงซึ่งขนานกันไม่มีจุดธรรมดาร่วมกันทั้งนี้เพราะว่าเส้นตรงที่ขนานกันเป็นเส้นไม่ตัดกัน

อย่างไรก็ตาม **เส้นขนานสองเส้นมีบางสิ่งร่วมกัน**

นั่นคือจุดไอดีล นักศึกษาอาจมองเส้นตรงทุกเส้นที่ขนานกับเส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่งในทิศทางเดียวกันซึ่งแน่นอนว่าเส้นตรงเหล่านั้นจะขนานกันด้วย ในรูปของเส้นตรงหลาย ๆ เส้นที่ไปรวมกันที่จุดยอดที่จุดยอดนั้นคือจุดไอดีล ดังนั้นเมื่อนึกถึงเส้นตรงเส้นหนึ่งต้องคิดว่านอกจากจุดสามัญ (ordinary points หรือ actual points) แล้ว ยังมีจุดไอดีลอยู่บนเส้นตรงนี้ด้วย สำหรับการเส้นตรงผ่านจุด ๆ หนึ่ง ให้ขนานกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งนั้นจะทำให้เกิดจุดไอดีลได้ถึงสองจุดเพราะสามารถลากเส้นขนานให้ขนานกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งได้ถึงสอง

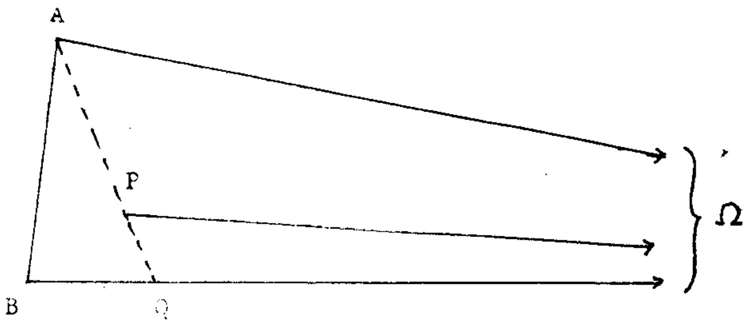
ทิศทางได้แก่เส้นขนานทางขวาและเส้นขนานทางซ้ายต่อไปนี้ขอให้เข้าใจว่าเมื่อกล่าวว่าเส้นตรงสองเส้นไปพบกันที่จุดไอดีลเท่ากับกล่าวว่า เส้นตรงสองเส้นนั้นขนานกันนั่นเอง สำหรับการดำเนินการกับจุดไอดีลนั้นจะปฏิบัติเช่นเดียวกันกับจุดธรรมดานั่นคือสามารถลากเส้นตรงจากจุดธรรมดาไปยังจุดไอดีล หรือลากเส้นตรงจากจุดไอดีลจุดหนึ่งไปยังจุดไอดีลอีกจุดหนึ่งที่ต่างกันได้ ด้วยแนวความคิดเหล่านี้จะก่อให้เกิดคุณสมบัติบางประการของรูปเรขาคณิตที่สำคัญในเรขาคณิตระบบไฮเพอร์โบลิก

นั่นคือรูปเรขาคณิตที่สร้างขึ้นจากเส้นขนานกันสองเส้นและส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดจุดหนึ่งบนเส้นตรงเส้นหนึ่งไปยังจุดที่อยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง รูปเรขาคณิตนี้มีบทบาทสำคัญดังจะได้ศึกษารายละเอียดต่อไป

ให้ $\overleftrightarrow{A\Omega}$ และ $\overleftrightarrow{B\Omega}$ เป็นเส้นขนานสองเส้น เมื่อ Ω (อ่านว่าโอเมก้า) แทนจุดไอดีล ให้ A เป็นจุดบนเส้นตรงแรกและ B เป็นจุดบนเส้นที่สอง ลาก $\overleftrightarrow{AB}$ จะเกิดรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดจุดหนึ่งเป็นจุดไอดีลรูปสามเหลี่ยมนี้มีคุณสมบัติหลายประการเหมือนกับรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งสามจุดเป็นจุดธรรมดา

อันดับแรกจะแสดงก่อนว่าสัจพจน์ของพาชเป็นจริงสำหรับรูปสามเหลี่ยม $AB\Omega$ ดังนี้

ทฤษฎีที่ 4.5 ถ้าลากเส้นตรงผ่านจุดยอดจุดใดจุดหนึ่งของรูป $AB\Omega$ เส้นตรงนี้จะตัดด้านตรงข้าม



รูป 4.13

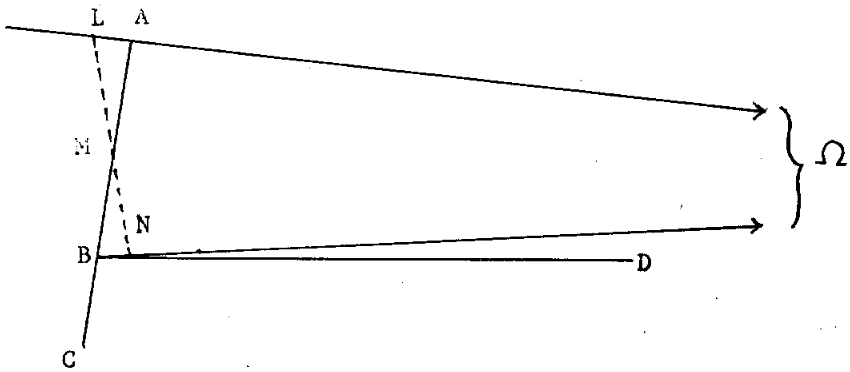
ให้ P (รูป 4.13) เป็นจุดใด ๆ ในรูป ดังนั้น $\overleftrightarrow{AP}$ และ $\overleftrightarrow{BP}$ จะตัด $\overleftrightarrow{B\Omega}$ และ $\overleftrightarrow{A\Omega}$ ตามลำดับเพราะว่า $\overleftrightarrow{A\Omega}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{B\Omega}$ ให้ $\overleftrightarrow{AP}$ ตัด $\overleftrightarrow{B\Omega}$ ที่จุด Q ลาก $\overleftrightarrow{P\Omega}$ ซึ่งเส้นตรงนี้จะตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ตามสัจพจน์ของพาช

ทฤษฎีที่ 4.6 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดด้านด้านหนึ่งของรูป ABΩ แต่ไม่ผ่านจุดยอด เส้นตรงนี้จะตัดด้านที่เหลือเพียงด้านใดด้านหนึ่งเท่านั้น

ถ้าเส้นตรงนี้ตัด $\overrightarrow{A\Omega}$ หรือ $\overrightarrow{B\Omega}$ จะพิสูจน์ได้ง่ายว่าทฤษฎีนี้เป็นจริง ถ้าเส้นตรงนี้ตัดกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด R ลาก $\overleftrightarrow{R\Omega}$ อาศัยทฤษฎี 4.5 จะทำให้พิสูจน์ได้ว่า ทฤษฎีนี้เป็นจริง

ทฤษฎีต่อไปนี้จะกล่าวถึงมุมภายนอกของรูป ABΩ

ทฤษฎีที่ 4.7 มุมภายนอกของรูป ABΩ ที่จุด A และจุด B ที่เกิดขึ้นจากการลาก AB จะโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด



รูป 4.14

ต่อ $\overleftrightarrow{AB}$ (รูป 4.14) ไปทางจุด B จนถึงจุด C จะต้องพิสูจน์ว่ามุม CBΩ โตกว่ามุม BAΩ

ที่จุด B สร้างมุม CBD มี $\overleftrightarrow{BD}$ เป็นแขนหนึ่งของมุม CBD นี้ ปัญหาก็คือ $\overleftrightarrow{BD}$ อยู่ในลักษณะใด นั่นคือ $\overleftrightarrow{BD}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{A\Omega}$ หรือไม่ $\overleftrightarrow{BD}$ ทับกันสนิทกับ $\overleftrightarrow{B\Omega}$ หรือไม่ หรือว่า $\overleftrightarrow{BD}$ อยู่ภายในมุม CBΩ

$\overleftrightarrow{BD}$ ไม่ตัดกับ $\overleftrightarrow{A\Omega}$ อย่างแน่นอนเพราะถ้าตัดกับ $\overleftrightarrow{A\Omega}$ แล้วจะทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมภายนอกเท่ากับมุมภายในมุมหนึ่งที่อยู่ตรงข้าม

สามารถพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{BD}$ ไม่ทับกันสนิทกับ $\overleftrightarrow{B\Omega}$ เพราะถ้าเป็นเช่นนั้นจะทำให้ $\overleftrightarrow{BD}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{A\Omega}$ ซึ่งจะนำไปสู่ข้อขัดแย้งบางประการ การพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{BD}$ ไม่ทับกันสนิทกับ $\overleftrightarrow{B\Omega}$ นี้ต้องสร้างเพิ่มเติมเพื่อการพิสูจน์

แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ที่จุด M ลาก $\overline{MN}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{B\Omega}$ วัดระยะจากจุด A

ซึ่งอยู่บน $\overleftrightarrow{A\Omega}$ ไปในทิศทางตรงข้ามกับ N และทำให้ $\overline{AL} = \overline{BN}$ ลาก $\overline{ML}$

