บทที่ 2

รากฐานเรขาคณิต

เค้าโครงเรื่อง

2.1 สัญลักษณ์ที่ใช้ในทางตรรกวิทยา

2.2 หลักการหาเหตุผล

2.3 เรขาคณิตเชิงสัจพจน์

สาระสำคัญ

1. ลักษณะของคำนิยามที่ดี
2. ความรู้ทางตรรกวิทยาบางประการ สัญลักษณ์ที่ใช้ในทางตรรกวิทยาข้อความที่เป็น contradictory กัน ข้อความที่เป็น contrary กัน กฎทางตรรกวิทยาของอะริสโตเติล (Three Laws of thoughts)
3. การให้เหตุผลแบบอุปมานและการให้เหตุผลแบบอนุมาน
4. ลักษณะของสัจพจน์ที่ดี
5. การสร้างโมเดลเพื่อตรวจสอบคุณสมบัติของสัจพจน์
6. เรขาคณิตจำกัด เรขาคณิตจำกัดอย่างง่ายเช่น เรขาคณิต 3 จุด เรขาคณิต 7 จุดและ 7 เส้น

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้วนักศึกษาสามารถ

1. หาเหตุผลโดยกระบวนการทางตรรกวิทยา
2. ให้เหตุผลโดยสรุปจากสัจพจน์
3. สร้างโมเดลเพื่อตรวจสอบคุณสมบัติของเซตของสัจพจน์
4. ให้เหตุผลด้วยวิธีสรุปจากหลักเกณฑ์หรือสัจพจน์ได้ในกรณีที่กำหนดสัจพจน์มาให้ชุดหนึ่งแล้วพบว่าสัจพจน์ชุดนั้นสมเหตุสมผลตามข่ายที่กำลังพิจารณาอยู่

ลักษณะสำคัญของคณิตศาสตร์สมัยใหม่ ซึ่งแตกต่างจากวิชาวิทยาศาสตร์สาขาอื่นๆ อย่างมากก็คือ คณิตศาสตร์ถูกนำเสนอในลักษณะการศึกษาเกี่ยวกับสัจพจน์ ขณะที่วิทยาศาสตร์สาขาอื่น ๆ นั้น เกี่ยวข้องกับสัจพจน์ในลักษณะของการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ให้เกิดประโยชน์เท่านั้น

เราไม่ทราบแน่ชัดว่าใครเป็นคนแรกที่ได้นำเอา การให้เหตุผลเกี่ยวกับสัจพจน์ หรือการให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์ (deductive reasoning) มาใช้ในวิชาคณิตศาสตร์ หลายคนคิดว่าอาจจะเป็น เทลิส (Thales) แห่ง มิเลตุส เมื่อประมาณ 500 ปีก่อนคริสตศักราชแต่ก็ไม่มีหลักฐานยืนยัน หลักฐานชิ้นแรกที่บ่งบอกว่าวิธีการที่เกี่ยวกับสัจพจน์เป็นส่วนหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในตำราที่มีชื่อว่า "อีลีเมนต์" เขียนโดยชาวกรีก ชื่อ ยุคลิด เมื่อประมาณ 300 ปีก่อนคริสตศักราช ด้วยเหตุนี้เองเราจึงยกย่องยุคลิดว่าเป็นคนแรกที่เขียนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการของสัจพจน์หรือใช้วิธีการให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์

วิธีการที่จะจัดว่าเป็นการให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์ก็คือความจริงของประพจน์หนึ่งประพจน์ใดต้องพิสูจน์หรือแสดงได้จากความจริงของประพจน์อื่นซึ่งได้รับการพิสูจน์มาแล้วโดยวิธีการทางตรรกวิทยา หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือความจริงของประพจน์ใหม่จะต้องเกิดจากความจริงของประพจน์เก่านั่นเอง

การให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์ซึ่งมีวิธีการดังกล่าวข้างต้นจะแตกต่างจากการให้เหตุผลอีกวิธีหนึ่งซึ่งมีชื่อว่า "การให้เหตุผลโดยสรุปจากประสบการณ์" (inductive reasoning) ทั้งนี้การให้เหตุผลโดยสรุปจากประสบการณ์นั้นเกิดจากการสังเกตหรือนับการทดลองในจำนวนจำกัดครั้งแล้วสรุปเป็น "ความจริง" ตัวอย่างเช่น เราสังเกตเห็นว่าอีกาตัวแรกสีดำ และเมื่อสังเกตไปเรื่อย ๆ ตัวที่สอง ตัวที่สาม ... จนถึงตัวที่ 256 ก็ปรากฏว่าเป็นสีดำ เราจึงสรุป "ความจริง" ว่า อีกาทุกตัวสีดำ

