บทที่ 3

เรขาคณิตระบบยุคลิด
(Euclidean Geometry)

เค้าโครงเรื่อง

3.1 ยุคลิดและอิลิเมนต์

3.2 ข้อบกพร่องในหนังสืออิลิเมนต์ของยุคลิด

3.3 สัจพจน์ของฮิลแบร์ต

สาระสำคัญ

1. ประวัติความเป็นมาของยุคลิดและงานที่สำคัญของยุคลิดซึ่งได้แก่ หนังสือชุดอิลิเมนต์ที่มีอยู่ 13 เล่ม
2. วิธีการเขียนหนังสือของยุคลิด
3. สรุปลักษณะสำคัญของหนังสือชุดอิลิเมนต์ของยุคลิด
4. สรุป ข้อบกพร่องในหนังสือชุดอิลิเมนต์ตามความคิดเห็นของนักคณิตศาสตร์รุ่นหลัง
5. นิยามที่น่าสนใจของฮิลแบร์ตและสัจพจน์ของฮิลแบร์ตทั้ง 5 กลุ่มอันได้แก่

    สัจพจน์ของการเกิด

    สัจพจน์ของลำดับ

    สัจพจน์ของการเท่ากันทุกประการ

    สัจพจน์ของการขนาน

    สัจพจน์ของความต่อเนื่อง

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบบทนี้แล้วนักศึกษาสามารถ

1. อธิบายประวัติและพัฒนาการของเรขาคณิตระบบยุคลิด
2. อธิบายข้อบกพร่องทางตรรกวิทยาที่พบในหนังสืออิลิเมนต์ของยุคลิด
3. อธิบายวิธีขจัดข้อบกพร่องทางตรรกวิทยาด้วยการใช้นิยามและสัจพจน์ของฮิลแบร์ตทั้ง 5 กลุ่ม

เรขาคณิตระบบยุคลิดเป็นเรขาคณิตระบบแรกของโลกโดยยุคลิดซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกเป็นผู้รวบรวมผลงานของนักคณิตศาสตร์รุ่นก่อน ๆ และของตนเองไว้ในหนังสืออิลิเมนต์ (Eelement) ที่เขียนไว้ 13 เล่ม ลักษณะสำคัญของเรขาคณิตในระบบยุคลิดนั้นเป็นแบบแผนความคิดที่มีข้อตกลงเบื้องต้น คือเริ่มด้วยการกำหนดประโยคที่ยอมรับว่าจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ 10 ประโยคก่อน แล้วจึงสร้างทฤษฎีต่าง ๆ จากประโยคทั้ง 10 นี้ได้มากมายยุคลิดใช้วิธีการทางตรรกศาสตร์ที่เรียกว่า Synthesis คือเริ่มจากนิยาม , ข้อตกลงและทฤษฎีขั้นต้นไปหาทฤษฎีที่ยุ่งยากซับซ้อนขึ้นตามลำดับ อย่างไรก็ตามนักคณิตศาสตร์สมัยต่อมาเห็นจุดบกพร่องทางตรรกศาสตร์ของเรขาคณิตระบบยุคลิดจึงมีการแก้แก้ไขข้อบกพร่องเหล่านั้นทำให้เรขาคณิตระบบนี้มีรากฐานทางตรรกศาสตร์ที่สมบูรณ์ขึ้น ซึ่งจะกล่าวถึงโดยละเอียดภายหลัง

3.1 ยุคลิดและอิลิเมนต์

ยุคลิดเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกมีชีวิตอยู่ระหว่าง 450-300 ปีก่อนคริสต์ศักราช ยุคลิดเขียนหนังสือไว้หลายเล่มแต่ที่ยุคลิดมีชื่อเสียงขึ้นมาก็เพราะหนังสืออิลิเมนต์เป็นส่วนใหญ่ทั้ง ๆ ที่เขาได้แต่งหนังสือไว้ไม่น้อยกว่า 10 เล่ม และที่ตกทอดมาถึงปัจจุบันโดยสมบูรณ์มีเพียง 5 เล่มเท่านั้น หนังสืออิลิเมนต์นี้เป็นผลงานที่ยิ่งใหญ่เหนือหนังสือเล่มอื่น ๆ ก่อนหน้านี้ทุกเล่ม หรืออันที่จริงเราไม่ได้พบงานสำคัญอะไรก่อนหน้านี้เลย ในทันทีที่หนังสืออิลิเมนต์ ปรากฏออกมาก็ได้รับความนิยมอย่างสูงสุด และนับตั้งแต่สมัยยุคลิดมาจนถึงสมัยใหม่เพียงแต่พูดว่าอยู่ในหนังสืออิลิเมนต์เล่มใด และเป็นประพจน์ (Proposition) ที่เท่าใด คนจะรู้ได้ทันทีว่าเป็นทฤษฎีหรือบทสร้างที่เท่าไร มีข้อความว่าอย่างไรบ้าง ยิ่งกว่านั้นอาจกล่าวได้ว่า ไม่มีงานชิ้นใดที่จะมีคนนำไปใช้พิมพ์หรือศึกษาอย่างกว้างขวางมากเท่าหนังสือเล่มนี้ของยุคลิดยกเว้นพระคัมภีร์ไบเบิ้ล และคงไม่มีงานใดที่มีอิทธิพลต่อความคิดในทางวิทยาศาสตร์ (Scientific Thinking) มากเท่านี้ด้วย นับได้ว่าเป็นหนังสือที่สำคัญที่สุดเล่มหนึ่งในประวัติศาสตร์ของมนุษยชาติ และนับตั้งแต่พิมพ์ครั้งแรกในปี ค.ศ. 1482 แล้วก็มีการตีพิมพ์กันต่อ ๆ มาอีกมากกว่าพันครั้ง และเอามาใช้สอนกันมากกว่าของคนอื่น ๆ มากกว่า 2000 ปีมาแล้ว

โดยแท้ที่จริงแล้ว เราไม่ได้เห็นต้นฉบับเดิมของหนังสืออิลิเมนต์กันเลย แต่เราได้เรื่องราวนั้น ๆ มาจากผลงานการปรับปรุงหนังสืออิลิเมนต์ของเทออน (Theon) แห่งอเล็กซานเดรียซึ่งจัดทำขึ้นหลังยุคลิดเขียนหนังสือเกือบ 700 ปี และอันที่จริงในต้นศตวรรษที่ 19 เราได้พบหนังสือที่เก่ากว่าของเทออนเพียงนิดหน่อยเท่านั้น และจากการศึกษาคำวิจารณ์และคำกล่าวอ้างของผู้แต่งรุ่นก่อน ๆ ก็ได้ทราบว่าเนื้อหาในนิยามอัถเซียม (Axioms)

และสัจพจน์ (Postulates) ของหนังสืออิลิเมนต์ที่มีการปรับปรุงไปแล้วนั้นแตกต่างจากงานของยุคลิดไปบ้าง แต่สำหรับบทสร้าง, ทฤษฎี และการพิสูจน์นั้นโดยสาระสำคัญแล้วก็เหมือนกับของเดิมนั่นเอง

หนังสืออิลิเมนต์ของยุคลิดมิได้มีแต่เรื่องเรขาคณิตอย่างเดียว ยังมีที่เกี่ยวกับทฤษฎีของจำนวน (Number Theory) และพีชคณิตในเชิงเรขาคณิตเบื้องต้นด้วย เนื้อหาดังกล่าวนี้ส่วนใหญ่ได้มาจากการรวบรวมงานของผู้เขียนคนก่อน ๆ มาจัดให้เป็นระเบียบขึ้น และแม้ว่าประพจน์และการพิสูจน์ส่วนที่เป็นของยุคลิดเอง ก็มีอยู่มิใช่น้อย แต่เราก็ยกย่องยุคลิดในเรื่องที่ยุคลิดสามารถคัดเลือกเอาประพจน์นั้นมาได้อย่างเหมาะสม และเอามาจัดไว้ตามลำดับอย่างมีเหตุผลดีอีกด้วยนั้นมากกว่าอื่น หนังสืออิลิเมนต์นี้มีทั้งหมด 13 เล่ม และเป็นประพจน์ได้รวมกันทั้งหมดถึง 465 บท เนื้อหาตามที่ปรากฏในหนังสือเป็นเรขาคณิตบนระนาบ และเรขาคณิตสามมิติ (Solid geometry) ที่เรียนกันในชั้นมัธยมของอเมริกานั้นส่วนใหญ่ก็เอามาจากหนังสือเล่มที่ 1,3,4,6,11 และ 12

สาระสำคัญในหนังสืออิลิเมนต์แต่ละเล่มนั้นมีดังต่อไปนี้

เล่มที่ 1 เริ่มต้นด้วยการให้คำจำกัดความ (Definitions) อัักเซียม และสัจพจน์เบื้องต้นที่มีความสำคัญยิ่งและจำเป็นต้องรู้ก่อนจะอ่านต่อไป หลังจากนั้นจะมีประพจน์อยู่ทั้งหมด 48 บท ซึ่งแบ่งออกได้เป็น 3 ประเภท คือ

1. ประพจน์ 26 บทแรก ส่วนใหญ่จะกล่าวถึงคุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยม และมีทฤษฎีเกี่ยวกับการเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมอยู่รวม 3 บทด้วย