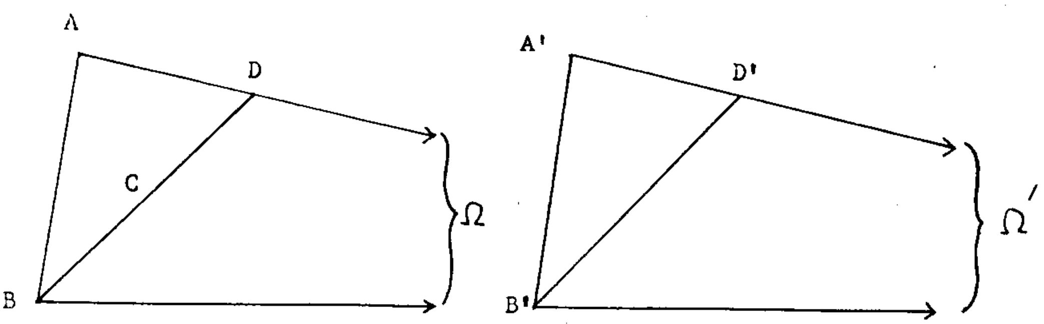
สามารถพิสูจน์ว่า ΔMNB และ ΔMLA ลงรอยกันซึ่งจะทำให้ได้ผลตามมาว่ามุม MLA เป็นมุมฉาก และผลที่จะตามมาอีกก็คือ $\overline{MN}$ และ $\overline{ML}$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ภายใต้ข้อสมมุติที่ว่า $\overleftrightarrow{BD}$ ทับกับ $\overleftrightarrow{B\Omega}$ สนิทกรณีนี้ทำให้ได้ว่า $\overline{LN}$ ตั้งฉากกับทั้ง $\overleftrightarrow{A\Omega}$ และ $\overleftrightarrow{B\Omega}$ และมุมแห่งการขนานสำหรับระยะขนาน $m(\overline{LN})$ เป็นมุมฉากซึ่งเป็นไปไม่ได้ ทำให้ต้องสรุปว่า $\overleftrightarrow{BD}$ ต้องไม่ทับกับ $\overleftrightarrow{B\Omega}$ สนิท

นั่นคือ $\overleftrightarrow{BD}$ จะอยู่ภายในมุม CBΩ และมุม CBΩ โตกว่ามุม CBD ดังนั้น CBΩ โตกว่ามุม BAΩ

ทฤษฎีต่อไปจะกล่าวถึงเงื่อนไขที่จะทำให้รูปสองรูป ABΩ และ A'B'Ω' ลงรอยกัน

ทฤษฎีที่ 4.8 ถ้า $\overline{AB}$ เท่ากันกับ $\overline{A'B'}$ และมุม BAΩ เท่ากันกับมุม B'A'Ω' แล้วมุม ABΩ เท่ากับมุม A'B'Ω' และรูป ABΩ ลงรอยกับรูป A'B'Ω'

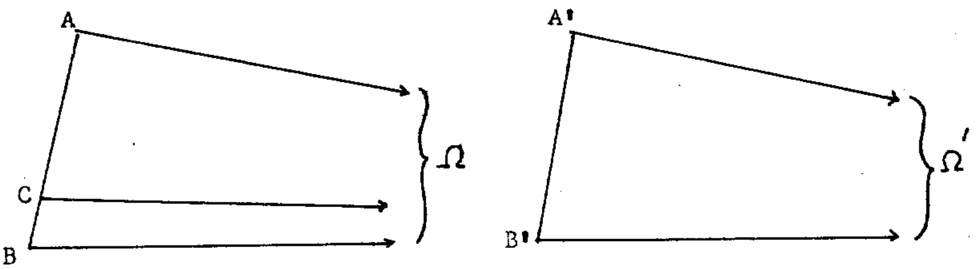


รูป 4.15

ถ้ามุม ABΩ ไม่เท่ากับมุม A'B'Ω' สมมติว่ามุม ABΩ โตกว่า สร้างมุม ABC ให้เท่ากับมุม A'B'Ω' ให้ $\overleftrightarrow{BC}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{A\Omega}$ ที่จุด D วัด $\overline{A'D'}$ บน $\overline{A'\Omega'}$ ให้ $\overline{A'D'}$ เท่ากับ $\overline{AD}$ ลาก $\overline{B'D'}$ ดังนั้นรูปสามเหลี่ยม ABD ลงรอยกับ

รูปสามเหลี่ยม A'B'D' จะได้ว่ามุม A'B'D' ลงรอยกับมุม ABD และจะได้ผลตามมาว่าลงรอยกับ A'B'Ω' ทำให้เกิดข้อขัดแย้งที่นำไปสู่ข้อสรุปว่ามุม ABΩ ต้องเท่ากับ A'B'Ω'

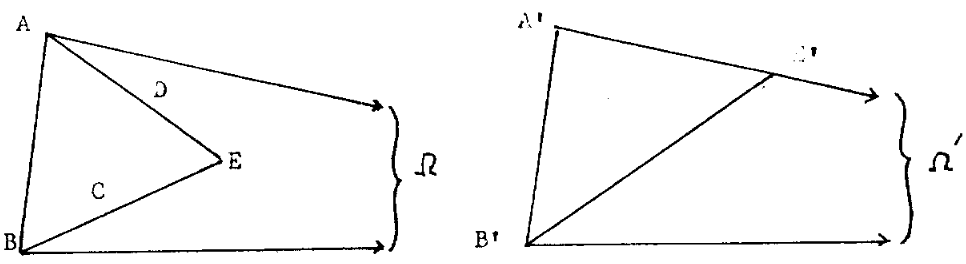
ทฤษฎีที่ 4.9 ถ้ามุม BAΩ เท่ากับมุม B'A'Ω' และมุม ABΩ เท่ากับมุม A'B'Ω' แล้ว $\overline{AB}$ เท่ากับ $\overline{A'B'}$ และรูป ABΩ ลงรอยกับ A'B'Ω'



รูป 4.16

ถ้า $\overline{AB}$ ไม่เท่ากับ $\overline{A'B'}$ สมมติว่า $\overline{AB}$ ยาวกว่า วัดระยะบน $\overline{AB}$ ทำให้ $\overline{AC}$ เท่ากับ $\overline{A'B'}$ ลาก $\overleftrightarrow{C\Omega}$ จากนั้นสามารถพิสูจน์ว่ารูป ACΩ ลงรอยกับ A'B'Ω' และจะได้ว่ามุม ACΩ เท่ากับ A'B'Ω' ทำให้ได้ผลตามมาว่า มุม ACΩ เท่ากับมุม ABΩ แต่ข้อสรุปนี้แย้งกับทฤษฎีที่ 3.7 นั่นคือ $\overline{AB}$ เท่ากันกับ $\overline{A'B'}$

ทฤษฎีที่ 4.10 ถ้า $\overline{AB}$ เท่ากับ $\overline{A'B'}$ มุม ABΩ เท่ากับ BAΩ และมุม A'B'Ω' เท่ากับ B'A'Ω' แล้ว มุมทั้งสี่เท่ากันและรูป ABΩ ลงรอยกับ A'B'Ω'



รูป 4.17

สมมติว่ามุมทั้งสี่ไม่เท่ากัน ดังนั้นให้มุมที่เท่ากันคู่หนึ่งคือมุม ABΩ โตกว่ามุมที่เหลืออีกคู่หนึ่ง สร้างมุม ABC และมุม BAD (รูป 4.17) ให้เท่ากับมุม B'A'Ω' $\overline{BC}$ และ $\overline{AD}$ จะตัดกันที่จุด E วัดระยะบน $\overline{A'\Omega'}$ ทำให้ $\overline{A'E'}$ เท่ากับ $\overline{AE}$ และลาก $\overline{B'E'}$ ดังนั้นรูปสามเหลี่ยม ABE ลงรอยกับรูปสามเหลี่ยม A'B'E' นำไปสู่ข้อขัดแย้งถ้าหากจะสรุปว่ามุม A'B'E เท่ากับ A'B'Ω' ดังนั้นมุมทั้งสี่ต้องเท่ากัน

มุมแห่งการขนาน (The Angle of Parallelism)

จากที่ได้กล่าวถึงมุมแห่งการขนานมาแล้วในทฤษฎีที่ 4.1 ว่า จะสามารถลากเส้นตรงผ่านจุด ๆ หนึ่ง ให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นหนึ่งได้มากกว่าหนึ่งเส้น คือจะมีเส้นขนานทางขวาและเส้นขนานทางซ้ายเกิดขึ้น และถ้าลากเส้นตรงจากจุดที่กำหนดให้ไปตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้จะทำให้เกิดมุมแหลมขึ้นสองมุม เนื่องด้วยเส้นตั้งฉากนี้กระทำมุมกับเส้นขนานที่ลากผ่านจุดที่กำหนด ทั้งที่เป็นเส้นขนานทางขวาและเส้นขนานทางซ้าย

ให้ F(h) แทนมุมแห่งการขนานสำหรับทุกระยะความสูงของเส้นตั้งฉากซึ่งสูง h

ถ้า $h_1 < h_2$ แล้วจะได้ว่า $F(h_1) > F(h_2)$ มุมแห่งการขนานนี้จะต้องมีทุกระยะความสูงของเส้นตั้งฉากถ้าระยะความสูงเพิ่มขึ้นมุมแห่งการขนานจะเล็กลงและถ้าระยะของความสูงลดลงมุมแห่งการขนานจะโตขึ้น กล่าวได้ว่าถ้าหากมุมแห่งการขนานเท่ากันระยะของความสูงของเส้นตั้งฉากต้องเท่ากันอาจเขียนว่า

$$\lim_{\sigma \to 0} [F(h + \sigma) - F(h)] = 0$$

และถ้าหากว่าระยะของความสูง h เข้าใกล้ศูนย์แล้ว F(h) ก็จะมีขนาดใกล้เคียงมุมฉากเข้าทุกที นั่นคือ

$$F(0) = \frac{\pi}{2}$$

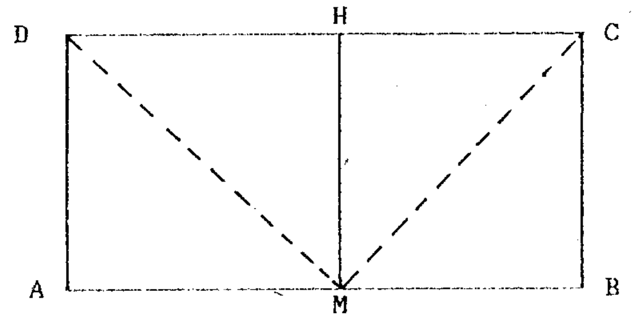
แต่ถ้า h เข้าใกล้ ∞ แล้ว F(h) ก็จะเข้าใกล้ศูนย์

รูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ (The Saccheri Quadrilateral)