การให้เหตุผลโดยสรุปจากประสบการณ์นี้มีข้อผิดพลาดอย่างมากเพราะเราไม่สามารถรับประกันได้ว่าเหตุการณ์ที่ได้เกิดขึ้นแล้วในลักษณะใดลักษณะหนึ่งจากการสังเกตหรือทดลองจะเกิดขึ้นในลักษณะเดียวกันอีกในอนาคต อีกประการหนึ่งอาจจะเป็นไปได้ว่ามีการผิดพลาดในการสังเกตของเราหรือเราอาจจะสรุปสิ่งที่เราสังเกตไม่ถูกต้อง ตัวอย่างที่แสดงถึงข้อผิดพลาดของวิธีการให้เหตุผลโดยสรุปจากประสบการณ์ก็คือ ทฤษฎีหลาย ๆ ทฤษฎีในวิชาฟิสิกส์ ซึ่งเคยปรากฏในอดีตถูกต้องตามความเป็นจริง ซึ่งพิสูจน์ในเวลาต่อมาว่าไม่ถูกต้อง

พูดโดยทั่วไปการให้เหตุผลโดยสรุปจากประสบการณ์มีบทบาทสำคัญมากในสาขาวิชาวิทยาศาสตร์กายภาพและชีวภาพ แต่จะมีบทบาทน้อยมากในวิชาคณิตศาสตร์ และในทางตรงข้ามการให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์มีบทบาทสำคัญมากในวิชาคณิตศาสตร์แต่มีบทบาทน้อยมากในสาขาวิชาวิทยาศาสตร์กายภาพและชีวภาพ

มีปัญหาอันหนึ่งเกิดขึ้นจากการให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์ในทางคณิตศาสตร์ คือ ถ้าความจริงของแต่ละประพจน์ต้องมีพื้นฐานพิสูจน์มาจากความจริงของประพจน์ก่อน ๆ ที่ได้พิสูจน์มาแล้ว **ประพจน์แรกสุด** ที่เป็นความจริงนั้นพิสูจน์ได้มาจากประพจน์ใดเมื่อเราพยายามจะพิสูจน์ประพจน์แรกนั้นเราไม่มีประพจน์ที่เป็นความจริงมาก่อนเลย เราจะทำอย่างไร ? คำตอบก็คือ ประพจน์ทุกประพจน์ที่มีค่าความเป็นจริงนั้น ไม่สามารถพิสูจน์ให้เป็นจริงทั้งหมดได้เลย ดังนั้น จะต้องสมมติว่า บางประพจน์เท่านั้นเป็นจริงมาก่อน ด้วยเหตุนี้การศึกษาเกี่ยวกับการให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์ จึงมีความจำเป็นต้องยอมรับประพจน์จำนวนหนึ่งว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ และเราจะเรียกประพจน์ที่ยอมรับเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์เหล่านี้ว่า "สัจพจน์"

เมื่อพูดถึงระบบการให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์ (หรือระบบเกี่ยวกับสัจพจน์) เราจะหมายถึงส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์ซึ่งได้จัดเป็นระเบียบตามแนวดังนี้ ประการที่หนึ่งเราต้องเลือกแนวความคิดพื้นฐานและตกลงกันว่าจะไม่ให้นิยามกับแนวความคิดดังกล่าวส่วนนี้ก็คือ **อนิยามของระบบ** ประการที่สอง เราต้องเลือกประพจน์จำนวนหนึ่งซึ่งเกี่ยวข้องอนิยามและเรายอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ส่วนนี้ก็คือ **สัจพจน์ของระบบ** จากนั้นอาศัยอนิยามและสัจพจน์ เราจะสามารถให้นิยามแนวความคิดใหม่และเกิดประพจน์ต่าง ๆ ที่เป็นจริงขึ้นมานั่นก็คือ เราได้นิยาม ทฤษฎีบท ทฤษฎีประกอบ หรือบทแทรกของระบบ ในตอนนี้เราก็จะสรุปได้ว่า ระบบการให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์ประกอบด้วยส่วนสำคัญ 4 ส่วนด้วยกันคือ

1) อนิยาม
2) สัจพจน์
3) นิยาม
4) ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทประกอบ บทแทรก