2. ประพจน์ บทที่ 27-32 เกี่ยวกับทฤษฎีของเส้นขนาน และผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมที่ว่าเท่ากับสองมุมฉาก

3. ประพจน์บทที่ 33-48 กล่าวเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปสามเหลี่ยม และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยพิจารณาถึงความสัมพันธ์กันในเรื่องของพื้นที่เป็นพิเศษ บทที่มีชื่อมากที่สุดคือ บทที่ 47 ซึ่งก็คือทฤษฎีของปิทาโกรัส (Pythagorean Theorem) และการพิสูจน์ที่ให้ไว้ก็เชื่อกันว่าเป็นของที่ยุคลิดคิดนั้นเอง ส่วนบทที่ 48 เป็นบทกลับของบทที่ 47

เนื้อหาส่วนใหญ่ของหนังสือเล่มนี้เป็นผลงานของพวกปิทาโกเรียนสมัยแรก ๆ นิยามที่ปรากฏในหนังสือเล่มนี้ มีดังนี้

1. จุด คือสิ่งซึ่งไม่มีความกว้าง ความยาวและความหนา
2. เส้น คือสิ่งที่มีแต่ความยาว ไม่มีความกว้าง
3. ปลายของเส้นตรง คือจุด
4. เส้นตรง คือเส้นซึ่งประกอบด้วยจุดวางเรียงกัน

5. พื้นที่ผิว คือพื้นที่ของด้านที่มีแต่ความยาวและกว้างเท่ากัน

6. ปลายสุดของพื้นที่ผิว คือเส้น

7. พื้นที่ผิวซึ่งอยู่ในระนาบหนึ่งก็คือ พื้นที่ซึ่งประกอบด้วยเส้นตรงวางเรียงกัน

8. มุมในระนาบ คือมุมที่เกิดจากเส้นตรง 2 เส้น มาพบกัน ซึ่งเส้นตรง 2 เส้นนี้จะต้องไม่ทับกัน

9. เมื่อมุมที่ประกอบด้วยเส้นตรง 2 เส้น เป็นเส้นตรงซึ่งต่อกันเราเรียกมุมนั้นว่า มุมตรง

10. เส้นตรงเส้นหนึ่ง ถูกนำไปตั้งบนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง แล้วทำให้มุมที่ประชิดกันเท่ากันแล้ว แต่ละมุมที่เท่ากัน เรียกว่ามุมฉาก และเส้นตรงนั้นเรียกว่า เส้นตั้งฉาก

11. มุมป้าน คือมุมที่โตกว่า 1 มุมฉาก

12. มุมแหลม คือมุมที่เล็กกว่า 1 มุมฉาก

13. ขอบเขต (Boundary) คือ ปลายสุดของทุกสิ่ง

14. รูปร่าง คือสิ่งซึ่งประกอบด้วยขอบเขตเดียว หรือหลายขอบเขต

15. วงกลม คือรูปร่างที่อยู่ในระนาบเดียว ซึ่งประกอบด้วยเส้นเส้นหนึ่งซึ่งทำให้เส้นตรงทั้งหลายอยู่ห่างจากจุด ๆ หนึ่ง เป็นระยะทางเท่ากัน

16. และจุด ๆ นั้นเรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม

17. เส้นผ่านศูนย์กลาง คือเส้นตรงที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง และไปสิ้นสุดลงที่เส้นรอบวง ตรงข้ามทั้งสอง และแบ่งวงกลมออกเป็น 2 ส่วน

18. ครึ่งวงกลม คือรูปซึ่งประกอบด้วยเส้นผ่านศูนย์กลาง และเส้นรอบวงที่ถูกตัดออก และจุดศูนย์กลางของครึ่งวงกลม ก็คือจุดจุดเดียวกับจุดศูนย์กลางของวงกลม

19. รูปที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง มีลักษณะดังนี้

รูป 3 เหลี่ยม คือรูปที่ประกอบด้วยเส้นตรง 3 ด้าน

รูป 4 เหลี่ยม คือรูปที่ประกอบด้วยเส้นตรง 4 ด้าน

รูป 5 เหลี่ยม คือรูปที่ประกอบด้วยเส้นตรง 5 ด้าน

รูปหลายเหลี่ยม คือรูปที่ประกอบด้วยเส้นตรง 6 ด้านขึ้นไป

20. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทั้ง 3 ด้าน

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากัน 2 ด้าน

รูปสามเหลี่ยมใด ๆ คือ รูปสามเหลี่ยมที่ไม่มีด้านคู่ไหนเท่ากันเลย

21. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน คือรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมป้าน

รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม คือรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้ง 3 เป็นมุมแหลม

22. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้ง 4 เท่ากัน และมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

23. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุม ทุกมุมเป็นมุมฉาก และมีด้านที่อยู่ตรงข้ามกันเท่ากัน

รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านเท่ากัน แต่มุมทุกมุมไม่เท่ากับ 1 มุมฉาก

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคือสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามเท่ากัน และมุมตรงข้ามเท่ากัน แต่มุมไม่เป็นมุมฉาก

รูปสี่เหลี่ยมคางหมู คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านไม่เท่ากัน แต่จะมีด้านขนานกัน 1 คู่

รูปสี่เหลี่ยมที่ต่างไปจากนี้ เรียกว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

24. เส้นขนาน คือเส้นสองเส้นหรือมากกว่าสองเส้น ซึ่งอยู่ในระนาบเดียวกัน และต่อออกไป อย่างไม่จำกัดในทิศทางทั้งสองนั้น และไม่มีวันที่จะพบกันเลยในทิศทางใด ๆ ก็ตาม

เล่มที่ 2 เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ก็เป็นผลงานของพวกปิทาโกเรียนอีกซึ่งเกี่ยวกับเรื่องการเปลี่ยนรูปร่างของรูปโดยให้มีพื้นที่คงเดิม (Transformation of Areas) และเรื่องที่เกี่ยวกับพีชคณิต โดยพิจารณาในแง่ของเรขาคณิต (Geometric Algebra) ส่วนตอนท้ายของหนังสือจะมีประพจน์ อยู่ 2 บทที่กล่าวถึงทฤษฎีของปิทาโกรัสเพื่อเอาไปใช้กับรูปสามเหลี่ยมทั่ว ๆ ไป และปัจจุบันนี้เราเรียกว่ากฎของโคไซน์ "Law of Cosines"

เล่มที่ 3 ในเล่มนี้มีทฤษฎีที่เรารู้จักกันดีอยู่แล้วเกี่ยวกับเรื่องของวงกลม คอร์ด เส้นสัมผัส และรวมทั้งเรื่องการวัดมุมประเภท "associated angles" ด้วย ซึ่งมีอยู่ในตำราเรียนชั้นมัธยม (ของอเมริกา)

เล่มที่ 4 ในหนังสือเล่มนี้ จะเป็นการกล่าวถึงวิธีการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าตามแบบของปิทาโกเรียน โดยใช้ไม้บันทัดและวงเวียน ซึ่งมีอยู่ด้วยกันทั้งหมด 5 ประเภท คือที่มีด้าน 3 ด้าน, 4 ด้าน, 5 ด้าน, 6 ด้าน, และ 15 ด้าน และจากรูปพื้นฐานเหล่านี้ต่อไปก็สามารถจะสร้างรูปหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนด้านเป็น 2^n, $3(2^n)$, $5(2^n)$ และ $15(2^n)$ ได้ และเพิ่งจะมารู้กันเมื่อเกือบศตวรรษที่ 19 นี้เองว่าเราจะใช้เครื่องมือของยุคลิดเพียง 2 อย่างเท่านั้น สร้างรูปหลายเหลี่ยมที่มีด้านกี่ด้านก็ได้ ดังปรากฏในศตวรรษที่ 18 เมื่อ ค.ศ. 1796 ว่า นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันที่มีชื่อเสียง ชื่อ คาร์ล ฟรีดริค เกาส์

(Carl Friedrich Gauss) ได้ตั้งทฤษฎีขึ้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเราจะสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มีจำนวนด้านเป็นค่าจำนวนเฉพาะ (prime) ได้โดยใช้เครื่องมือของยุคลิด ก็ต่อเมื่อจำนวนเฉพาะนั้นอยู่ในรูป $f(n) = 2^{2^n} + 1$ ด้วย และจะได้ว่า เมื่อ n = 0,1,2,3,4 ก็จะได้ค่าจำนวนเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนด้านของรูปนั้น ๆ ออกมาเป็น 3,5,17,257 และ 65,537 ตามลำดับจะเห็นได้ว่า ชาวกรีกยังไม่รู้ว่าจะสร้างใหม่ได้อีก 3 ค่าในกรณีนี้ (คือ เมื่อจำนวนด้านเป็น 17,257 และ 65, 537) แต่นอกจากค่า n นี้แล้ว เรายังไม่ทราบว่ามีค่าใดอีกที่ให้ผลเป็นจำนวนเฉพาะ

ในเล่มนี้ได้กล่าวถึงวิธีสร้างรูป 17 เหลี่ยมด้านเท่าไว้หลายแบบ ต่อมาในปี ค.ศ.1832 ริเชลอต (Richelot) จึงได้พิมพ์งานการคิดค้นวิธีสร้างรูป 257 เหลี่ยมด้านเท่าของเขาออกเผยแพร่