รูปสี่ด้านของแซคเคอรี่เป็นรูปสี่ด้านซึ่งมีมุมที่ฐานสองมุมโตเท่ากันและเป็นมุมฉากด้านข้างซึ่งเป็นด้านประกอบมุมฉากทั้งสองยาวเท่ากันด้วย ด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งเรียกว่า**ด้านฐาน** (base) และด้านที่เชื่อมจุดปลายเส้นตั้งฉากสองเส้นที่ยาวเท่ากันนั้นเรียกว่า

ด้านบน (Summit) มุมที่เกิดจากด้านบนกระทำกับเส้นตั้งฉากทั้งสองมุมเรียกว่า**มุมยอด** (Summit angles)

ทฤษฎีที่ 4.11 เส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านบนและด้านฐานของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่จะตั้งฉากกับด้านทั้งสองนั้นและมุมยอดทั้งสองของรูปสี่ด้านนั้นจะเท่ากันและเป็นมุมแหลม



รูป 4.18

ให้ $\overline{AB}$ เป็นด้านฐานของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ ABCD โดย M เป็นจุดกึ่งกลางของด้านฐาน $\overline{AB}$ และ H เป็นจุดกึ่งกลางของด้านบน DC ลาก $\overline{MH}, \overline{CM}$ และ $\overline{DM}$

1) $\Delta AMD \cong \Delta BMC$ ($\overline{AD} = \overline{BC}$, $D\hat{A}M = C\hat{B}M = 90^{\circ}$, $\overline{AM} = \overline{MB}$) เป็นผลทำให้
$A\hat{D}M = M\hat{C}B$, $A\hat{M}D = C\hat{M}B$, $\overline{MD} = \overline{MC}$

2) $\Delta DMH \cong \Delta MHC$ ($\overline{DH} = \overline{HC}$, $\overline{MH}$ เป็นด้านร่วมและ $\overline{MD} = \overline{MC}$) เป็นผลทำให้
$M\hat{D}H = M\hat{C}H$, $D\hat{M}H = H\hat{M}C$, $D\hat{H}M = M\hat{H}C$

3) เพราะว่า $D\hat{H}M = M\hat{H}C$ และ $D\hat{H}M + M\hat{H}C$ เป็นมุมประชิดบนเส้นตรง ดังนั้น
$D\hat{H}M = M\hat{H}C = 90^{\circ}$ ทำให้ $\overline{MH}$ ตั้งฉากกับ $\overline{DC}$ ที่ H

4) $A\hat{M}D + D\hat{M}H = C\hat{M}B + H\hat{M}C$ ($A\hat{M}D = C\hat{M}B$, $C\hat{M}H = H\hat{M}C$) เป็นผลให้
$A\hat{M}H = B\hat{M}H$
แต่ $A\hat{M}H + B\hat{M}H = 180^{\circ}$ (เป็นมุมประชิดบนเส้นตรง)
ดังนั้น $A\hat{M}H = B\hat{M}H = 90^{\circ}$

ทำให้ $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ ที่ M

จะได้ว่า $\overline{MH}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{DC}$

5) $A\hat{D}M + M\hat{D}H = M\hat{C}B + M\hat{C}H$ $(A\hat{D}M = M\hat{C}B,\ M\hat{D}H = M\hat{C}H)$

นั่นคือ $A\hat{D}C = B\hat{C}D$

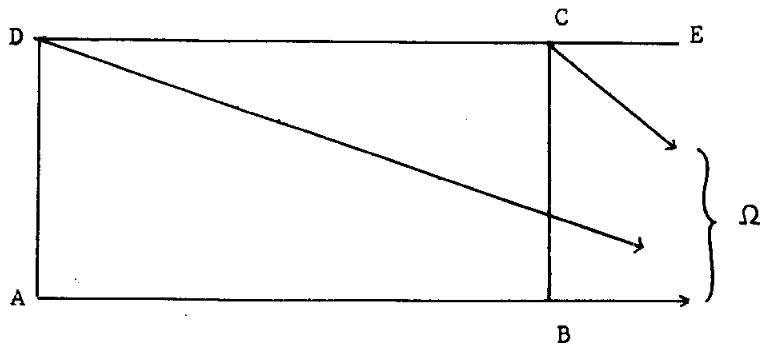
มุมยอด $A\hat{D}C$ = มุมยอด $B\hat{C}D$

พิสูจน์มุมยอดของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ทั้งสองมุมเป็นมุมแหลม

ให้ $\overrightarrow{D\Omega}$ และ $\overrightarrow{C\Omega}$ เป็นเส้นขนานกับ $\overrightarrow{AB}$ โดยผ่านจุด D และจุด C ซึ่งเป็นจุดมุมยอดของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ ABCD

ต่อ $\overleftrightarrow{DC}$ ออกไปทางจุด C จนถึงจุด E แล้วจะได้ว่าเส้นขนาน $\overrightarrow{D\Omega}$ และ $\overleftrightarrow{C\Omega}$ จะอยู่ภายในมุม ADC และมุม BCE โดย $\overleftrightarrow{DC}$ ไม่ตัดกับเส้น $\overleftrightarrow{AB}$

มุม ADΩ เท่ากับมุม BCΩ เพราะเป็นมุมแห่งการขนานที่มีความสูงเท่ากัน



รูป 4.19

ตามรูปจะได้ว่ามุม ECΩ โตกว่ามุม CDΩ ซึ่งเป็นมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม

ฉะนั้นมุม BCE โตกว่ามุม ADC และโตกว่ามุม DCB ด้วย เพราะว่ามุม ADC เท่ากันกับมุม DCB

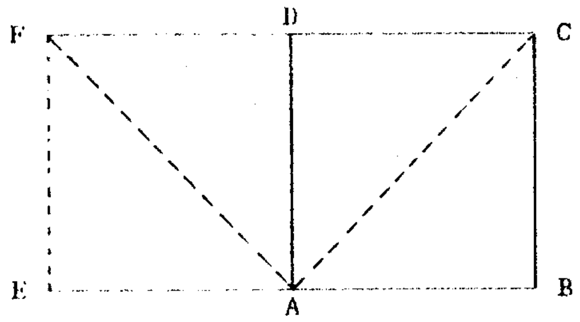
นั่นคือมุมยอดทั้งสองของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่เป็นมุมแหลม

บทแทรก ด้านฐานและด้านบนของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่จะขนานกัน

รูปสี่ด้านของลัมแบร์ต (The Lanbert Quadrilateral)

รูปสี่ด้านของลัมแบร์ตเป็นรูปสี่ด้านซึ่งมีมุมสามมุมเป็นมุมฉาก

ทฤษฎีที่ 4.12 ในรูปสี่ด้านที่มีสามมุมเป็นมุมฉากแล้วมุมที่สี่จะเป็นมุมแหลม



รูป 4.20

ให้ ABCD เป็นรูปสี่ด้านของลัมแบร์ต มีมุม A,B และ D เป็นมุมฉาก จะพิสูจน์ว่ามุมที่จุด C เป็นมุมแหลมต่อด้าน BA ออกไปถึงจุด E ทำให้ $\overline{AE}$ ยาวเท่ากับ $\overline{AB}$

ลาก $\overline{EF}$ ยาวเท่ากับ $\overline{BC}$ และให้ตั้งฉากกับ $\overline{BE}$ ที่จุด E

$\Delta AEF \cong \Delta ABC$ ($\overline{AB} = \overline{AE}$, $\overline{EF} = \overline{BC}$ และ $A\hat{E}F = A\hat{B}C = 1$ ฉ

ดังนั้นถ้า $\overline{FA} = \overline{AC}$

$\Delta AFD \cong \Delta ADC$ ($\overline{AF} = \overline{AC}$ และ $\overline{AD}$ เป็นด้านร่วม $F\hat{A}D = D\hat{A}C$)

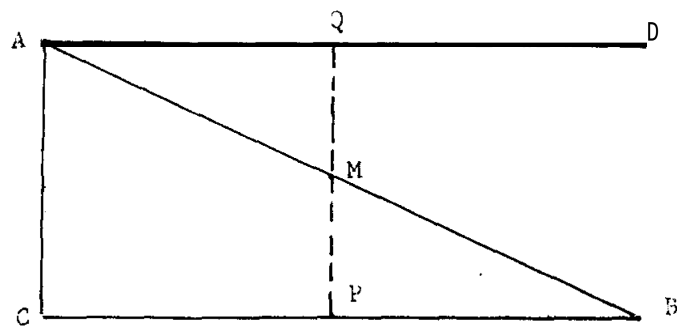
$F\hat{D}A = A\hat{D}C = 1$ ฉ

ดังนั้นจุด F,D และ C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน EBCF เป็นรูปสี่ด้านแบบแซคเคอรี่

นั่นคือ มุม C เป็นมุมแหลม

ต่อไปจะศึกษาเกี่ยวกับผลบวกของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

ทฤษฎีที่ 4.13 ผลบวกของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากน้อยกว่าสองมุมฉาก



รูป 4.21

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีมุม C เป็นมุมฉาก เนื่องจากที่ได้ทราบแล้วว่ามุมที่เหลือแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เป็นมุมแหลมเพราะผลบวกของมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมน้อยกว่าสองมุมฉากเสมอ

ที่จุด A สร้างมุม BAD ให้เท่ากับมุม ABC จากจุดกึ่งกลาง M ของด้าน $\overline{AB}$ ลากเส้นตรง MP ให้ตั้งฉากกับ $\overline{CP}$ ที่จุด P P จะอยู่ระหว่าง B กับ C บน $\overline{AD}$ สร้างให้ $\overline{AQ}$ ยาวเท่ากับ $\overline{PB}$ และลาก $\overline{MQ}$

$\Delta MBP \cong \Delta MAQ$ $(\overline{AQ} = \overline{PB},\ M\hat{A}Q = M\hat{B}P,\ \overline{AB} = \overline{MB})$