เราทราบมาแล้วว่าระบบทางวิชาตรรกวิทยานั้นต้องกำหนดเซตของสมาชิกต่าง ๆ ขึ้นมา ก่อนสมาชิกต่าง ๆ ที่กำหนดขึ้นมานั้นอาจจะมีทั้งที่ให้คำนิยามได้และที่ให้คำนิยามไม่ได้หรือเรียกว่า อนิยามศัพท์ ซึ่งสมาชิกเหล่านี้ก่อให้เกิดเป็นเซตของสัจพจน์ขึ้นผลที่ได้รับจากการให้เหตุผลทางตรรกวิทยาโดยอาศัยเซตของสัจพจน์และคำนิยามนี้จะก่อให้เกิดเป็นระบบทางตรรกวิทยา

เมื่อพิจารณาระบบทางเรขาคณิตดูบ้างจะเห็นว่าเราเริ่มต้นวิชาเรขาคณิตโดยการกำหนดจุดเส้น และระนาบ ขึ้นมาก่อน โดยสมาชิกเหล่านี้เป็นสมาชิกที่ให้นิยามไม่ได้จากนี้จึงเกิดมีสมาชิกพวกที่ให้นิยามได้ เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม ฯลฯ และเซตของสัจพจน์เกิดขึ้นและจากการให้เหตุผลทางตรรกวิทยาโดยอาศัยเซตของสัจพจน์และคำนิยามต่าง ๆ ที่

กำหนดหรือตั้งขึ้นมานั้นเราก็จะได้ผลออกมา ดังนั้นจึงเป็นที่เห็นแจ้งชัดว่าระบบทางเรขาคณิตนั้นเหมือนกับระบบทางวิชาตรรกวิทยาทุกประการ

แต่ก่อนนักคณิตศาสตร์จะละคำนิยามสิ่งต่าง ๆ แต่ต่อมานักคณิตศาสตร์ก็เห็นว่าการให้คำนิยามสิ่งต่าง ๆ นั้นบางครั้งก็วกวน จึงเริ่มเห็นความสำคัญของอนิยามเพราะจะต้องใช้อนิยามในการให้นิยามคำอื่น ๆ ด้วย นักคณิตศาสตร์พบว่าในเรขาคณิตมีบางสิ่งที่เราจำเป็นต้องยอมรับโดยไม่นิยาม เพราะต้องการจะเลี่ยงการให้นิยามแบบวกวน แบบงูกินหาง เช่น การนิยามจุดและเส้นนั้น เราพยายามนิยามจุดว่าเกิดจากการตัดกันของเส้นสองเส้นที่ต่างกัน และ นิยามเส้นว่าเป็นการเชื่อมระหว่างจุด 2 จุด หรือตัวอย่างอื่น ๆ เช่น เรานิยามว่าเด็กคือผู้ใหญ่ตัวเล็กและผู้ใหญ่คือเด็กที่โตเต็มที่แล้ว ซึ่งจะเห็นว่าเป็นการนิยามศัพท์ด้วยศัพท์ดังนั้นไม่ว่าจะเป็นเรขาคณิตระบบใดก็ตามจำเป็นจะต้องมีสองสิ่งต่อไปนี้

1. Undefined elements

2. Undefined relations คือความสัมพันธ์ที่เรายอมรับโดยไม่ต้องพิสูจน์ ที่เราเรียกว่าข้อสมมติหรือสัจพจน์ ความสัมพันธ์อื่น ๆ ซึ่งจะต้องพิสูจน์เรียกทฤษฎีส่วนคำนิยามนั้นสร้างขึ้นมาได้ด้วยสมาชิก และความสัมพันธ์ซึ่งอาจจะเขียนในรูปของอนิยามศัพท์ สัจพจน์ หรือสมาชิกที่เคยนิยามไว้ก่อนแล้ว และความสัมพันธ์ที่เคยพิสูจน์มาก่อนแล้วก็ได้ สัจพจน์และนิยามที่นำมารวมกันตามหลักตรรกวิทยาจะทำให้ได้ข้อความที่เป็นคุณสมบัติทางเรขาคณิต

ในการสร้างนิยามเราควรต้องรู้คุณสมบัติของนิยามเช่นเดียวกันกับการสร้างสัจพจน์ เราควรต้องรู้คุณสมบัติของสัจพจน์ที่จำเป็น ก่อนอื่นขอพูดถึงลักษณะของคำนิยามที่ดีก่อนคำนิยามที่ดีควรมีลักษณะดังนี้