เล่มที่ 5 ในเล่มนี้จะกล่าวถึงผลงานของเอนโดซุส (Eudosus) ในเรื่องเกี่ยวกับทฤษฎีของสัดส่วน ซึ่งมีความสำคัญมาก ทั้งในแง่ที่ช่วยกู้หน้าให้พวกปีทาโกเรียน และในแง่ที่ว่าทฤษฎีบทนี้เป็นรากฐานในการวิเคราะห์ระบบเลขจำนวนจริง (The real number system of mathematical analysis) ซึ่งเดเดคินด์ (Dedekind) และ ไวแยร์สตราสส์ (Weierstrass) เป็นผู้พัฒนาขึ้นในตอนหลัง

ตามทฤษฎีของเขาเราอาจตีความหรือกล่าวให้ง่าย ๆ ได้ดังนี้

ถ้า A,B,C,D เป็นขนาดที่ไม่ได้คิดเครื่องหมายใด ๆ 4 ขนาด โดยที่ A และ B เป็นขนาดชนิดเดียวกัน (ต่างก็เป็นเส้น, มุม, พื้นที่หรือปริมาตร) C และ D ก็เป็นขนาดชนิดเดียวกันแล้ว A : B จะเท่ากับ C : D เมื่อ

mC ⋛ nD ในขณะที่ mA ⋛ nB สำหรับค่า m,n ที่เป็นเลขจำนวนเต็มบวกที่กำหนดขึ้นมา

เล่มที่ 6 จากเล่มนี้เราจะได้ทราบเกี่ยวกับการนำเอาทฤษฎีของสัดส่วนของเอนโดซุส ไปใช้กับเรขาคณิตบนระนาบ ซึ่งจะทำให้เกิดมีทฤษฎีเบื้องต้นเกี่ยวกับสามเหลี่ยมคล้าย การสร้างสัดส่วนตัวอื่น ๆ เมื่อกำหนด สัดส่วนตัวที่ 3 ตัวที่ 4 และตัวกลางมาให้แล้ว การแก้สมการกำลังสองในวิชาพีชคณิตตามวิธีการทางเรขาคณิต ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป ทฤษฎีบทที่ว่าด้วยเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งต้องแบ่งด้านตรงข้ามออกเป็น 2 ส่วนเป็นอัตราส่วนเดียวกันกับด้านอื่นอีก 2 ด้าน ทฤษฎีของปีทาโกรัส (Pythagorean theorem) เมื่อเอาไปใช้กับรูปเหลี่ยมคล้ายบนด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉาก แทนที่จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และทฤษฎีอื่น ๆ อีกมาก

เราอาจกล่าวได้ว่า พวกปีทาโกเรียนรุ่นแรก ๆ คงรู้จักทฤษฎีต่าง ๆ ที่มีปรากฏ

อยู่ในหนังสือเล่มนี้หมดแล้ว แต่การพิสูจน์ต่าง ๆ ที่มีมาก่อนสมัยของ เอนไดซุสมีผิดพลาดอยู่ด้วย เพราะเป็นการพิสูจน์ที่ยึกทฤษฎีเรื่องสัดส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์เป็นหลัก

เล่มที่ 7 เริ่มต้นด้วยขบวนการหา ห.ร.ม. ของจำนวนเต็ม 2 จำนวนหรือมากกว่านั้น ซึ่งเรียกว่าขั้นตอนวิธีของยุคลิด (Euclidean algorithm) และอาจใช้ทดสอบว่าทั้งสองจำนวนนั้นเป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน (Relatively Prime) หรือไม่ได้ด้วย นอกจากนั้นยังมีทฤษฎีเรื่องสัดส่วนในกรณีที่เป็นตัวเลขและมีคุณสมบัติเบื้องต้นของตัวเลขอีกมาก

เล่มที่ 8 ส่วนใหญ่เกี่ยวกับเรื่องสัดส่วนต่อเนื่อง (continued proportions) และอนุกรมก้าวหน้าทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง เช่น ถ้ามีสัดส่วนต่อเนื่องเป็น $a : b = b : c = c : d$ แล้วก็จะได้ว่า a, b, c, d ก็จะอยู่ในอนุกรมก้าวหน้าทางเรขาคณิต

เล่มที่ 9 *เล่มนี้มีทฤษฎีที่มีความสำคัญหลายบท เช่น ทฤษฎีบทที่ 14 ซึ่งเท่ากับ*เป็นทฤษฎีขั้นมูลฐานของเลขคณิต (foundamental theorem of arithemetic) ที่ว่า "เลขจำนวนเต็มใด ๆ ที่มีค่ามากกว่า 1 จะสามารถเขียนแสดงเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะได้เพียงทางเดียวเท่านั้น"

ทฤษฎีบทที่ 35 เป็นการพิสูจน์สูตรผลบวกของอนุกรมก้าวหน้าทางเรขาคณิตที่มีอยู่ n เทอม โดยใช้วิธีทางเรขาคณิต และทฤษฎีบทสุดท้ายคือบทที่ 36 เป็นการพิสูจน์สูตรของเลขประเภท perfect number ที่มีชื่อเสียงและกล่าวไปแล้ว

นอกจากนั้น ในเล่มที่ 9 นี้ ยังมีสิ่งที่เด่นอีกอย่างหนึ่งคือ การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 20 ของยุคลิด (ที่ว่า จำนวนของจำนวนเฉพาะนี้มีไม่สิ้นสุด) ซึ่งนักคณิตศาสตร์โดย

เล่มที่ 10 เกี่ยวกับจำนวนอตักยะโดยใช้วิธีทางเรขาคณิต ซึ่งนักปราชญ์หลายคนมีความเห็นกันว่าหนังสือเล่มนี้ดูจะเป็นหนังสือเล่มที่เด่นที่สุดของชุดอิลิเมนต์นี้ เนื้อหาส่วนใหญ่นั้นได้มาจากคนของ Theactetus แต่เราก็ให้เกียรติยุคลิดในแง่ที่เขาเป็นผู้ทำให้สมบูรณ์ขึ้นและได้แยกแยะไว้อย่างละเอียดได้อย่างดียิ่ง ทั้งเมื่อมองดูผ่าน ๆ แล้ว ก็คล้ายกับว่าหนังสือเล่มนี้ได้เขียนขึ้นมาโดยใช้การให้เหตุผลอย่างนามธรรม โดยไม่มีสัญลักษณ์ทางพีชคณิตมาช่วยด้วย ทฤษฎีที่สำคัญ ๆ ในหนังสือเล่มนี้มีหลายบท เช่นบทที่ 1 ซึ่งเป็นพื้นฐานของวิธีการที่เรียกว่า ระเบียบวิธีเกษียน (method of exhaustion) ซึ่งกล่าวไว้ว่า "ถ้าจากขนาดใด ๆ เราเอาส่วนหนึ่งที่ไม่น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของมันออกไป และจากส่วนที่เหลือก็เอาอีกส่วนหนึ่งที่ไม่น้อยกว่าครึ่งออกไปอีก ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป "ในที่สุดก็จะคงเหลือขนาดที่น้อยกว่าขนาดใด ๆ ที่กำหนดขึ้นมาให้เป็นชนิดเดียวกัน"

หนังสืออีก 3 เล่มที่เหลือ คือเล่มที่ 11, 12 และ 13 นั้น เป็นเรื่องที่เกี่ยวกับเรขาคณิตสามมิติ (Solid geometry) ซึ่งจะครอบคลุมเนื้อหาส่วนใหญ่ในหนังสือ

เรขาคณิตชั้นมัธยมของอเมริกาในปัจจุบัน ยกเว้นเรื่องเกี่ยวกับทรงกลม ดังรายละเอียดต่อไปนี้

เล่มที่ 11 เป็นคำจำกัดความ ทฤษฎีเกี่ยวกับเส้นและระนาบในปริภูมิและทฤษฎีเกี่ยวกับรูปทรงสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (parallelepipeds)

เล่มที่ 12 เป็นเรื่องของการนำเอาวิธีการระเบียบวิธีเกษียณมาใช้ในการหาปริมาตร ยูโดซุส ประมาณ 370 ปีก่อนคริสตศักราชเป็นผู้คิดวิธีการนี้ขึ้น และอาจถือได้ว่าวิธีการนี้คงใช้เป็นคำตอบของข้อความแย้งกันแต่จริงของพวกที่เป็นสานุศิษย์ของพลาโต วิธีการนี้ใช้สมมุติฐานข้อแรกเป็นหลัก และมีทฤษฎีเป็นพื้นฐานดังต่อไปนี้ "จากขนาดใด ๆ ขนาดหนึ่ง ถ้าเราตัดส่วนที่ไม่น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของมันออกไปและจากขนาดที่เหลือเราตัดส่วนหนึ่งที่ไม่น้อยน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของมันออกไปอีกเช่นนี้เรื่อย ๆ ไปในที่สุดก็จะเหลือขนาดที่มีความยาวน้อยกว่าขนาดอีกอันหนึ่ง ซึ่งเป็นชนิดเดียวกัน และกำหนดไว้ล่วงหน้าก่อนหน้าได้"

เล่มที่ 13 เป็นเรื่องของการคิดสร้างรูปทรงต่าง ๆ 5 แบบที่เรียกว่าทรงหลายหน้าปกติ "regular polyhedra" ให้บรรจุอยู่ในทรงกลม