ดังนั้น $A\hat{Q}M$ เป็นมุมฉาก

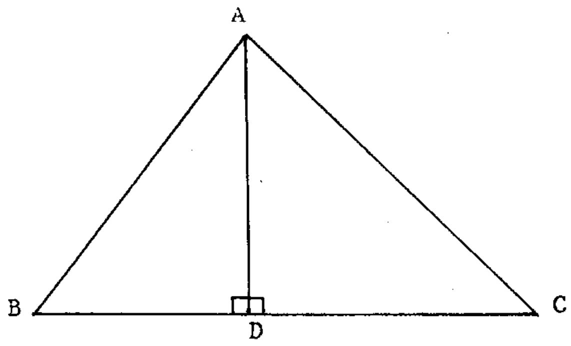
ทำให้ได้ว่าจุด Q,M และ P อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

นั่นคือ ACPQ เป็นรูปสี่ด้านของลัมแบร์ต

โดยมีมุม A เป็นมุมแหลม

ดังนั้นผลบวกของมุม CAB และมุม ABC น้อยกว่าหนึ่งมุมฉาก และจะได้ว่าผลบวกของมุมภายในทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC น้อยกว่าสองมุมฉาก

ทฤษฎีที่ 4.14 ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมน้อยกว่าสองมุมฉาก



รูป 4.22

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่ไม่มีมุมหนึ่งมุมใดเป็นมุมฉาก

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะมีมุมแหลมอย่างน้อยสองมุม สมมุติให้มุม ABC และมุม ACB เป็นมุมแหลมลาก $\overline{AD}$ ตั้งฉาก $\overline{BC}$ ที่จุด D จุด D จะอยู่ระหว่าง B และ C

ดังนั้นรูปสามเหลี่ยม ABC ถูกแบ่งเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป คือรูปสามเหลี่ยม ADB และรูปสามเหลี่ยม ADC

จากทฤษฎีที่ 4.13 จะได้ว่าใน ΔADB นั้น

$A\hat{B}D + B\hat{A}D < 1$ L_R

และสำหรับ ΔADC

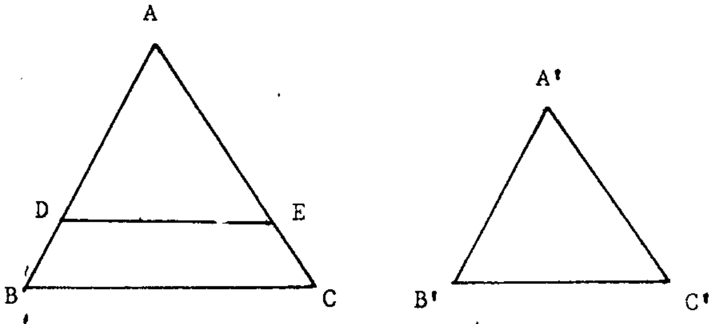
$A\hat{C}D + C\hat{A}D < 1$ L_R

ซึ่งผลบวกของมุมทั้งสี่คือ $A\hat{B}D + B\hat{A}D + A\hat{C}D + C\hat{A}D < 2$ L_R

นั่นคือผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC น้อยกว่าสองมุมฉาก

บทแทรก ผลบวกของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ย่อมน้อยกว่าสี่มุมฉาก

ทฤษฎีที่ 4.15 ถ้ามุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากับมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งมุมต่อมุมแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้ย่อมเท่ากันทุกประการ



รูป 4.23

ให้ $\hat{A}$ $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\hat{A}'$ $\hat{B}'$ และ $\hat{C}'$ ของรูปสามเหลี่ยม A'B'C' ตามลำดับ

ถ้าด้านที่สมนัยกันเท่ากัน เช่น $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ รูปสามเหลี่ยมทั้งสองย่อมคล้ายกันอย่างแน่นอน

แต่ถ้า $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ โดยให้ $\overline{AB}$ ยาวกว่า $\overline{A'B'}$ วัดระยะ $\overline{AD}$ บนเส้น $\overline{AB}$ ทำให้ $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ และวัดระยะ $\overline{AE}$ บนเส้น $\overline{AC}$ ทำให้ $AE = \overline{A'C'}$ ลาก $\overline{DE}$

จะได้ว่า $\Delta ADE \cong \Delta A'B'C'$ $(\overline{AD} = \overline{A'B'},\ \hat{A} = \hat{A}'\ ,\ \overline{AE} = \overline{A'C'})$

$A\hat{D}E = A'\hat{B}'C'$ และ $A\hat{E}D = A'\hat{C}'B'$

$A\hat{D}E + B\hat{D}E = 1$ ฉ

$A\hat{E}D = C\hat{E}D = 1$ ฉ

$A\hat{D}E + B\hat{D}E + A\hat{E}D + C\hat{E}D = 2$ ฉ

หรือ $D\hat{B}C + B\hat{D}E + E\hat{C}B + C\hat{E}D = 2$ ฉ

ดังนั้นรูปสี่ด้าน BCED จะมีผลบวกของมุมภายในเท่ากับสี่มุมฉากซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

ถ้า $\overline{AE}$ ยาวกว่า $\overline{AC}$ จะทำให้ได้ว่ามุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมจะเท่ากับมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม ซึ่งเป็นไปไม่ได้อีก

นั่นคือจะไม่มีรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มีขนาดต่างกันในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก

จากแนวความคิดของเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกที่กล่าวมานี้สามารถสรุปลักษณะสำคัญได้ว่า

1) จุดสองจุดที่ต่างกันจะกำหนดเส้นตรงได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

2) เส้นตรงทุกเส้นมีจุดไอดีลได้สองจุด

3) จะสามารถลากเส้นตรงผ่านจุด ๆ หนึ่งและให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้มากกว่าหนึ่งเส้น

4) มุมยอดของรูปสี่ด้านของเชคเคอรี่เป็นมุมแหลม

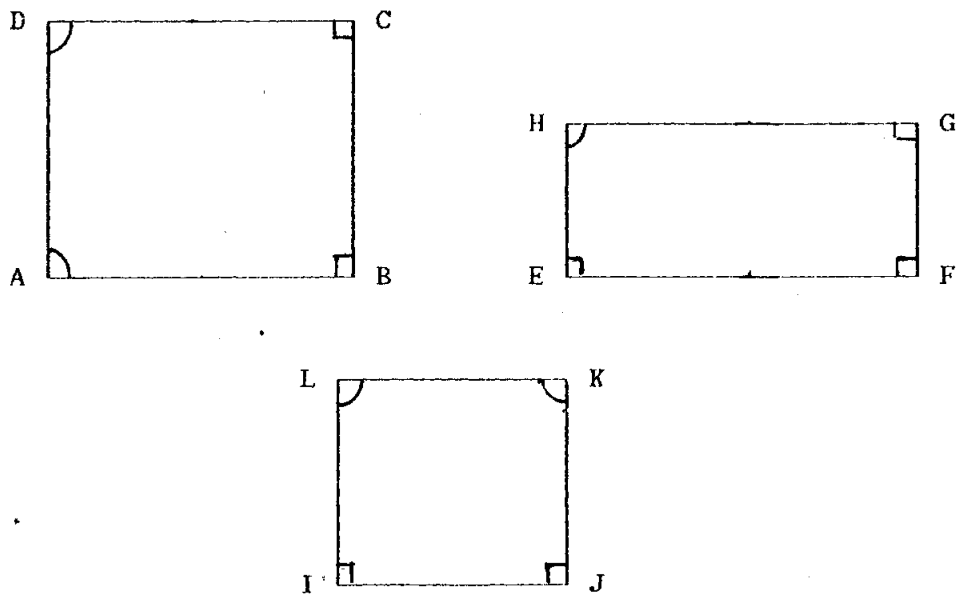
5) มุมที่เหลือของรูปสี่ด้านของลัมแบร์ตเป็นมุมแหลม

6) ผลบวกของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ น้อยกว่าสองมุมฉาก

7) ไม่มีรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มีขนาดต่างกันในเรขาคณิตนี้

กิจกรรมการเรียนที่ 4.2

1. จงตอบคำถามข้อ 1.1 - 1.6 โดยพิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



1.1 รูปใดเป็นรูปสี่ด้านแซคเคอรี่

1.2 ในรูปสี่ด้าน ABCD ด้าน $\overline{AD}$ มีชื่อเรียกว่าด้านอะไร

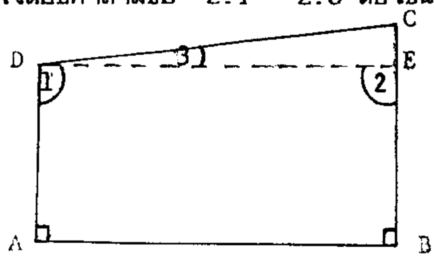
1.3 มุม A และมุม D มีชื่อเรียกว่ามุมอะไร

1.4 $\overline{IL}$ และ $\overline{JK}$ เรียกว่าด้านอะไรเมื่อเทียบกับรูป IJKL

1.5 เรียก $\overline{IJ}$ ว่าด้านใด

1.6 มุม I และมุม J เรียกว่าอะไร

2. จงพิจารณาการพิสูจน์ว่าถ้าด้านสองด้านที่ไม่ใช่ด้านฐานและด้านซัมมิทของรูปสี่ด้านแซคเคอรี่ยาวไม่เท่ากันแล้วมุมซัมมิทก็จะไม่เท่ากันและมุมที่โตกว่าจะอยู่ตรงข้ามด้านที่ยาวกว่า และจงตอบคำถามข้อ 2.1 - 2.6 ต่อไปนี้



กำหนดให้ : รูป ABCD เป็นรูปสี่ด้านมี $\overline{AB}$ เป็นด้านฐาน

$\hat{A}$ และ $\hat{B}$ เป็นมุมฉาก $\overline{CB} > \overline{DA}$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{D} > \hat{C}$

เพราะว่า รูป ABCD เป็นรูปสี่ด้านที่มีมุมสองมุมเป็นมุมฉาก มี $\overline{AB}$ เป็นด้านฐาน เราทราบว่า $\overline{DA} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ ด้วย $\overline{CB} > \overline{DA}$

เลือกจุด E บน $\overline{BC}$ ทำให้ $\overline{BE} = \overline{AD}$ และลาก $\overline{DE}$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 ทำไมจึงเรียกรูป ABED ว่ารูปสี่ด้านแซคเคอรี่