1. กล่าวอย่างรัดกุม และชัดเจน
2. ควรชี้ให้เห็นคุณลักษณะที่แตกต่างกันของสมาชิกหรือความสัมพันธ์ที่เรากำลังนิยามกับสิ่งอื่น ๆ อย่างชัดเจน
3. ควรจะกล่าวกลับที่กันได้
4. ไม่ควรมีสมาชิกหรือความสัมพันธ์ใหม่ ๆ อีก

ข้อความที่กล่าวว่า "ควรจะกล่าวกลับที่กันได้" นั้นหมายความว่า
ข้อความที่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ ข้อความนั้นจะต้องอยู่ในรูป "ก็ต่อเมื่อ" หรือพูดว่าอยู่ในรูป $p \leftrightarrow q$ เช่น

"รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสก็ต่อเมื่อรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนั้น มีด้านเท่ากันสี่ด้าน"

จึงพอจะแยกได้ว่า

$p \rightarrow q$ ก็คือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเท่ากันสี่ด้าน

$q \rightarrow p$ ก็คือรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเท่ากันสี่ด้านคือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เราจึงให้นิยามว่า $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ นั่นคือ "รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเท่ากันสี่ด้านรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเท่ากันสี่ด้านคือ สี่เหลี่ยมจัตุรัส"

คำนิยามใดประกอบด้วยเทอมหรือคำที่ยังไม่เคยนิยามมาก่อนแล้วคำนิยามนั้นจะเป็นสิ่งที่ยอมรับไม่ได้ เช่นเดียวกันทฤษฎีใดที่การพิสูจน์ประกอบด้วยความสัมพันธ์หรือสัจพจน์ที่ไม่เคยยอมรับมาก่อนแล้วทฤษฎีนั้นก็ยอมรับไม่ได้

2.1 สัญลักษณ์ที่ใช้ในทางตรรกวิทยา

เรามีภาษาเป็นเครื่องสื่อความหมาย มีทั้งภาษาพูดและภาษาเขียน มีทั้งที่เป็นประโยคและไม่เป็นประโยค ที่เป็นประโยคก็ยังแบ่งแยกออกเป็น

1. ประโยคที่ไม่มีความเป็นจริง
2. ประโยคที่มีความเป็นจริงหรือเท็จอยู่ในตัวเรียกว่า เป็น "ประพจน์" ประโยคที่ไม่มีความเป็นจริงแบ่งเป็น
   - ประโยคคำถาม เช่น เธอกินข้าวหรือยัง? อากาศหนาวไหม? ใครร้องไห้?
   - ประโยคคำสั่ง ขอร้อง ห้าม หรือแสดงความต้องการ เช่น มานี่ กรุณาเปิดหน้าต่างด้วยค่ะ อย่าเดินลัดสนาม
   - ประโยคอุทาน เช่น โอ้โฮ บ้านสวยจัง โถ น่าสงสาร

ประโยคที่มีความเป็นจริงหรือเท็จอยู่ในตัว ได้แก่

- ประโยคบอกเล่า เช่น ถ้าเขาแปรงฟันแล้วเขาจึงจะดื่มกาแฟ $3 + 4 = 7$ ฯลฯ
- ประโยคปฏิเสธ เช่น สามเหลี่ยมหน้าจั่วไม่ใช่สามเหลี่ยมมุมฉาก, $10 - 6 \neq 5$ ฯลฯ ประโยคที่เป็นประพจน์เหล่านี้ถ้าเป็นจริงเรียกว่า มี Truth value เป็นจริงถ้าเป็นเท็จเรียกว่ามี Truth value เป็นเท็จ

บางทีประพจน์ก็ซับซ้อนยุ่งยากเกินไปยากที่จะเข้าใจ การขาดความรัดกุมของภาษาในบางครั้งก็มีจุดอ่อนอันหนึ่งของการใช้ภาษา ความยุ่งยากลำบากเหล่านี้อาจลดลงได้โดยใช้สัญลักษณ์เข้าช่วย โดยทั่ว ๆ

ไป สัญลักษณ์ทางตรรกวิทยาที่ใช้ช่วยการพิสูจน์ในเรขาคณิตมี

∧ และ

v หรือ มีความหมายสองประการคือ

1. "หรือมิฉะนั้นก็" หมายถึงอย่างใดอย่างหนึ่ง เพียงอย่างเดียว
2. "และ / หรือ" หมายถึงอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือทั้งสองอย่างในทาง คณิตศาสตร์ ใช้อันหลังนี้

~ ไม่

-> ถ้า ... แล้ว ...