วิธี (หรือแบบ) การเขียนหนังสืออิลิเมนต์ของยุคลิด

แม้ว่าเนื้อหาในหนังสืออิลิเมนต์จะเป็นเรื่องที่สำคัญก็จริง แต่สิ่งที่อาจจะสำคัญยิ่งกว่านั้นไปอีก ก็ได้แก่วิธี (หรือแบบ) การเขียน (หรือการแสดง) เนื้อหานั้น ๆ ออกมา และอันที่จริงนั้นเราก็ถือกันว่าหนังสืออิลิเมนต์ของยุคลิดเล่มนี้ได้กลายมาเป็นแบบอย่างของรูปหรือลักษณะของคณิตศาสตร์แผนใหม่แล้วด้วย

ดังได้พูดเกริ่นมาในตอนต้นแล้วว่าความสำเร็จที่ยิ่งใหญ่ที่สุดอย่างหนึ่งของนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกโบราณก็คือ การสร้างรูปความคิดแบบมีกติกาเป็นเบื้องต้น (postulational form of thinking) ซึ่งเราก็คงทราบวิธีการกันดีอยู่แล้ว กล่าวคือในการสร้างประโยคในระบบนิรนัย (deductive system) นั้น เราต้องแสดงว่าประโยคอันใหม่เป็นผลที่ได้จากประโยคอันก่อน ๆ บางอันอย่างมีเหตุผลจริง ๆ ซึ่งอันก่อน ๆ บางอันก็ได้มาจากประโยคอันก่อน ๆ ยิ่งขึ้นไปอีกและก็เป็นทำนองนี้เรื่อย ๆ ไป แต่เราจะเห็นว่าความเกี่ยวพันกันเป็นลูกโซ่นี้ ไม่อาจจะย้อนขึ้นไปโดยไม่จำกัดได้ ดังนั้นตอนเริ่มแรกที่สุดเราก็ต้องยอมรับประโยคที่ไม่ต้องมีการพิสูจน์จำนวนหนึ่งเสียก่อนมิฉะนั้นก็จะเกิดวนเวียนแบบไก่มาจากไข่และไข่มาจากไก่ไม่รู้จบ ประโยค

ประเภทที่ต้องถือเอาว่าถูกต้องในตอนแรกนี้เราเรียกกติกาสัจพจน์หรืออัคเซียมของการสร้าง

ประโยคอื่น ๆ ต่อไป ลักษณะการจัดหรือสร้างประโยคแบบนี้เอง ที่เราเรียกว่ารูปความคิดแบบมีกติกาเป็นเบื้องต้น

อันที่จริงนอกจากเรื่องนี้เราก็ยังชื่นชมผลงานของยุคลิดในแง่ที่เขาได้แสดงวิธีการพิสูจน์ไว้อย่างถูกต้องตรงตามหลักเกณฑ์ถือเป็นแบบอย่างได้นั้นด้วย อย่างไรก็ตามมาในศตวรรษที่ 17 และ 18 เราได้ละทิ้งรูปการพิสูจน์แบบของยุคลิดไปมาก แต่หลักการเรื่องการกำหนดกติกาขึ้นก่อนนั้น ยังคงมีแทรกอยู่เกือบทุกสาขาของทุกสาขาของคณิตศาสตร์ในปัจจุบันนี้ ทั้งนักคณิตศาสตร์หลายคนก็ยึดถือเอาว่าไม่เพียงแต่ความคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องเป็นความคิดที่ต้องมีข้อตกลงเป็นเบื้องต้นเท่านั้น แต่ในทางกลับกันก็ใช่ด้วยและยังมีผลงานอันหนึ่งที่เป็นไปได้ในปัจจุบันคือ การสร้างเรื่องราวที่จะต้องศึกษากันขึ้นใหม่อีกแบบหนึ่งชื่อเกี่ยวกับสัจพจน์ (axiomatics) ซึ่งเป็นเรื่องของการตรวจสอบคุณสมบัติทั่วไปของเซตของข้อตกลงเบื้องต้นและของความคิดที่ต้องมีข้อตกลงเป็นเบื้องต้นทั้งนั้น

เราไม่ทราบแน่ว่ายุคลิดได้ถืออะไรเป็นข้อตกลงเบื้องต้นของเขา ทั้งไม่รู้ว่ามีเท่าไรด้วยเพราะผู้พิมพ์รุ่นต่อ ๆ มาได้ดัดแปลงและเพิ่มเติมไปเสียแล้ว แม้กระทั่งเรื่องของคำศัพท์ที่ใช้ในสมัยของพวกกรีกตอนแรก ๆ นั้น เขาถือว่าคำสัจพจน์ และ อักเซียมนั้นต่างกันโดยคำแรกหมายความว่า สิ่งที่ถือว่า "จริง" ในวิทยาการแขนงหนึ่ง ๆ (ในที่นี้ก็คือเรขาคณิต) ส่วนคำหลังจะหมายความว่า สิ่งที่ถือว่าเป็นความจริงโดยทั่ว ๆ ไปในวิทยาการทุกแขนง แต่ต่อมาก็ใช้ไปในความหมายอื่น และมาในสมัยนี้เราก็ไม่ถือว่าต่างกันแล้ว หรือให้ใช้คำ 2 คำ ในความหมายที่แทนกันได้

ตามหลักฐานที่มีอยู่ เราอาจกล่าวได้ว่า ยุคลิดคงได้ถือว่าข้อตกลงเบื้องต้นของเขาก็คือประโยค 10 ประโยค ซึ่งใช้แทนประโยคต่อไปนี้ได้ โดยที่ประกอบด้วยอักเซียม (หรือ common notions) 5 ประโยค และสัจพจน์ (ทางเรขาคณิต) อีก 5 ประโยค

A.1 สิ่งทั้งหลายซึ่งเท่ากับสิ่งเดียวกันย่อมเท่ากัน

A.2 ถ้าเอาสิ่งที่เท่ากันมาเพิ่มให้สิ่งที่เท่ากันแล้ว ผลย่อมเท่ากัน

A.3 ถ้าเอาสิ่งที่เท่ากันออกจากสิ่งที่เท่ากันแล้ว ส่วนที่เหลือย่อมเท่ากัน

A.4 สิ่งทั้งหลายซึ่งทับกันได้สนิทนั้น ย่อมเท่ากัน

A.5 ส่วนทั้งหมดย่อมใหญ่กว่าบางส่วน

P.1 เราสามารถลากเส้นตรงจากจุดใด ๆ ไปยังจุดใด ๆ อีกจุดหนึ่งได้ 1 เส้น (It is possible to draw a straight line from point to any other point)

P.2 เราสามารถที่จะต่อเส้นตรงที่เห็นว่ามีจำกัด (finite straight line) ออกไปโดยไม่มีที่สิ้นสุดได้ (produce (it) indefinitely)

P.3 เราสามารถที่จะเขียนวงกลมที่มีจุดใด ๆ เป็นจุดศูนย์กลาง และมีรัศมียาวเท่ากับเส้นตรงที่จำกัดความยาวใด ๆ ที่ลากมาจากจุดศูนย์กลางนั้นได้

P.4 มุมฉากทุกมุมย่อมเท่ากัน

P.5 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้นโดยทำให้มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเข้าน้อยกว่าสองมุมฉากแล้ว ถ้าต่อเส้นตรงทั้งสองออกไปโดยไม่มีที่สิ้นสุดเส้นตรงทั้งสองนั้น ก็จะไปตัดกันบนข้างที่มุมรวมกันได้น้อยกว่าสองมุมฉาก

เมื่อเป็นเช่นนี้ก็ชวนให้เข้าใจว่าประพจน์รวมทั้งหมดถึง 465 บท ได้มาจากประโยคเพียง 10 ประโยคนี้เท่านั้น (ซึ่งนับว่าเป็นเรื่องที่น่าอัศจรรย์ใจมาก) โดยยุคลิดจะใช้วิธีหรือขบวนการแบบที่เรียกว่า synthesis เป็นหลัก กล่าวคือเริ่มจากสิ่งที่รู้แล้วและง่าย ๆ ไปเป็นสิ่งที่ไม่รู้และซับซ้อนขึ้น

สรุปลักษณะสำคัญของหนังสือชุดอิลิเมนต์ของยุคลิด

1) หนังสือชุดอิลิเมนต์ประกอบด้วยพวกที่มีนิยาม (Definitions), สัจพจน์อักเซียม (หรือ Common Notions) และประพจน์

2) ยุคลิดได้ให้นิยามคำศัพท์ที่ต้องใช้ในหนังสือทุกคำ เช่น จุด, เส้น, สามเหลี่ยม

3) ยุคลิดถือว่าอักเซียม กับ สัจพจน์ มีความหมายต่างกันกล่าวคืออักเซียมหมายถึงสิ่งที่ว่าเป็นจริงในวิทยาการทุกแขนง เช่น ถ้าหักสิ่งที่เท่ากันออกจากสิ่งที่เท่ากันส่วนที่เหลือย่อมเท่ากันเป็นต้น ส่วนสัจพจน์หมายถึง สิ่งที่ถือว่าเป็นจริงในทางเรขาคณิต เช่นจะลากเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุดใด ๆ ไปยังจุดใด ๆ อีกจุดหนึ่งได้ เป็นต้นแต่ในสมัยปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ไม่ถือว่าคำทั้งสองนี้มีความหมายต่างกัน