2.2 $\hat{1} = \hat{2}$ เพราะเหตุใด

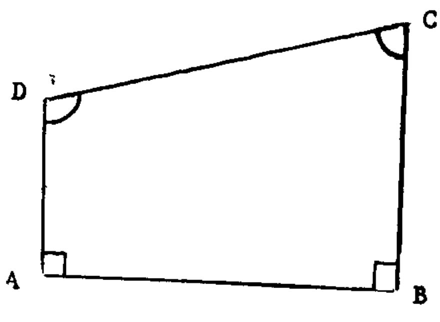
2.3 ทำไม $A\hat{D}C > \hat{1}$

2.4 ผลที่ตามมาคือ $A\hat{D}C > \hat{2}$ จงอธิบายว่าเพราะเหตุใด

2.5 $\hat{2} > \hat{C}$ เพราะเหตุผลใด

2.6 $A\hat{D}C > \hat{C}$ เพราะเหตุผลใด

3. จงแสดงว่าถ้ามุมซัมมิทของรูปสี่ด้านที่มีมุมสองมุมเป็นมุมฉากไม่เท่ากันแล้วด้านประกอบมุมฉากที่ไม่ใช่ด้านฐานจะยาวไม่เท่ากันด้วยและด้านที่ยาวกว่าจะอยู่ตรงข้ามมุมที่ใหญ่กว่า



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่ด้านมีมุมที่ฐานสองมุมเป็นมุมฉาก มี $\overline{AB}$ เป็นฐาน $\hat{D} > \hat{C}$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\overline{CB} > \overline{DA}$

การพิสูจน์ทำได้โดยการพิสูจน์ทางอ้อม

จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 ทั้ง $\overline{CB} < \overline{DA}$, $\overline{CB} = \overline{DA}$ หรือ $\overline{CB} > \overline{DA}$ เพราะเหตุใด

สมมติว่า $\overline{CB} < \overline{DA}$ แล้ว

3.2 ทำให้ได้ว่า $\hat{D} < \hat{C}$ จงอธิบายว่าเพราะเหตุใด

ซึ่งขัดแย้งกับความจริงที่ $\hat{D} > \hat{C}$

สมมติว่า $\overline{CB} = \overline{DA}$

3.3 รูปสี่ด้าน ABCD เป็นรูปสี่ด้านชนิดใด

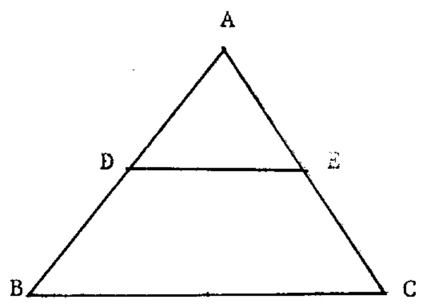
3.4 ทำให้ได้ผลตามมาว่า $\hat{D} = \hat{C}$ เพราะเหตุใด

ซึ่งข้อสรุปนี้ขัดแย้งกับความจริงที่ $\hat{D} > \hat{C}$

ดังนั้น $\overline{CB} > \overline{DA}$

4. จงพิสูจน์ว่าในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก ผลบวกของมุมภายในทั้งสี่ของรูปสี่ด้านน้อยกว่า 360°

5. จงพิสูจน์ว่าเส้นที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมย่อมสั้นกว่าครึ่งหนึ่งของด้านฐาน



6. จงพิสูจน์ว่าถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีมุมเท่ากันทุกมุมมุมต่อมุม กับรูปสามเหลี่ยม A'B'C' แล้ว รูปสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันทุกประการ นั่นคือไม่มีรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มีขนาดต่างกันในเรขาคณิตระบบนี้

4.3 เรขาคณิตอิลลิปติก (Elliptic geometyry)

ผู้เสนอแนวความคิดของเรขาคณิตอิลลิปติกคือ ยอร์ช เฟรดริก แบร์นฮาร์ด รีมันน์ (George Friedrich Bernhard Riemann 1826-1866) ชาวเยอรมัน โดยรีมันน์ได้เปลี่ยนแปลงสัจพจน์ที่ 5 ของยุคลิดใหม่เป็น **"ถ้าลากเส้นตรงผ่านจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้แล้ว จะไม่มีเส้นตรงใดเลยที่ไม่ตัดกับเส้นตรงที่กำหนดให้นี้"** หรือ กล่าวอีกอย่างว่า **"เส้นตรงสองเส้นจะตัดกันเสมอ"** สัจพจน์นี้เป็นสัจพจน์ที่แสดงลักษณะเฉพาะตัวของเรขาคณิตอิลลิปติก เมื่อพิจารณาสัจพจน์นี้แล้ว อาจกล่าวว่าเรขาคณิตชนิดนี้ไม่มีเส้นขนาน จากสัจพจน์ใหม่นี้ทำให้เกิดเรขาคณิตระบบใหม่ขึ้นอีกระบบหนึ่งเรียกว่า เรขาคณิตอิลลิปติก และเพื่อเป็นการให้เกียรติแก่รีมันน์เรขาคณิตนี้จึงมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า **เรขาคณิตของรีมันน์** (Riemannian Geometry)

เมื่อศึกษาให้ลึกซึ้งต่อไปจะพบว่ามีหลายสิ่งที่แตกต่างจากเรขาคณิตระบบยุคลิด เช่น พบว่าไม่มีรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มีขนาดต่างกันในเรขาคณิตนี้ พบว่าผลบวกของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมมีค่ามากกว่าสองมุมฉาก นอกจากนี้เส้นตรงที่ใช้ในเรขาคณิตอิลลิปติกยังมีลักษณะแตกต่างไปจากเส้นธรรมดาในเรขาคณิตระบบยุคลิด กล่าวคือเป็นวงกลมใหญ่ (Great circle) บนทรงกลมซึ่งวงกลมใหญ่นี้เกิดจากการตัดกันของระนาบที่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม กับทรงกลม

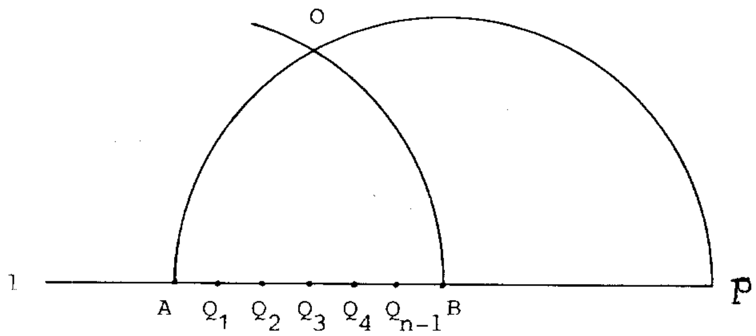
เพื่อจะได้เข้าใจในสัจพจน์ที่แสดงลักษณะพิเศษของเรขาคณิตอิลลิปติก จะกำหนดให้ l เป็นเส้นตรงใด ๆ ที่จุดสองจุดซึ่งแตกต่างกันบน l เรียกจุด A และจุด B ลากเส้นตั้งฉากกับ l ที่จุดทั้งสอง โดยสัจพจน์ของรีมันน์จะได้ว่า เส้นตั้งฉากทั้งสองจะพบกันที่จุดจุดเดียว O และเนื่องจากในรูปสามเหลี่ยม AOB มี $\hat{A} = \hat{B}$ ทำให้ได้ผลตามมาว่า $\overline{OA} = \overline{OB}$ ถ้าต่อ $\overleftrightarrow{AB}$ ออกไปทาง B ถึง C ให้ $\overline{BC} = \overline{AB}$ และลาก $\overline{OC}$ แล้วสามารถแสดงได้โดยง่ายว่า $\overline{OC}$ ตั้งฉากกับ l และ $\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OB}$ โดยการสร้างเช่นนี้ซ้ำกันหลายครั้งจะได้ผลสรุปว่า

กำหนด $\overline{AB}$ ของเส้นตรง l ถ้า P เป็นจุดใด ๆ บน l ซึ่ง $\overline{AP} = m.\overline{AB}$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกแล้วเส้นตรงทั้งหลายที่ลากมาตั้งฉากกับ l ที่จุด P จะผ่านจุด O ซึ่งเป็นจุดที่เส้นตั้งฉากที่ลากตั้งฉากกับ l ที่จุด A และจุด B ตัดกัน และยังทราบอีกว่า $\overline{OP} = \overline{OA}$

ต่อไปแบ่ง $\overline{AB}$ ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กันโดยมีจุด $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_{n-1}$ เป็นจุดแบ่ง

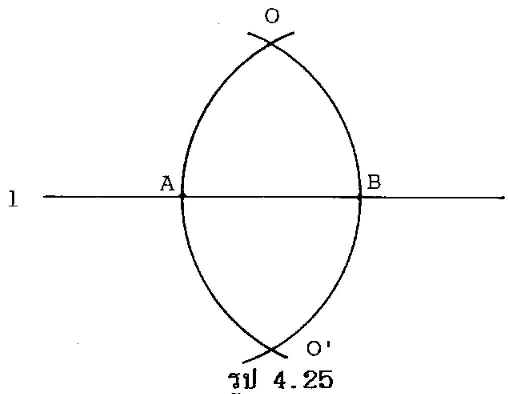
เส้นตั้งฉากกับ l ที่ Q_1 จะตัด $\overline{AO}$ ที่ O เพราะ ถ้าเส้นตั้งฉากนี้ตัดกับ $\overline{AO}$ ที่จุดอื่นเส้นตั้งฉากที่ตั้งฉากกับ l ที่ B ก็จะตัดกันที่จุดนั้นด้วย ทำนองเดียวกันเส้นตั้งฉากที่จุด $Q_2, Q_3, \ldots, Q_{n-1}$ จะตัด $\overline{AO}$ ที่ O ด้วยเหตุผลที่กล่าวมานี้จะเห็นว่า ถ้า $\overline{AB}$ และ $\overline{AP}$ เป็นสัดส่วนกันเส้นตั้งฉากที่ P จะผ่านจุด O และ $\overline{OP} = \overline{OA}$ เมื่อ $\overline{AB}$ และ $\overline{AP}$ ไม่ได้เป็นสัดส่วนกันเส้นตั้งฉากที่ทุก ๆ จุดบนเส้นตรงจะพบกันที่จุด O และระยะตั้งฉากคงที่เสมอ