<-> เท่ากับ

การพิสูจน์ในเรขาคณิตส่วนมากจะอยู่ในรูปของ p -> q เมื่อ p และ q เป็นข้อความสองข้อความ

ถ้า p -> q และ q -> p แล้ว ข้อความทั้งสองจะเท่ากัน

นั่นคือ p <-> q ซึ่งเห็นได้ว่าคำนิยามจะอยู่ในรูปของ p <-> q

ข้อความในเรขาคณิต แยกได้เป็น 4 ประการคือ

Statement : p -> q

Converse : q -> p

Inverse : ~p -> ~q

Contrapositive : ~q -> ~p

ตารางต่อไปนี้แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง statement, converse, inverse และ contrapositive

ตารางแสดง Truth value ของประพจน์ทั้ง 4 ลักษณะ

p	q	~p	~q	Statement p -> q	Converse q -> p	Inverse ~p -> ~q	Contrapositive ~q -> ~p
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

จากตารางจะเห็นว่า

Statement มี Truth value เหมือนกับ Contrapositive

(p -> q) (~q -> ~p)

Converse มี Truth value เหมือนกับ Inverse

(q -> p) (~p -> ~q)

ขอยกตัวอย่างการหาเหตุผลวิธีหนึ่งดังนี้

ข้อความทั่วไปในเรขาคณิตแบบยุคลิด : ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันมันจะไม่ตัดกัน

เราทราบว่า : เส้นตรง l กับเส้นตรง m ตัดกัน

เราสรุปว่า : เส้นตรง l กับเส้นตรง m ไม่ขนานกัน

ตัวอย่างนี้มีการหาแบบเหตุผลดังนี้

p -> q

ถ้า ~q

∴ ~p

จะเห็นว่าข้อความนี้สมเหตุสมผลเพราะว่า statement มี Truth value เหมือนกับ contrapositive ของมัน

ตัวอย่างต่อไปเป็นตัวอย่างของการหาเหตุผลที่ผิด

ข้อความทั่วไปในเรขาคณิตแบบยุคลิด : ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจะเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย

เราทราบว่า : สามเหลี่ยม ABC กับสามเหลี่ยม DEF เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

เราสรุปว่า : สามเหลี่ยม ABC กับสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างนี้มีการหาแบบเหตุผล ดังนี้

(p) -> (q)

ถ้า q

∴ p

จะเห็นว่าข้อสรุปนี้ไม่สมเหตุผล เพราะเรายอมให้ converse มี Truth value เท่ากับ statement

ถ้าเรามีข้อความ p,q เป็นข้อความสองข้อความ

ข้อความทั้งสองจะเป็น contradictory เมื่อ p และ q เป็นจริงทั้งคู่ไม่ได้

และเท็จทั้งคู่ก็ไม่ได้ เช่น

p : มะนาวเป็นสีเขียวหมด

q : มะนาวนี้ไม่เป็นสีเขียวทั้งหมด

หมายความว่าถ้า p เป็นจริงแล้ว q จะเป็นเท็จ และถ้า p เป็นเท็จ q ก็ต้องเป็นจริง นั่นคือ p กับ q จะแย้งกัน (Contradictory) กล่าวคือถ้า p และ q เป็นข้อความสองข้อความใด ๆ แล้ว p และ q จะเป็น contradictory กัน ถ้า $p \rightarrow (\sim q) \wedge (\sim p) \rightarrow q$

ข้อความ p และ q จะเป็น **contrary** ถ้าทั้งสองข้อความเป็นจริงทั้งคู่ไม่ได้แต่อาจเป็นเท็จทั้งคู่ได้ คือถ้า p จริง q ก็ไม่จริง หรือถ้า q จริง p ก็ไม่จริง หรือทั้ง p และ q เป็นเท็จทั้งคู่เช่น

p : นี้คือ สีแดง

q : นี้คือ สีเขียว

ทั้งสองประโยคนี้จะเป็นจริงทั้งคู่ไม่ได้ ถ้าคำว่า "แดง" มีความหมายเดียวกัน ถ้า p เป็นจริง q ก็เป็นเท็จ ถ้า q เป็นจริง p ก็เป็นเท็จ แต่ทั้ง p,q อาจเท็จทั้งคู่ได้ คือเป็นสีอื่นที่ไม่ใช่ทั้งแดง และเขียว

แดง และเขียว เป็น contrary กัน

ข้อสังเกต ข้อความ contradictory ทั้งหมดเป็นข้อความ contrary แต่ข้อความ contrary หลายข้อความที่ไม่เป็น contradictory