4) ส่วนมากการพิสูจน์ตามที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเป็นวิธีที่ถูกต้องตรงตามหลักเกณฑ์อย่างเคร่งครัด ยิ่งกว่านั้น การพิสูจน์ทฤษฎีบางบทของยุคลิด อาจจัดได้ว่าเป็นวิธีการให้เหตุผลในทางคณิตศาสตร์ที่สละสลวยมากจนถือว่าเป็นแบบฉบับที่ดีได้ เช่นการพิสูจน์เรื่องจำนวนเฉพาะมีไม่จำกัด (The number of prime numbers is infinite)

กิจกรรมการเรียนที่ 3.1

1. ตามหลักฐานที่มีอยู่ทำให้ทราบว่ายุคลิดถือว่าข้อตกลงเบื้องต้นก็คือประโยค 10 ประโยคซึ่งประกอบด้วยอักเซียม 5 ข้อ และสัจพจน์ 5 ข้อ ข้อตกลงเหล่านั้นกล่าวไว้ว่าอย่างไร
2. จงศึกษาและสรุปเกี่ยวกับเนื้อหาสาระของหนังสืออิลิเมนต์ทั้ง 13 เล่ม

3.2 ข้อบกพร่องในหนังสืออิลิเมนต์ของยุคลิด

ข้อบกพร่องหรือจุดอ่อนในหนังสือชุดอิลิเมนต์ ของยุคลิดตามความคิดเห็นของนักคณิตศาสตร์รุ่นหลังมี 3 ประการ กล่าวคือ

1) การสมมุติลอย ๆ โดยไม่มีข้อตกลงที่เรียกว่าอักเซียมหรือสัจพจน์ เป็นหลักตัวอย่าง เช่น

ก) ยุคลิดถือว่าเส้นตรงยาวไม่จำกัด แต่ข้อความในสัจพจน์หมายถึงเราจะต่อเส้นตรงได้โดยไม่สิ้นสุด (Endless) หรือไม่มีขอบเขตขีดคั่น (Boundless) เท่านั้น และในปี ค.ศ.1854 รีมันน์สามารถแสดงให้เห็นความแตกต่างระหว่างการไม่มีขอบเขตขีดคั่น (Unboundness) และความไม่จำกัด (Infinite) ของเส้นตรงได้

ข) ยุคลิดถือว่า ถ้าเส้นตรงผ่านจุดยอดเข้ามาในรูปสามเหลี่ยมแล้ว เมื่อต่อเส้นตรงเส้นนั้นออกไปมากพอ เส้นตรงก็จะต้องตัดด้านซึ่งอยู่ตามข้ามของรูปสามเหลี่ยมนั้น แต่ต่อไปในปี ค.ศ. 1882 พาช (Pasch) ได้ตระหนักว่าจำเป็นจะต้องมีข้อตกลงเบื้องต้นรับรองด้วย ดังนั้นจึงมีผู้เรียกชื่อข้อตกลงเบื้องต้นในเรื่องนี้ว่า ข้อตกลงเบื้องต้นของพาช (Pasch's Axiom)

ค) ยุคลิดถือว่า จะต้องมีจุดตัดของวงกลมหรือของเส้นตรงเสมอแต่นักคณิตตศาสตร์ตระหนักว่า จำเป็นจะต้องมีข้อตกลงเบื้องต้นเรื่องการต่อเนื่อง (Continuty Postulate) รับรองด้วย เช่นข้อตกลงเบื้องต้นของ เดเดคินท์ เป็นต้น

ง) ยุคลิดถือว่า มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่เชื่อมระหว่างจุดที่ต่างกันสองจุดได้ แต่ข้อความในสัจพจน์ของยุคลิดซึ่งกล่าวว่า "เราสามารถลากเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุดใด ๆ ไปยังจุดใด ๆ อีกจุดหนึ่งได้" ไม่ได้หมายความว่าจะสามารถลากเส้นตรงนั้นได้เพียงเส้นเดียว

2) การใช้วิธีการยกรูปซ้อนกัน (Principle of Superposition) ในการพิสูจน์เรื่องการเท่ากันของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งนักคณิตศาสตร์รุ่นหลังเห็นว่าวิธีการเช่นนั้นไม่เหมาะสม เพราะมีข้อคัดค้านได้เช่น ถ้าถือว่าจุดเป็นตำแหน่งแล้ว ก็จะเคลื่อนที่ไม่ได้จึงควรที่จะมีข้อตกลงเบื้องต้นเสียก่อน โดยจะต้องมีนิยามการเคลื่อนที่ และสัจพจน์เกี่ยวกับการเคลื่อนที่นักคณิตศาสตร์นิยามการเคลื่อนที่ว่า "การเคลื่อนที่คือการเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบโดยที่ระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง" สำหรับสัจพจน์ของการเคลื่อนที่นั้นมีข้อความว่า "รูปเรขาคณิตเคลื่อนที่ได้จากนิยามและสัจพจน์นี้จึงทำให้สร้างนิยามใหม่ว่า รูปเรขาคณิตสองรูปจะเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อเคลื่อนรูปหนึ่งให้ทับ

อีกรูปหนึ่งได้สนิท

3) การให้คำนิยามคำศัพท์ที่ใช้ทุกคำ เนื่องจากยุคลิดพยายามจะให้นิยามหรืออย่างน้อยก็ให้คำอธิบายคำศัพท์ทางเรขาคณิตที่ใช้ทุกคำ เช่น จุด เส้น และสามเหลี่ยม เป็นต้น แต่คำนิยามของจุดและเส้นดังที่ยุคลิด กำหนดไว้ว่า จุดคือสิ่งที่ไม่มีขนาด (A point is that which hos no part.) และเส้นคือสิ่งที่มีความยาวแต่ไม่มีความกว้าง (A line is breadth less length) มิได้หมายความว่าบุคคลอื่นจะเข้าใจความหมายได้อย่างถูกต้อง เพราะถ้อยคำที่ใช้ในการอธิบายความหมาย กลับยิ่งมีความหมายยุ่งยากกว่าความหมายของจุดและเส้นเอง และเมื่ออธิบายความหมายของคำเหล่านี้แล้ว ก็อาจจะต้องปฏิบัติทำนองเดียวกันนี้กับคำอื่น ๆ ที่อ้างถึงในเวลาต่อไป จนกว่าจะเป็นที่เข้าใจได้ตรงกันซึ่งการอธิบายความหมายของถ้อยคำที่กระทำต่อเนื่องกันเป็นทอด ๆ นั้น อาจจะย้อนกลับลงมาที่คำเดิม หรืออาจจะเลยออกนอกทางไปจนหาที่สิ้นสุดไม่ได้ ฉะนั้นเพื่อขจัดปัญหาข้อนี้ให้หมดไปนักคณิตศาสตร์แผนใหม่จึงตกลงหรือกำหนดให้ใช้คำบางคำ เช่น จุด เส้นระนาบ โดยไม่ให้คำนิยาม คือถือว่าเป็นพวกอนิยามศัพท์

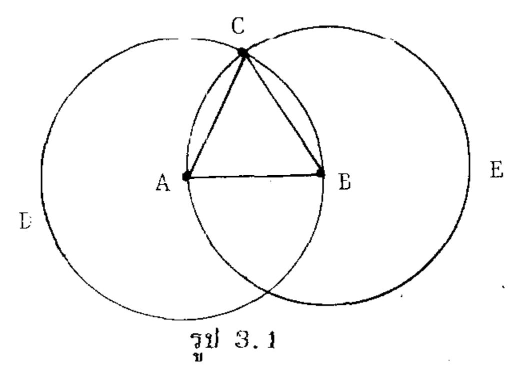
ข้อบกพร่องของยุคลิดในอิลิเมนต์นั้น ขอยกตัวอย่างดังต่อไปนี้

1. การสมมุติที่ไม่ได้ระบุหรือเขียนไว้ (Tacit assumtion)

มีบางสิ่งบางอย่างที่ยุคลิดสรุปว่าเป็นจริงแต่ไม่ได้ระบุไว้ และทำให้เกิดช่องโหว่ขึ้นได้ ขอยกเอาประพจน์ 1 ในหนังสือเล่มที่ 1 มาเป็นตัวอย่างดังนี้

I 1 On a given straight lines to construct an equilataral triangle.