เส้นตั้งฉากที่ทุก ๆ จุดของเส้นตรงใด ๆ จะพบกันที่จุดจุดหนึ่งและมีระยะตั้งฉากคงที่เสมอ จุดที่พบกันเรียกว่า ขั้ว (pole) ระยะตั้งฉากที่คงที่แทนด้วย q



รูป 4.24

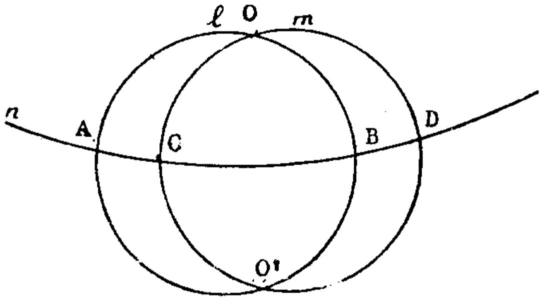
ต่อไปพิจารณาจากรูป 4.25 ให้จุด O เป็นขั้วของเส้นตรง l ลากเส้นตรงสองเส้นผ่านจุด O เส้นทั้งสองจะตัด l เป็นมุมฉากที่จุด A และจุด B ลาก $\overline{OA}$ ไปทางจุด A ถึง O' และทำให้ $\overline{AO'} = q$



รูป 4.25

ลากเส้นเชื่อม O' และ B สามารถแสดงได้ว่า $\overline{OB}$ ตั้งฉากกับ l ดังนั้น O,B และ O' อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน $\overline{BO'} = q$ จะเห็นว่าเส้นตรงทุกเส้นมีขั้วสองขั้วยิ่งกว่านั้น $\overline{OA}$ และ $\overline{OB}$ มีเส้นตั้งฉากร่วมซึ่งเส้นตั้งฉากร่วมนี้ตัดกันที่จุดสองจุด แต่ละข้อของเส้นตรงจะมีความยาวเท่ากับ 2q ซึ่งจะเป็นจริงสำหรับทุกคู่ของเส้นตรงใด ๆ พิสูจน์ได้ดังนี้

ให้ l และ m เป็นเส้นตรงสองเส้นใด ๆ เส้นตรงทั้งสองตัดกันที่จุด O จากจุด O วัดระยะไปตามเส้นทั้งสองแต่ละเส้น

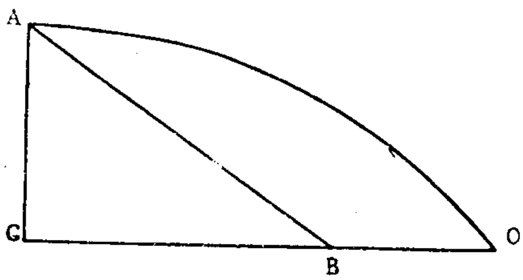


รูป 4.26

ไปในแต่ละทิศทางให้ส่วนของเส้นตรงยาวเท่ากับ q นั่นคือ $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = q$ ดังนั้นจุด A,B,C และ D จะอยู่บนเส้นตรง n โดยมีจุด O เป็นขั้ว นอกจากนี้ l และ m ยังตัดกันที่จุดอื่นอีกเรียกว่าจุด O' ซึ่งเป็นขั้วจุดที่สอง ทำให้ทราบว่าเส้นตรงสองเส้นในเรขาคณิตอิลลิปติกจะต้องมีเส้นตั้งฉากร่วมเพียงเส้นเดียวเท่านั้นและเส้นทั้งสองตัดกันที่จุดสองจุดเสมอซึ่งเส้นแต่ละเส้นจะวกกลับไปหาตัวมันเอง และมีความยาวจำกัดเท่ากับ 4q สำหรับข้อความที่ว่า "ถ้ากำหนดจุดสองจุดจะสามารถลากเส้นตรงได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้นผ่านจุดสองจุดนี้" ไม่เป็นจริงในเรขาคณิตนี้เพราะถ้าจุดสองจุดเป็นจุดขั้วทั้งคู่ ก็จะมีเส้นขนานนับไม่ถ้วนผ่านจุดสองจุดนี้

ทฤษฎีบทเบื้องต้นในเรขาคณิตอิลลิปติค

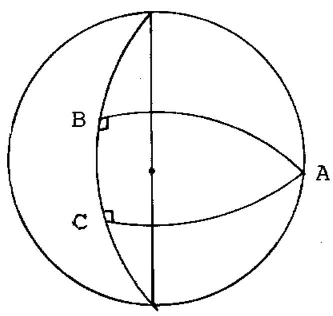
ทฤษฎีที่ 4.15 ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ มุมแต่ละมุมที่ไม่ใช่มุมฉากจะน้อยกว่า เท่ากับหรือมากกว่าหนึ่งมุมฉาก ก็ต่อเมื่อด้านตรงข้ามของมุมนั้นสั้นกว่า เท่ากับหรือยาวกว่า q



รูป 4.27

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก จากจุด C ลาก $\overleftrightarrow{CB}$ ออกไปทาง B จนถึงจุด O โดยทำให้ระยะ $\overline{OC} = q$ ฉะนั้นจุด O จึงเป็นขั้ว ถ้าลาก $\overline{AO}$ จะทำให้ $O\hat{A}C$ เป็นมุมฉากด้วยเพราะว่าทุก ๆ จุดบนเส้น AC ลากไปยังจุด O จะตั้งฉากกับด้าน $\overline{AC}$ จากรูปจะเห็นชัดว่า $\overline{CB}$ สั้นกว่า q จึงได้ $C\hat{A}B$ น้อยกว่าหนึ่งมุมฉาก และถ้า $\overline{CB}$ ยาวกว่าหรือเท่ากับ q ก็จะได้ $C\hat{A}B$ มากกว่าหรือเท่ากับหนึ่งมุมฉาก

ทฤษฎีนี้อาจเขียนใหม่เป็น "ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ABC ที่มุม C กาง 90° มุม A จะน้อยกว่า เท่ากับหรือมากกว่า 90° ก็ต่อเมื่อ $\overline{BC}$ สั้นกว่าเท่ากับหรือยาวกว่า q ทฤษฎีนี้อาจแสดงได้ด้วยรูป 4.28 ดังนี้



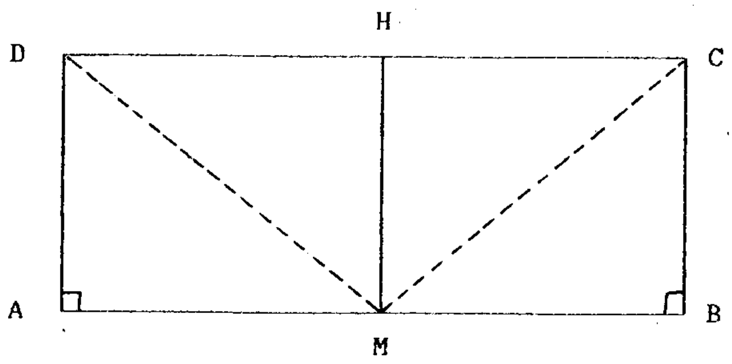
รูป 4.28

ซึ่ง $\hat{B} = \hat{C} = 90^{\circ}$ ขณะที่ $\hat{A} < 90^{\circ}$ และ $BC < q$ แล้วจะเป็นผลให้ได้ทฤษฎีใหม่ที่ว่า "มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้มากกว่า 180° เพราะ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^{\circ}$

รูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ในเรขาคณิตอิลลิปติก

ในการศึกษาเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกนั้นได้กล่าวถึงรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ว่าเป็นรูปสี่ด้านที่มีมุมที่ฐานสองมุมเป็นมุมฉาก ด้านที่ตั้งฉากกับฐานเท่ากัน ด้านที่ตรงข้ามกับฐานเรียกเส้นซัมมิท (Summit) มุมที่เส้นตั้งฉากทำกับเส้นซัมมิทเรียกมุมยอด สำหรับเรขาคณิตอิลลิปติกนั้นเมื่อกล่าวถึงรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ รูปสี่ด้านนั้นมีลักษณะเหมือนกับรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ที่กล่าวมานี้ทุกประการจะแตกต่างกันตรงที่มุมยอดเป็นมุมป้าน ดังจะได้แสดงให้เห็นจริงดังนี้

ทฤษฎีที่ 4.16 เส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านบนและด้านฐานของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่จะตั้งฉากกับด้านทั้งสองนั้นและมุมยอดทั้งสองของรูปสี่ด้านนั้นจะเท่ากันและเป็นมุมป้าน

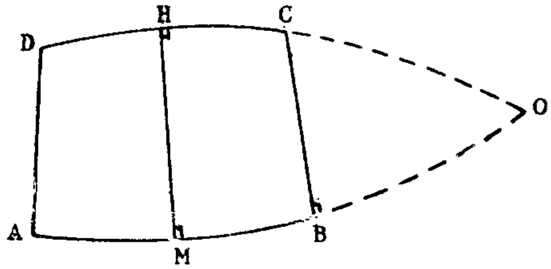


รูป 4.29

ให้ $\overline{AB}$ เป็นด้านฐานของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ ABCD โดย M เป็นจุดกึ่งกลางของด้านฐาน $\overline{AB}$ และ H เป็นจุดกึ่งกลางของด้านบน $\overline{DC}$ ลาก $\overline{MH}$, $\overline{CM}$ และ $\overline{DM}$