กฎทางตรรกวิทยาของ Aristotle (Three Laws of thoughts) เป็นกฎที่ใช้กันโดยทั่ว ๆ ไป ดังนี้คือ

1. $p \leftrightarrow q$ กฎแห่งเอกลักษณ์ (Law of identity) ถ้าข้อความใด ๆ เป็นจริงแล้วมันจะเป็นจริงอยู่เสมอ
2. $\sim[p \wedge (\sim p)]$ กฎแห่งการแย้งกันและกฎของการไม่แย้งกัน (Law of contradiction and law of noncontradiction) ไม่มีข้อความใด ๆ ที่จะจริงทั้งสองข้อความ หรือเท็จทั้งสอง อย่างน้อยข้อความหนึ่งเป็นจริง
3. $p \vee (\sim p)$ กฎของการกำจัดตัวกลาง (Law of excluded middle) ข้อความใด ๆ จะเป็นจริง เป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง

กิจกรรมการเรียนที่ 2.1

1. จงเขียน converse, inverse และ contrapositive ของข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1.1 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันจะเท่ากัน

   1.2 ถ้า x เป็นจำนวนบวกแล้ว x ไม่เท่ากับ 0

2. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ข้อความใดที่กล่าวสลับที่กันได้

   2.1 เส้นจะอยู่บนระนาบก็ต่อเมื่อมีอย่างน้อย 2 จุด ของเส้นนั้นอยู่บนระนาบ

   2.2 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูเป็นรูปสี่ด้าน

   2.3 ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้วสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเป็นสามเหลี่ยมคล้าย

   2.4 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งด้านทุกด้านมีความยาวเท่ากัน

3. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ข้อความคู่ใดบ้างที่เป็น contrary และมีข้อความคู่ใดบ้างเป็น contradictory

   3.1 นั่คือเก้าอี้ตัวหนึ่ง
   นั่คือมะม่วงผลหนึ่ง

   3.2 นั่คือเก้าอี้ตัวหนึ่ง
   นั่ไม่ใช่เก้าอี้ตัวหนึ่ง

   3.3 $x < 5$
   $x = 5$

   3.4 $y^2 = 49$ $\quad y \neq 7$

   3.5 $x < 4$ $\quad x = 2$

4. กำหนดให้ p : สามเหลี่ยมรูปนี้เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
   q : สามเหลี่ยมรูปนี้เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

   จงแปลสัญลักษณ์ต่อไปนี้เป็นภาษาพูดธรรมดา

   1) $p \to q$, $\underline{p}$, q

   2) $p \to q$, $\underline{q}$, p

   3) $p \to q$, $\underline{\sim q}$, $\sim p$

   4) $p \to q$, $\underline{\sim p}$, $\sim q$

2.2 หลักการหาเหตุผล

ในวิชาเรขาคณิตมีหลักการหาเหตุผลที่สำคัญ 2 ประการ คือการให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) และการให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive resoning)

- การหาเหตุผลแบบอุปนัย นั้นเป็นการหาเหตุผลโดยอาศัยข้อเท็จจริงบางประการ เช่น ในการทดลองเรื่องน้ำพบว่าน้ำประกอบด้วยไฮโดรเจน 2 ส่วนและออกซิเจน 1 ส่วนโดยปริมาตร และผลของการทดลองหลาย ๆ ครั้งทำให้เราสรุปว่าน้ำประกอบด้วยไฮโดรเจน 2 ส่วนและออกซิเจน 1 ส่วน โดยปริมาตร

ในเรขาคณิตนั้นเราเคยเห็นแล้วว่าถ้าเราไม่มีอนิยามศัพท์มาก่อนเราก็ไม่สามารถให้คำนิยามได้ในเรขาคณิตบนระนาบนั้นเราถือว่าจุดและเส้นเป็นอนิยามศัพท์ ในทำนองเดียวกันมีบางประพจน์เราต้องยอมรับโดยไม่ต้องมีการพิสูจน์แต่โดยอาศัยการพิสูจน์และการสังเกต ประพจน์ที่เรายอมรับโดยไม่ต้องพิสูจน์นี้เรียกว่าสัจพจน์

ดังนั้นสัจพจน์จึงเกิดขึ้นโดยการหาเหตุผลโดยอาศัยข้อเท็จจริงบางประการ ตัวอย่างของสัจพจน์ เช่น ถ้ามีจุด 2 จุด แล้วจะเกิดเส้นตรง 1 เส้น

- การให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นกระบวนการทางตรรกวิทยาที่ใช้ในการหา proposition หรือทฤษฎีจากเซตของอนิยามศัพท์ และสัจพจน์