ประพจน์นี้กำหนดเซกเมนต์ให้และให้สร้างสามเหลี่ยมด้านเท่าบนด้านที่กำหนดให้นี้ ยุคลิด ดำเนินการดังนี้



รูป 3.1

- ให้ $\overline{AB}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
- จะต้องสร้างสามเหลี่ยมด้านเท่าบนด้าน $\overline{AB}$
- ให้ A เป็นศูนย์กลาง รัศมี $\overline{AB}$ เขียนวงกลม ACD (สัจพจน์ 3)
- ให้ B เป็นศูนย์กลาง รัศมี $\overline{BA}$ เขียนวงกลม ACE (สัจพจน์ 3)
- แต่ A เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม CDB ทำให้ $\overline{AC}$ เท่ากับ $\overline{AB}$ นิยาม 15
- ทำนองเดียวกัน B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม CAE ทำให้ $\overline{BC} = \overline{BA}$ นิยาม 15
- ได้พิสูจน์แล้วว่า $\overline{CA}$ เท่ากับ $\overline{AB}$ ดังนั้น $\overline{CB}$ จึงเท่ากับ $\overline{AB}$ และ สิ่งทั้งหลายที่เท่ากันสิ่งอันเดียวกันแล้วย่อมเท่ากัน จึงทำให้ $\overline{CA}$ ยาวเท่ากับ $\overline{CB}$ (common notion 1)
- ดังนั้น ด้าน $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ จึงเท่ากัน
- นั่นคือ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่สร้างบนด้าน $\overline{AB}$ ที่กำหนดให้

การสร้างวงกลมจากการพิสูจน์นี้เป็นไปตามสัจพจน์ 3 ไม่มีสัจพจน์ใดเลยที่ประกันว่าวงกลมสองวงตัดกันที่จุด ถ้าไม่ตัดกันคือวงกลมมีช่องไหว่และวงกลมทั้งสองก็จะไม่มีจุดร่วมกัน ดังนั้นจุดตัดจะมีได้ก็ต้องเป็นสัจพจน์หรือการพิสูจน์ แต่ยุคลิดไม่มีทั้งสัจพจน์หรือการพิสูจน์ที่แสดงว่ามีจุดตัดนี้ นั่นก็แสดงว่าการพิสูจน์ประพจน์นี้ไม่สมเหตุสมผล (invalid)

จากตัวอย่างนี้ถ้าพิจารณาแล้วสิ่งที่ยุคลิด ขาดไปก็คือสัจพจน์ของความต่อเนื่อง (Axiom of continuity)

2. ส่วนใหญ่เท่ากับผลบวกของส่วนย่อย (The Whole Equals the Sum of its Parts)

ลองพิจารณาทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ (1) มุมป้านทุกมุมเป็นมุมฉาก

พิสูจน์ ให้ ABC เป็นมุมป้าน ดังนั้นเส้นตั้งฉาก $\overline{BE}$ จึงอยู่ในมุม ABC สร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้า BCDE โดยให้ $\overline{BE} = \overline{BA}$

- เพราะว่า $\overline{AD}$ กับ $\overline{BC}$ ไม่ขนานกัน ดังนั้นเส้นตั้งฉากจากจุดแบ่งครึ่งด้านทั้งสอง คือ $\overline{MX}$ และ $\overline{NY}$ จะพบกันที่จุด O
- ลาก $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ และ $\overline{OD}$
- $\overline{ON}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ และ N เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$ ทำให้ $\overline{OB} = \overline{OC}$ และทำนองเดียวกัน $\overline{OM}$ ตั้งฉากกับ

$\overline{AD}$ และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AD}$ ทำให้ $\overline{OA} = \overline{OD}$

- $\overline{AB} = \overline{CD}$ โดยการสร้าง

ดังนั้น $\Delta OAB = \Delta OCD$

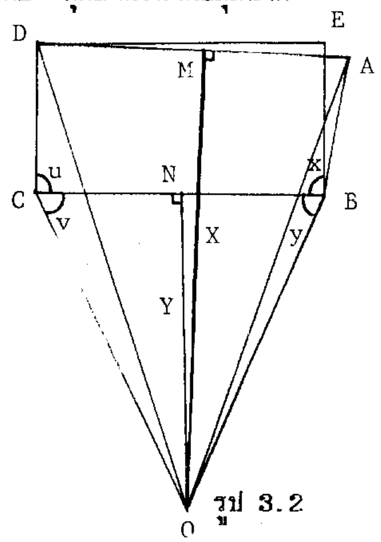
และ $\angle OBA = \angle OCD$

- แต่ส่วนรวมเท่ากับผลบวกของส่วนย่อย

ดังนั้น $\angle x + \angle y = \angle u + \angle v$

- แต่รูปสามเหลี่ยม OBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นั่นก็คือ มุมป้านเท่ากับมุมฉาก

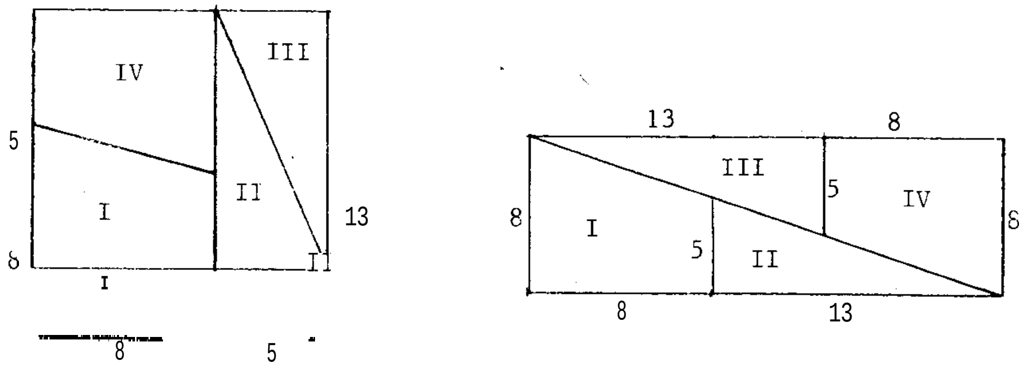


รูป 3.2

3. อันตรายจากการสร้างรูป (The Danger in Diagrams)

ในหนังสืออีลิเมนต์นั้นเริ่มต้นจากสิ่งกำหนดให้ สร้าง แล้วมาพิสูจน์ เป็นที่น่าสังเกตว่าการสร้างทุกครั้งเมื่อสร้างเสร็จก็พิสูจน์เลยโดยไม่ทราบว่าการสร้างนั้นถูกต้องหรือเปล่า ขอให้ดูสิ่งต่อไปนี้เป็นตัวอย่าง

กำหนดสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 13 หน่วย ให้แบ่งจัตุรัสนี้ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูป ขนาด 8×13 และ 5×13 ตามลำดับ จากนั้นก็แบ่งรูป (8×13) ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูเท่ากันสองรูป โดยให้ด้านขนานยาว 8 และ 5 หน่วยตามลำดับแล้วแบ่งรูป (5×13) ออกเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากเท่ากันสองรูป ให้มีขามุมฉากยาว 5 กับ 13 หน่วย จากนั้นก็เรียงรูปนี้ให้เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูป



รูป 3.3

จากรูปจะเห็นว่า พื้นที่ของรูปจัตุรัสคือ $13^2 = 169$ ตารางหน่วยแต่พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ $8 \times 21 = 168$ ตารางหน่วย

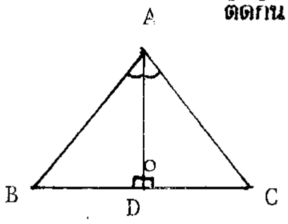
พื้นที่หายไปไหน 1 ตารางหน่วย คงจะมีที่ผิดแน่

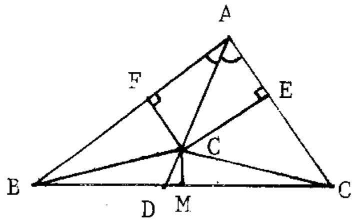
สิ่งที่ผิดพลาดจากการสร้างรูปนั้นยังมีอีกมาก ขอให้พิจารณาข้อความต่อไปนี้

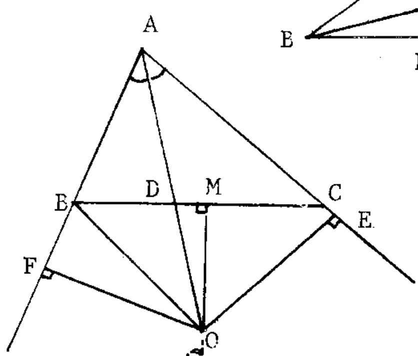
สามเหลี่ยมทุกรูปย่อมเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

สร้าง
- แบ่งครึ่งมุม A ด้วย $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ ที่จุด M
- จากจุด M ลาก $\overline{MO}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$
- เส้น $\overline{MO}$ กับ $\overline{AD}$ ไม่ใช่เส้นตรงเดียวกัน และไม่ขนานกันย่อมตัดกัน







รูปที่ 3.4

ให้เส้นทั้งสองตัดกันที่จุด O จากนี้จะเห็นว่าพอจะเป็นได้ 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 จุด O อยู่บน $\overline{BC}$

กรณีที่ 2 จุด O อยู่ในรูปสามเหลี่ยม ABC

กรณีที่ 3 จุด O อยู่นอกรูปสามเหลี่ยม ABC

ในกรณีที่ 2 และ 3 ลาก $\overline{OF}$ และ OE ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ หรือส่วนที่ต่อออกไปตามลำดับ ลาก $\overline{OB}$ และ $\overline{OC}$

พิสูจน์กรณีที่ 1

- $\overline{AD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ทำให้ <BDA - <CDA
- $\overline{AD}$ แบ่งครึ่งมุม BAC ทำให้ <BAD = <CAD
- $\overline{AD} = \overline{AD}$
- ดังนั้น $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ ทำให้ $\overline{AB} = \overline{AC}$

  นั่นคือ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

กรณีที่ 2 $\Delta AFO \cong \Delta ACE$

เพราะว่า <AFO = <AEO,,, <OAF = <OAE และมี $\overline{AO}$ เป็นด้านร่วม

- ทำให้ $\overline{AF} = \overline{AE}$ และ $\overline{OF} = \overline{OE}$
- $\Delta OBF \cong \Delta\ OCE$