1) $\Delta ADM \cong \Delta BMC$ ($\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AM} = \overline{MB}$, $D\hat{A}M = C\hat{B}M$)
   เป็นผลให้ $A\hat{D}M = M\hat{C}B$, $A\hat{M}D = C\hat{M}B$, $\overline{MD} = \overline{MC}$
2) $\Delta DMH \cong \Delta MHC$ ($\overline{MD} = \overline{MC}$, $\overline{DH} = \overline{HC}$; $\overline{MH}$ เป็นด้านร่วม)
   เป็นผลให้ $M\hat{D}H = M\hat{C}H$, $D\hat{M}H = H\hat{M}C$, $D\hat{H}M = M\hat{H}C$
3) $D\hat{H}M = M\hat{H}C = 90^{\circ}$ ($D\hat{H}M + M\hat{H}C$ เป็นมุมประชิดบนเส้นตรงทำให้ $\overline{MH}$ ตั้งฉากกับ $\overline{DC}$ ที่ H
4) $A\hat{M}D + D\hat{M}H = C\hat{M}B + H\hat{M}C$ ($A\hat{M}D = C\hat{M}B, D\hat{M}H = H\hat{M}C$)
   เป็นผลให้ $A\hat{M}H = B\hat{M}H$
   แต่ $A\hat{M}H + B\hat{M}H = 180^{\circ}$ (เป็นมุมประชิดบนเส้นตรง)
   ดังนั้น $A\hat{M}H = B\hat{M}H = 90^{\circ}$
5) $A\hat{D}M + M\hat{D}H = M\hat{C}B + M\hat{C}H$ ($A\hat{D}M = M\hat{C}B$, $M\hat{D}H = M\hat{C}H$)
   $A\hat{D}C = B\hat{C}D$
   มุมยอด $A\hat{D}C = B\hat{C}D$

ต่อไปพิสูจน์ว่ามุมยอดทั้งสองเป็นมุมป้าน



รูป 4.30

ให้รูปสี่ด้าน ABCD เป็นรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ที่มี $\overline{AB}$ เป็นฐานและ $\overline{MH}$ เป็นเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางของฐานและด้านตรงข้ามกับฐาน เรียกว่า $\overline{DC}$ ต่อ $\overline{HC}$ และ $\overline{MB}$ ออกไปเส้นทั้งสองจะไปพบกันที่จุด O

จุด O เป็นจุดขั้วของด้าน $\overline{MH}$ (เส้นตั้งฉากสองเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่งย่อมตัดกันที่จุดขั้ว)

$\overline{MO} = \overline{HO} = q$

$C\hat{B}O = 90^{\circ}$ ($A\hat{B}C = 90^{\circ}$, $A\hat{B}C = C\hat{B}D$ เป็นมุมประชิดบนเส้นตรง)

ดังนั้น CBO เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

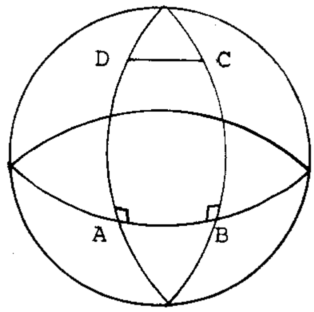
$\overline{BO} < q$ ($\overline{MB} + \overline{BO} = \overline{MO} = q$)

$B\hat{C}O < 90^{\circ}$ ($C\hat{B}P$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $\overline{BO} < q$; $B\hat{C}O$ เป็นมุมตรงข้ามด้าน $\overline{BO}$)

ฉะนั้น $B\hat{C}O$ เป็นมุมแหลม

เป็นผลให้มุมยอด DCB เป็นมุมป้าน ($B\hat{C}O$ เป็นมุมแหลม $D\hat{C}B$ และ $B\hat{C}O$ เป็นมุมประชิดบนเส้นตรง)

จากรูป 4.30 อาจเขียนให้ใกล้ความเป็นจริงดังรูป 4.31 ดังนี้

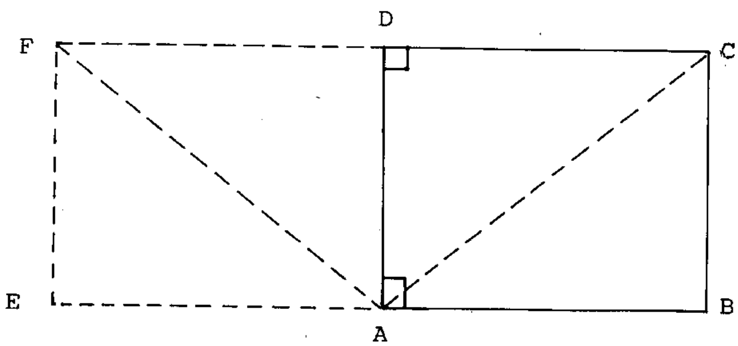


รูป 4.31

รูปสี่ด้านของลัมแบร์ตในเรขาคณิตอิลลิปติก

รูปสี่ด้านของลัมแบร์ตคือรูปสี่ด้านที่มีมุมเป็นมุมฉากสามมุม ในเรขาคณิตอิลลิปติกนั้น พบว่ามุมที่เหลืออีกมุมหนึ่งเป็นมุมป้าน ดังการพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 3.17 ในรูปสี่ด้านของลัมแบร์ตมุมที่สี่จะเป็นมุมป้าน



รูป 4.32

ให้ ABCD เป็นรูปสี่ด้านของลัมแบร์ตที่มี

$A\hat{B}C = B\hat{A}D = A\hat{D}C = 90^{\circ}$

จะพิสูจน์ว่า $B\hat{C}D$ เป็นมุมป้าน

สร้างเพื่อการพิสูจน์โดยต่อ $\overline{BA}$ ไปทาง A ถึงจุด E ทำให้ $\overline{AE} = \overline{AB}$ ที่จุด E

ลากเส้นตั้งฉากกับ $\overline{BE}$ และวัดระยะ $\overline{FE}$ ให้เท่ากับ $\overline{BC}$ ต่อ $\overline{FD}$

1) $\Delta AFE \cong \Delta ABC$ ($\overline{FE} = \overline{BC}$, $F\hat{E}A = C\hat{B}A = 90^\circ$, $\overline{EA} = \overline{AB}$)

เป็นผลให้ $E\hat{A}F = C\hat{A}B$, $\overline{FA} = \overline{AC}$

2) $D\hat{A}E = E\hat{A}B = 90^\circ$ ($D\hat{A}B = 90^\circ$ และ $D\hat{A}E$ กับ $D\hat{A}B$ เป็นมุมประชิดบนเส้นตรง

3) $D\hat{A}E - E\hat{A}F = D\hat{A}B - B\hat{A}C$ (มุมที่เท่ากันหักออกด้วยมุมที่เท่ากัน)

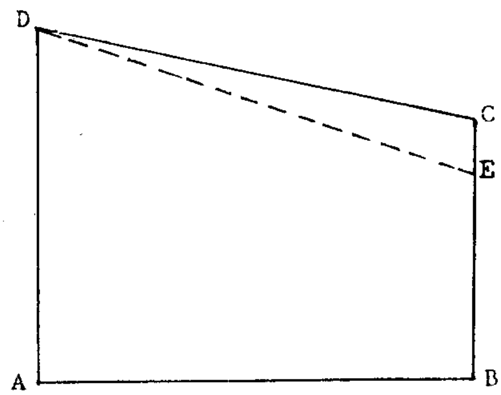
จะได้ $F\hat{A}D = D\hat{A}C$

4) $\Delta ADF \cong \Delta ADC$ ($\overline{FA} = \overline{AC}$, $F\hat{A}D = D\hat{A}C$, $\overline{AD}$ เป็นด้านร่วม)

จะได้ $F\hat{D}A = C\hat{D}A = 90^\circ$

ดังนั้น $\overline{FD}$ และ $\overline{DC}$ เป็นเส้นตรงเดียวกัน รูป FEDC เป็นรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่มีมุมยอด $B\hat{C}D$ เป็นมุมป้าน

ทฤษฎีที่ 4.18 ในรูปสี่ด้านของลัมแบร์ตด้านประชิดมุมป้านจะสั้นกว่าด้านตรงข้ามมุมป้าน



รูป 4.33

ให้ ABCD เป็นรูปสี่ด้านของลัมแบร์ตที่มี $A\hat{B}C = B\hat{A}D = A\hat{D}C = 1$ ฉ และ $B\hat{C}D$ เป็นมุมป้าน

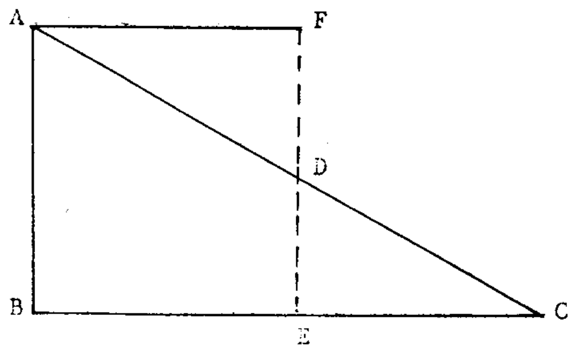
จะต้องพิสูจน์ว่า $\overline{BC} < \overline{AD}$

ถ้า $\overline{BC} \nless \overline{AD}$ แล้ว $\overline{BC}$ ต้องเท่ากับ $\overline{AD}$ หรือ $\overline{BC}$ ยาวกว่า $\overline{AD}$

กรณีที่ $\overline{BC} = \overline{AD}$ นั้นเป็นไปไม่ได้เพราะว่าถ้า $\overline{BC}$ เท่ากับ $\overline{AD}$ แล้วจะทำให้ $A\hat{D}C = B\hat{C}D$ และต่างต้องเป็นมุมป้านตามคุณสมบัติของรูปสี่ด้านของมุมฉาก จึงเกิดข้อความแย้งกัน

กรณีที่ $\overline{BC} > \overline{AD}$ ก็เป็นไปไม่ได้เช่นกัน เพราะว่า ถ้าวัดระยะ $\overline{BE}$ ให้ $\overline{BE} = \overline{AD}$ แล้วลาก DE จะได้ $A\hat{D}E = B\hat{E}D$ ซึ่งต่างก็เป็นมุมแหลม นำไปสู่ความขัดแย้งทำให้สรุปว่า $\overline{BC} < \overline{AD}$