เมื่อเรามีเซตของอนิยามศัพท์ สัจพจน์ นิยามศัพท์ และ/หรือทฤษฎีที่พิสูจน์แล้ว เราก็สามารถพิสูจน์ทฤษฎีใหม่ได้โดยทางตรงและทางอ้อม ถ้าเป็นทางตรงจะอยู่ในรูปของซึ่งมีลำดับขั้นตอนต่าง ๆ อย่างมีที่สิ้นสุด นั่นคือจะมีรูปเป็น $p \rightarrow p_1$, $p_1 \rightarrow p_2, \ldots, p_{n-1} \rightarrow p_n, p_n \rightarrow q$ แต่ละลำดับขั้นนั้นจะต้องสมเหตุสมผลทางตรรกวิทยา การพิสูจน์ทางอ้อมนั้นเป็นการพิสูจน์โดยอาศัยความจริง "ถ้า $\sim p$ เป็นเท็จแล้ว p จะเป็นจริง" เมื่อจะพิสูจน์ว่า p เป็นจริงก็ต้องพยายามแสดงว่า $\sim p$ เป็นเท็จ วิธีที่ง่ายก็คือพยายามแสดงว่า $\sim p$ ขัดกับประพจน์ที่กำหนดให้หรือพยายามรวม $\sim p$ เข้ากับประพจน์ที่กำหนดให้ และพิสูจน์ว่าเป็น contradictory เมื่อมัน Contradict กันก็แสดงว่า $\sim p$ ขัดกับประพจน์ที่กำหนดให้จึงเป็นเท็จ ดังนั้น p จึงเป็นจริง

สัจพจน์

ในการสร้างระบบใดระบบหนึ่งทางคณิตศาสตร์ เราจะต้องทำการเลือกประพจน์จำนวนหนึ่งเป็นสัจพจน์อย่างรอบคอบ โดยมีหลักเกณฑ์คร่าว ๆ คือ เราต้องการสัจพจน์ที่สั้นแต่จุใจความและมีความรัดกุมเท่าที่จะเป็นไปได้นอกจากนี้แต่ละข้อของสัจพจน์ต้องแสดงออก

ถึงความคิดพื้นฐานให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้หรือพูดอีกอย่างหนึ่งก็คือ เราต้องไม่ตั้งสัจพจน์ให้มากเกินความจำเป็นประการสำคัญที่สุดก็คือเราต้องการสัจพจน์จำนวนหนึ่ง ซึ่งมี "ความไม่ขัดแย้งกัน" (consistency) ซึ่งหมายความว่า สัจพจน์เหล่านี้จะต้องไม่ก่อให้เกิดการขัดแย้งกันเองในเชิงตรรกวิทยา ตัวอย่างเช่น สมมติว่าเรามีประพจน์ "ผลบวกของมุมภายในของสามเหลี่ยมเท่ากับ 180" และประพจน์ "ผลบวกของมุมภายในของสามเหลี่ยมน้อยกว่า 180" โดยที่ทั้งคู่เป็นจริงซึ่งได้จากสัจพจน์ชุดเดียวกัน เราจะเห็นว่าประพจน์ทั้งสองเกิดการขัดแย้งกันเองในเชิงตรรกวิทยา สัจพจน์ที่ทำให้เกิดการขัดแย้งจะไม่ถูกเลือกไว้ในระบบ เรขาคณิตแบบยุคลิดมีความไม่ขัดแย้งกันในแง่ที่ว่าสัจพจน์ทั้ง 5 ข้อนั้นไม่ก่อให้เกิดการขัดแย้งในเชิงตรรกวิทยาขึ้นเลย

เราลองพิจารณาตัวอย่างข้างล่างนี้

สมมติว่า เราจะใช้วิธีการให้เหตุผลโดยสรุปจากหลักเกณฑ์กับระบบเลขคณิตภายใต้สัจพจน์ 4 ข้อนี้

1) $2 + 3 = 1$

2) $1 + 2 = 2$

3) $(2 + 3) + (1 + 2) = 8$

4) จำนวนที่เท่ากันบวกด้วยจำนวนที่เท่ากันย่อมเท่ากัน

เราพบว่าระบบดังกล่าวมีความขัดแย้งกัน และถ้าถามว่า ทำไมถึงขัดแย้งกัน บางคนอาจจะตอบว่า เพราะสัจพจน์ข้อ 1) และข้อ 2) ไม่สอดคล้องกับความเข้าใจตามปกติของระบบเลขคณิต คำตอบเช่นนี้ไม่ถูกต้อง เพราะทั้งประพจน์ข้อ 1) และข้อ 2) ต่างเป็นสัจพจน์ซึ่งถูกสมมติว่า เป็นจริงแล้ว ดังนั้นคำตอบที่ถูกต้องว่า ระบบที่กำหนดขึ้นมีความขัดแย้งกันก็คือ จากสัจพจน์ข้อ 4), ข้อ 1) และข้อ 2) เราได้ประพจน์ที่เป็นจริงว่า