  เพราะว่า $\overline{OF} = \overline{OE}$, LOFB = LOEC, $\overline{OB} = \overline{OC}$ โดยที่ $\overline{OM}$ แบ่งครึ่งด้านตั้งฉากกับ $\overline{BC}$
- ดังนั้น $\overline{FB} = \overline{EC}$

  บวกสมการนี้กับ $\overline{AF} = \overline{AE}$ ทำให้ $\overline{AF} + \overline{FB} = \overline{AE} + \overline{EC}$
- นั่นคือ $\overline{AB} = \overline{AC}$

กรณีที่ 3 ก็คล้าย ๆ กับกรณีที่ 2 $\Delta AFO \cong \Delta\ AOE$

ทำให้ $\overline{AF} = \overline{AE}$ และ $\Delta OBF \cong \Delta OCE$

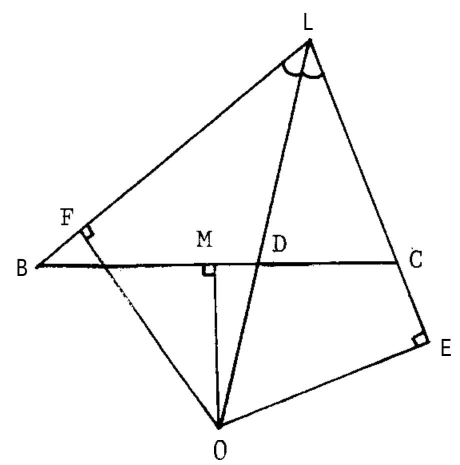
ทำให้ $\overline{BF} = \overline{CE}$

- ดังนั้น $\overline{AF} - \overline{FB} = \overline{AB} - \overline{EC}$

นั่นคือ $\overline{AB} = \overline{AC}$

จากการพิสูจน์ทำให้เราสรุปว่า สามเหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ข้อผิดพลาดอันนี้อยู่ที่การเขียนรูป มันเป็นไปไม่ได้ที่จุด O จะอยู่บน $\overline{BC}$ หรืออยู่ในรูปสามเหลี่ยม ABC ดังนั้นกรณีที่ 2 จึงเกิดขึ้นไม่ได้ โอกาสที่จะเป็นไปได้คือกรณีที่ 3 แต่การเขียนรูปของกรณี

ที่ 3 ไม่ถูกต้อง ปลายเส้นตั้งฉากจากจุด O ไปยัง $\overline{AB}$ กับ $\overline{AC}$ นั้น จะต้องอยู่ภายในด้านหนึ่งและภายนอกอีกด้านหนึ่ง ดังรูป



รูป 3.5

เมื่อพิสูจน์แล้วได้ว่า $\overline{AF} = \overline{AE}$ และ $\overline{BF} = \overline{CE}$ นั้น สมเหตุสมผล (Valid)
แต่ $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB}$ และ $\overline{AC} = \overline{AE} - \overline{EC}$ ไม่ใช่ $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$
ดังที่พิสูจน์มาแต่ก่อน จึงทำให้ $\overline{AB} = \overline{AC}$ ไม่ได้

การพิสูจน์ที่แล้ว ๆ เราเอาบวกกันหรือลบกันตามที่ตาเราเห็น หรือโดยสามัญสำนึกไม่มีสัจพจน์อันใดระบุไว้ รูปที่เราสร้างก็ไม่มีการพิสูจน์ว่าสร้างแล้วถูกหรือเปล่าสิ่งสำคัญยิ่งในการพิสูจน์อันนี้ก็คือ ปัญหาที่ว่า F อยู่ระหว่าง A กับ B หรือไม่ E อยู่ระหว่าง A กับ C หรือไม่ ? ปัญหาเหล่านี้เป็นเรื่องของสัจพจน์ของลำดับ (Axioms of order) ที่ยุคลิดไม่ได้ระบุไว้

กิจกรรมการเรียนที่ 3.2

1. ข้อบกพร่องในหนังสืออิลิเมนต์ของยุคลิดตามความคิดเห็นของนักคณิตศาสตร์รุ่นหลังนี้กี่ประการ จงอธิบายพร้อมยกตัวอย่างประกอบ

3.3 สัจพจน์ของฮิลแบร์ต (Hilbert's Axioms for Eculidean Geometry)

เมื่อมีความไม่สมบูรณ์เกิดขึ้นหลายประการในเรขาคณิตของยุคลิดจึงมีนักคณิตศาสตร์อีกหลายท่านได้พยายามที่จะหาทางกำจัดข้อบกพร่องเหล่านั้น และจากผลงานของนักคณิตศาสตร์ซึ่งมีชื่อว่า พาช เปอาโน และ ฮิลแบร์ต ทำให้ข้อบกพร่องทางตรรกศาสตร์ในวิชาเรขาคณิตของยุคลิดได้ถูกกำจัดไปจนหมดสิ้น ทำให้วิชาเรขาคณิตของยุคลิดตั้งอยู่บนรากฐานทางตรรกวิทยา และถูกต้องแน่นอนสมบูรณ์แบบ

ในบรรดาสัจพจน์ทั้งหลายที่ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อกำจัดข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่นับว่าดีที่สุด คือ สัจพจน์ชุดที่ ฮิลแบร์ต สร้างขึ้นประกอบขึ้นด้วย

กลุ่มที่ 1 สัจพจน์ของการเกิด (Incidence axioms)

กลุ่มที่ 2 สัจพจน์ของลำดับ (Order axiom)

กลุ่มที่ 3 สัจพจน์ของการเท่ากันทุกประการ (Congruency axioms)

กลุ่มที่ 4 สัจพจน์ของการขนาน (An axioms of parallels)

กลุ่มที่ 5 สัจพจน์ของความต่อเนื่อง (Axiom of continuity)

กลุ่มที่ 1 สัจพจน์ของการเกิด (Incidence axiom) ประกอบขึ้นด้วยสัจพจน์ต่าง ๆ 4 สัจพจน์

1.1 จะมีเส้นทอดไปบนจุด 2 จุดที่กำหนดให้

1.2 จะมีเส้นอย่างมากที่สุดหนึ่งเส้นทอดไปบนจุด 2 จุดที่กำหนดให้

1.3 ทุก ๆ เส้นจะมีจุดสองจุดเป็นอย่างน้อยมีจุด 3 จุดเป็นอย่างน้อยที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน

1.4 จะมีระนาบเพียงระนาบเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด 3 จุดใด ๆ ที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน

กลุ่มที่ 2 สัจพจน์ของลำดับ (Order axioms) ประกอบด้วยสัจพจน์ต่าง ๆ 4 สัจพจน์

2.1 ถ้า B เป็นจุดที่อยู่ระหว่างจุด A กับ C แล้วจุด A,B,C จะเป็นจุดที่ต่างกันบนเส้นเส้นหนึ่งและ B ก็จะเป็นจุดที่อยู่ระหว่างจุด C กับ A ด้วย

2.2 สำหรับจุดสองจุดใด ๆ A และ B ซึ่งอยู่บนเส้น ๆ หนึ่งแล้วจะมีจุด C อย่างน้อยหนึ่งจุดซึ่งทำให้จุด B อยู่ระหว่าง A กับ C

2.3 ถ้า A,B,C เป็นจุด 3 จุดใด ๆ บนเส้นเดียวกันแล้วจะมีเพียงจุดเดียวใน 3 จุดนี้ที่อยู่ระหว่างจุดอีกสองจุดที่เหลือ

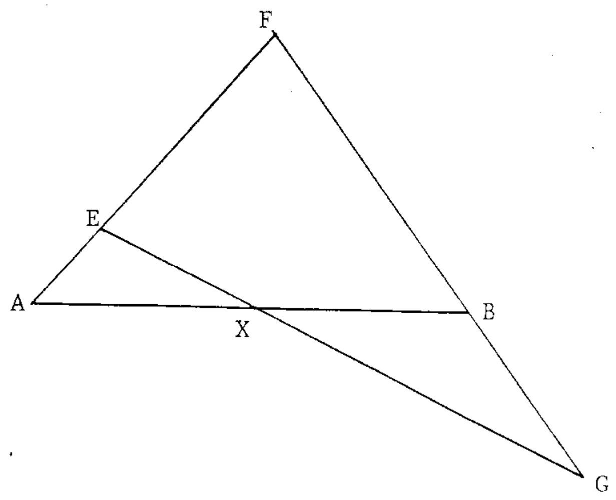
นิยามที่น่าสนใจของฮิลแบร์ตที่ควรยกมากล่าวในช่วงนี้มีดังนี้

นิยาม เซ็กเมนต์ AB (Segment AB) หมายถึงเซตของจุดทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง A,B จุด และ B เรียกว่าเป็นจุดปลายของเซ็กเมนต์ เซ็กเมนต์ AB เหมือนกับ เซ็กเมนต์ BA

2.4 สัจพจน์ข้อนี้มีชื่อว่าสัจพจน์ของพาช (Pasch's Axiom) กล่าวว่าให้ A,B,C เป็นจุด 3 จุดไม่อยู่บนเซ็กเมนต์เดียวกันให้ α เป็นเส้น ๆ หนึ่ง บนระนาบ ABC ซึ่งไม่ผ่านจุด A,B หรือ C ถ้า α ผ่านจุดในเซ็กเมนต์ หนึ่งในรูปสามเหลี่ยม ABC แล้วมันจะผ่านจุดในเซ็กเมนต์ที่เหลือเซ็กเมนต์ ใดเซ็กเมนต์หนึ่ง