ทฤษฎีที่ 4.19 มุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ รวมกันเข้าย่อมมากกว่าสองมุมฉาก



รูป 4.34

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉากจะต้องพิสูจน์ว่า มุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC รวมกันเข้าย่อมมากกว่าสองมุมฉาก

สร้างเพื่อการพิสูจน์โดยแบ่งครึ่ง $\overline{AC}$ ที่จุด D ลาก $\overline{DE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด E ต่อ $\overline{EF}$ ไปทาง D ถึงจุด F ทำให้ $\overline{ED} = \overline{DF}$ ลาก $\overline{AF}$

1) $ACDE \cong \Delta\ ADF$ ($\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{ED} = \overline{DF}$, $A\hat{D}F = C\hat{D}E$

ทำให้ $A\hat{F}D = C\hat{E}D = 90^{\circ}$

และ $D\hat{A}F = A\hat{C}B$

2) ABEF เป็นรูปสี่ด้านของลัมแบร์ต ($A\hat{B}E = B\hat{E}F = E\hat{F}A = 90^{\circ}$)

ดังนั้น $B\hat{A}F$ เป็นมุมป้าน

3) $B\hat{A}F = D\hat{A}F + B\hat{A}C$ (มุมใหญ่เท่ากับผลบวกของมุมย่อย)

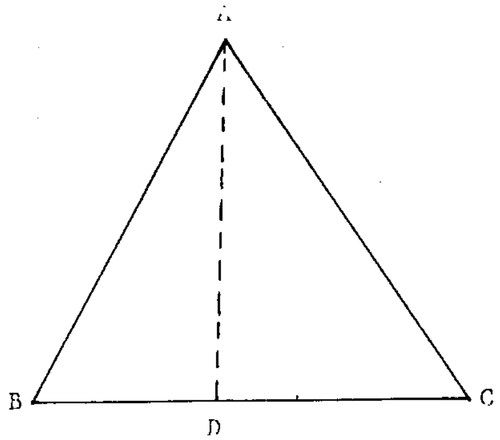
4) $B\hat{A}F = A\hat{C}B + B\hat{A}C$ ($D\hat{A}F = A\hat{C}B$)

5) $A\hat{C}B + B\hat{A}C$ เป็นมุมป้าน ($B\hat{A}F$ เป็นมุมป้าน)

6) $A\hat{C}B + B\hat{A}C + A\hat{B}C >$ สองมุมฉาก ($A\hat{C}B + B\hat{A}C$ เป็นมุมป้านและ $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก

นั่นคือมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ รวมกันเข้าย่อมมากกว่าสองมุมฉาก

ทฤษฎีที่ 4.20 มุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันเข้าย่อมมากกว่าสองมุมฉาก



รูป 4.35

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ กรณีที่รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุมใดมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก หรือมีมุมสองมุมหรือมุมทั้งสามเป็นมุมป้าน ก็จะได้ผลตามทฤษฎีทันที
ดังนั้นการพิสูจน์จึงจะพิจารณาเพียงกรณีเดียว คือกรณีที่มีอย่างน้อยสองมุมเป็นมุมแหลมคือที่ B และ C

สร้างเพื่อการพิสูจน์โดย ลากส่วนสูงจาก A ไปยัง $\overline{BC}$ จุด D ต้องอยู่บน $\overline{BC}$ เพราะถ้า D ไม่อยู่บน $\overline{BC}$ แล้วส่วนสูง AD จะยาวกว่า q และขณะเดียวกันสั้นกว่า q ตามทฤษฎีที่ 3.15

เนื่องจาก ΔABD และ ΔACD ต่างก็เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้นมุมภายในของ $\Delta ABD > 2$ ⦜

และมุมภายในของ $\Delta ACD > 2$ ⦜

จะได้ว่าผลบวกของมุมภายในของ ΔABD กับ $\Delta ACD > 4$ ⦜ เป็นผลให้ผลบวกของมุมภายในใน $\Delta ABC > 2$ ⦜ (หักผลบวกของ $A\hat{D}B$ กับ $A\hat{C}B = 2$ ⦜ ออกจาก 4 ⦜)

บทแทรก ผลบวกของมุมภายในทั้งสี่ของรูปสี่ด้านมากกว่าสี่มุมฉาก

แนวความคิดของเรขาคณิตอิลลิปติกที่กล่าวมานี้เป็นความรู้พื้นฐานสำหรับการศึกษาเรขาคณิตระดับสูงขึ้นไปพอจะสรุปลักษณะสำคัญได้ว่า

1) จุดสองจุดที่ต่างกันจะกำหนดเส้นตรงได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้นนอกจากจุดทั้งสองจะเป็นจุดขั้ว
2) เส้นตรงในเรขาคณิตนี้เป็นวงกลมใหญ่ที่เกิดจากการตัดกันของระนาบที่ผ่านศูนย์กลางของทรงกลมกับทรงกลม นอกจากนี้ เส้นตรงทุกเส้นจะตัดกัน
3) เส้นตรงทุกเส้นไม่มีจุดไอดีล
4) ไม่มีเส้นขนานในเรขาคณิตอิลลิปติก
5) ถ้ามีจุดใด ๆ จุดหนึ่งบนเส้นตรงจุดนี้จะไม่แบ่งเส้นตรงออกเป็นสองเซกเมนต์
6) มุมยอดของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่เป็นมุมป้าน
7) มุมที่เหลือของรูปสี่ด้านของลัมแบร์ตเป็นมุมป้าน
8) ผลบวกของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มากกว่าสองมุมฉาก
9) ไม่มีรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มีขนาดต่างกันในเรขาคณิตอิลลิปติก

ตารางเปรียบเทียบความแตกต่างของเรขาคณิตยุคลิด เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกและเรขาคณิตอิลลิปติก

ข้อความ	เรขาคณิตระบบยุคลิด	เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก	เรขาคณิตอิลลิปติก
เส้นตรงสองเส้นตัดกันได้	เพียงจุดเดียวเท่านั้น	เพียงจุดเดียวเท่านั้น	มากกว่า1จุด
บรรดาเส้นตรงทั้งหลายจะ	ตัดกันหรือขนานกัน	ตัดกัน ขนานกันหรือไม่ตัดกันเลย	ตัดกัน
เส้นตรงทุกเส้นมีจุดไอดีลได้	1 จุด	2 จุด	ไม่มีจุดไอดีล
ถ้าให้ l เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้และ P เป็นจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรง l แล้วจะลากเส้นตรงผ่านจุด P ให้ขนานกับเส้นตรง l ได้	เพียงเส้นเดียวเท่านั้น	มากกว่าหนึ่งเส้น	ไม่มีเส้นขนาน
จุดทั้งหลายที่พบกับเส้นตรงจะเป็น	จุดจริงๆ หรือจุดไอดีลก็ได้	จุดจริงๆ จุดไอดีล หรือจุดไอดีลหลายๆ จุดที่เรียกว่าอุลตร้าไอดีล (Ultra-ideal) ก็ได้	จุดจริง ๆ เท่านั้น
เส้นตรงทุกเส้นอาจแบ่งออกเป็นสองส่วนด้วยจุดเพียงจุดเดียว	ได้	ได้	ไม่ได้

ข้อความ	เรขาคณิตระบบยุคลิด	เรขาคณิตไฮ-เพอร์โบลิก	เรขาคณิต-อิลลิปติก
เส้นขนานคู่หนึ่งจะ	มีระยะห่างเท่ากันเสมอ	ลู่เข้าหากันด้านหนึ่งและลู่ออกจากกันอีกด้านหนึ่ง	ไม่มีเส้นขนานเลย
มุมยอดของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่ เป็น	มุมฉาก	มุมแหลม	มุมป้าน
มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้	180°	น้อยกว่า 180°	มากกว่า 180°
สามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่สมนัยกันเท่ากันทุกมุมมุมต่อมุมแล้วสามเหลี่ยม ทั้งสองจะ	คล้ายกัน	ลงรอยกัน	ลงรอยกัน
มี สามเหลี่ยมคล้ายหรือไม่	มี	ไม่มี	ไม่มี

ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตนอกระบบยุคลิดที่กล่าวมานี้เป็นเพียงความรู้ขั้นพื้นฐานเท่านั้นผู้ที่สนใจจะศึกษาให้ลึกซึ้งสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากตำราทางด้านเรขาคณิตนอกระบบยุคลิดโดยตรง สำหรับประโยชน์ของเรขาคณิตนอกระบบยุคลิดก็คือสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์บางประการที่เกิดขึ้นในระหว่างการปฏิบัติงานที่เกี่ยวข้องกับอวกาศในยุคที่มนุษย์กำลังพยายามสำรวจความเร้นลับในจักรวาลที่โลกของเราเป็นส่วนเล็ก ๆ ส่วนหนึ่งด้วยนี้.

กิจกรรมการเรียนที่ 4.3

1. จงพิสูจน์ว่าในเรขาคณิตอิลลิปติกนั้นผลบวกของมุมภายในทั้งสี่ของรูปสี่ด้านมากกว่า 360°
2. จงแสดงว่าเส้นที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมย่อมยาวกว่าครึ่งหนึ่งของด้านฐาน
3. จงแสดงว่าไม่มีรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มีขนาดต่างกันในเรขาคณิตอิลลิปติก
4. จงเขียนตารางเปรียบเทียบลักษณะสำคัญของเรขาคณิตระบบยุคลิด เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก และเรขาคณิตอิลลิปติกในเรื่องต่อไปนี้

ข้อความ	เรขาคณิตระบบยุคลิด	เรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก	เรขาคณิตอิลลิปติก
ถ้าให้ l เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้และ P เป็นจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรง l แล้ว จะลากเส้นตรงผ่านจุด P ให้ขนานกับเส้นตรง l ได้			
มุมยอดของรูปสี่ด้านของแซคเคอรี่เป็น			
มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้			
สามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่สมนัยกันเท่ากันทุกมุมมุมต่อมุมแล้วสามเหลี่ยมทั้งสองจะ			
มีสามเหลี่ยมคล้ายหรือไม่			