นิยาม ถ้า ABC เป็นจุด 3 จุด ไม่อยู่บนเส้นเดียวกันแล้ว เซ็กเมนต์ AB,BC,CA และจุดปลายของมันเรียกสามเหลี่ยม ABC เซ็กเมนต์ทั้งสามเรียกว่าด้านของ สามเหลี่ยมและจุด 3 จุดเรียกจุดยอด (vertices)

เนื่องจาก สัจพจน์ทั้งสี่นี้ไม่ได้กล่าวเกี่ยวกับการเกิดจุดที่จะมีได้ซึ่งอยู่ระหว่าง จุดสองจุดที่กำหนดให้เลยดังนั้นจึงเกิดมีทฤษฎีขึ้นมามีชื่อว่า "ทฤษฎีกฎการมีอยู่ (Existence Theorem) กล่าวว่า "ถ้า A และ B เป็นจุดที่ต่างกัน 2 จุด บน เส้น ๆ หนึ่งแล้วจะมีจุด x ซึ่งอยู่ระหว่างจุด A กับ B เกิดขึ้นเสมอ"



รูป 3.6

พิสูจน์ จากสัจพจน์ 1.3 จะมีจุด E เกิดขึ้นข้างนอกเส้น $\overline{AB}$
จากสัจพจน์ 1.1 เส้น $\overline{AE}$ จะเชื่อมจุด A และ E ได้ลาก $\overline{AE}$
จากสัจพจน์ 2.2 จะมีจุด F บน $\overline{AE}$ และ G บน $\overline{FB}$ ซึ่งทำให้ E อยู่ระหว่าง F กับ A
และ B อยู่ระหว่าง G กับ F ลาก $\overline{GE}$ และ $\overline{FB}$
เส้น $\overline{GE}$ ไม่ผ่านจุด A,B หรือ F เพราะว่าถ้าผ่านจุด A จุด E จะทับจุด A และ $\overline{GE}$ จะตัดกับ $\overline{AF}$ ที่จุด A จุดเดียวเท่านั้น ตามสัจพจน์ 1.2
ถ้า $\overline{GE}$ ผ่านจุด B $\overline{GE}$ กลายเป็นเส้น BGE และจะตัดกับ AF ที่จุด F เท่านั้น และเมื่อ $\overline{GE}$ ผ่านจุด F ก็จะให้ผลเช่นเดียวกัน เพราะว่า E เป็นจุดอยู่ระหว่าง A และ F จากสัจพจน์ของพาซ
เมื่อเทียบกับ $\overline{DF}$ เราจะได้ว่า $\overline{GE}$ จะต้องพบกัน $\overline{AB}$ ที่จุด X ซึ่งอยู่ระหว่างจุด A กับ B หรือไม่ก็ต้องพบกัน $\overline{FB}$ ที่จุด Y ซึ่งอยู่ระหว่างจุด F และ B

แต่จุด Y จะเกิดขึ้นไม่ได้ทั้งนี้ก็เพราะว่าจากการสร้างจุดตัดกันระหว่างเส้น $\overline{FB}$ กับ $\overline{GE}$ คือจุด G และจุด G จะอยู่ระหว่างจุด F กับ B ไม่ได้ตาม Axiom ทั้งนี้ก็เพราะว่าจุด B อยู่ระหว่างจุด F กับ G

ดังนั้นเส้น $\overline{GE}$ จึงตัดกับ $\overline{AB}$ ที่จุด X ซึ่งอยู่ระหว่างจุด A กับ B นั่นคือระหว่างจุด A กับจุด B มีจุด X เกิดขึ้น

กลุ่มที่ 3 สัจพจน์ของการเท่ากันทุกประการ (Congruency axioms)

3.1 ถ้า A และ B เป็นจุดที่ต่างกันบนเส้น α และถ้า A' เป็นจุด ๆ หนึ่งบนเส้น β (ไม่จำเป็นต้องแตกต่างจาก α แล้วจะมีจุดเพียงจุดเดียวเท่านั้นคือ B' บนแต่ละรังสี β ออกมาจาก A' โดยที่เซ็กเมนต์ A'B' เท่ากับเซ็กเมนต์ AB ทุกประการ

3.2 ถ้าเซ็กเมนต์ 2 ส่วนต่างก็เท่ากับส่วนที่ 3 แล้ว เซ็กเมนต์ทั้งสองจะเท่ากันทุกประการและเห็นว่าการเท่ากันทุกประการเป็น equivalence relation นั่นคือ $\overline{AB} = \overline{AB}$ ถ้า $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ แล้ว $\overline{A'B'} = \overline{AB}$: ถ้า $\overline{AB} = \overline{CD}$ และ $\overline{CD} = \overline{EF}$ แล้ว $\overline{AB} = \overline{EF}$

3.3 ถ้าจุด C อยู่ระหว่าง A และ B และจุด C' อยู่ระหว่าง A',B' และถ้าเซ็กเมนต์ AC = เซ็กเมนต์ A'C' และเซ็กเมนต์

CB = เซ็กเมนต์ C'B' แล้วเซ็กเมนต์ AB = เซ็กเมนต์ A'B'

นิยาม มุมหมายถึงจุด (ซึ่งเรียก vertex ของมุม) และรังสี 2 อัน เรียกแขนของมุม) ออกมาจากจุดนั้น

3.4 ถ้า BAC เป็นมุม ๆ หนึ่งซึ่งมีด้านไม่อยู่บนเส้นเดียวกันและกำหนดให้อยู่บนระนาบหนึ่ง ถ้า A'B' เป็นรังสีที่ออกมาจาก A' แล้วจะมีรังสีหนึ่งรังสีเดียวเท่านั้นคือ A'C' บนด้านที่กำหนดให้ของรังสี A'B' โดยมุม B'A'C' = มุม BAC

นิยาม ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งแล้วมุมทั้งสามคือ <BAC, <CBA, <ACB เรียกว่าเป็นมุมของรูปสามเหลี่ยม มุม BAC เรียกว่าเป็นมุมที่เกิดจากด้าน $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ของรูปสามเหลี่ยม ABC

3.5 ถ้าด้านสองด้านและมุมที่อยู่ในระหว่างด้านคู่นั้นของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เท่ากับด้านสองด้านและมุมในระหว่างด้านคู่หนึ่งของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง จะทำให้รูปสามเหลี่ยมคู่นั้นเท่ากันทุกประการ มุมที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมแรกจะเท่ากับมุมที่สมนัยกันในรูปสามเหลี่ยมรูปที่สอง

กลุ่มที่ 4 สัจพจน์ของการขนาน (Axiom of parallel)

4.1 สัจพจน์ของเพลย์แฟร์ (Playfair's axiom) กล่าวว่าเราสามารถลากเส้นตรงให้ผ่านจุดจุดหนึ่งที่ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ ให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

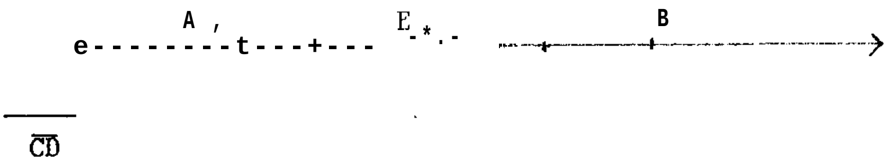
กลุ่มที่ 5 สัจพจน์ของความต่อเนื่อง (Axiom of continuity)

5.1 สัจพจน์ของเดเดคินด์ (Dedekin) กล่าวว่า "ถ้าจุด ทุกจุดของเส้นตรงแบ่งออกเป็นสองพวก ซึ่งพวกแรกอยู่ทางซ้ายของพวกที่สองแล้วจะมีจุดหนึ่งจุดเดียวเท่านั้นที่แบ่งกลุ่มจุดทั้งหมดออกเป็นสองพวก"

5.2 สัจพจน์ของการวัดหรือสัจพจน์ของอาร์คิมีดีส (Axiom of measure of the Archimedean axiom)

ถ้า $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นเซ็กเมนต์ใด ๆ จะมีเลขจำนวนหนึ่งคือ n

ที่ถ้าแบ่งเซ็กเมนต์ AB ออกไป n ช่วง ด้วยขนาดช่วง $\overline{CD}$ โดยเริ่มจาก A แล้วจะมีจุด E จุดหนึ่งซึ่งทำให้ $n.\overline{CD} = \overline{AE}$ โดย E จะอยู่ระหว่าง A กับ B



(ข้อนี้ทำให้เกิดผลคือ $\overleftrightarrow{AB}$ เป็น infinite)

รูป 3.7

กิจการการเรียนที่ 3.3

1. สัจพจน์ของฮิลแบร์ตมีกี่กลุ่มอะไรบ้าง
2. สัจพจน์ของเพลย์แฟร์กล่าวว่าอย่างไร
3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A และ B เป็นจุดที่ต่างกันสองจุดบนเส้น ๆ หนึ่งแล้ว จะมีจุด x ซึ่งอยู่ระหว่าง A กับ B เกิดขึ้นเสมอ