$(2 + 3) + (1 + 2) = 1 + 2 = 2$ ซึ่งผลลัพธ์นี้จะขัดแย้งกับสัจพจน์ข้อ 3)

สัจพจน์ของวิชาใด ๆ ก็ตามจะเป็นที่ยอมรับถ้าเป็นไปตามกฎเกณฑ์เฉพาะบางอย่าง คือสัจพจน์ที่ดีนั้นควรจะเข้าใจง่าย มีจำนวนน้อย เกี่ยวข้องหรือใช้อนิยามศัพท์ไม่กี่คำ ควรจะบริบูรณ์ (complete) และถ้ามีสัจพจน์หลาย ๆ ข้อแล้ว จะไม่มีสัจพจน์สองข้อใด ๆ แย้งกัน นอกเหนือไปจากนั้นจะไม่มีทฤษฎีสองทฤษฎีที่เกิดจากสัจพจน์เหล่านี้ขัดแย้งกัน จะต้องใช้ได้ตลอด (consistent) เป็นอิสระต่อกัน (independent) ทำเป็นหมวดหมู่เดียวกัน (categorical) ซึ่งจะอธิบายเป็นข้อ ๆ ดังนี้

ก. การใช้ได้ตลอด (consistency)

เซตของสัจพจน์จะเรียกว่าใช้ได้ตลอดถ้าไม่มีประพจน์สองประพจน์ใด ๆ ขัด

แย้งกัน ซึ่งอาจพิสูจน์ได้โดยการสร้างรูปหรือสิ่งที่เป็นรูปธรรม หรือที่เรียกว่าโมเดล (Model) ขึ้นมาแทนสัจพจน์ข้อนั้น ๆ แล้วดูว่ามันแย้งกันหรือไม่ ประพจน์ทั้งหลายจำเป็นอย่างยิ่งจะคล้อยตามกัน จะไม่มีประพจน์ใด ๆ อยู่ในรูป "p" และ "not-p" ถ้าเราสามารถสร้างโมเดลโดยทำให้สัจพจน์ทุกประการเป็นจริงได้นั่นก็เท่ากับ เราสามารถแสดงว่าเซตของสัจพจน์ชุดนี้ใช้ได้ตลอด

สัจพจน์ที่เป็นจริง (true) กับสัจพจน์ที่สมเหตุสมผล (valid) นั้นต่างกัน สัจพจน์ที่เป็นจริงนั้น หมายความว่ามันเป็นจริงในโลกแห่งความเป็นจริง แต่สัจพจน์ที่สมเหตุสมผลนั้นเป็นผลต่อเนื่องตามหลักตรรกวิทยา (logical consequence) จากสัจพจน์อื่น ๆ ดังนั้น สัจพจน์ที่เป็นผลต่อเนื่องตามหลักตรรกวิทยาจึงสมเหตุสมผลแต่ไม่จำเป็นจะต้องเป็นจริง

ตัวอย่างเช่น ถ้าเรามีประพจน์ 2 ประการ คือ

1. ผลไม้ทุกชนิดมีสีแดง
2. ส้มเป็นผลไม้

เราสรุปได้ว่า ส้มมีสีแดง

จะเห็นว่าข้อสรุปโดยการให้เหตุผลแบบการแจงเหตุสู่ผล (implication) นี้สมเหตุสมผลเพราะอยู่ในข่ายที่เรากำลังพิจารณาแต่ไม่จริง ด้วยเหตุนี้เซตของสัจพจน์ที่ใช้ได้ตลอดจึงไม่จำเป็นต้องเป็นจริง

ข. ความเป็นอิสระ

สัจพจน์ข้อใดจะเป็นอิสระก็ต่อเมื่อสัจพจน์ข้อนั้นไม่ได้เป็นผลของสัจพจน์ข้ออื่น ๆ เราอาจจะแสดงว่าสัจพจน์ที่กำหนดให้เป็นอิสระกับข้ออื่น ๆ ในเซตนั้น โดยหาตัวแทนของข้ออื่น ๆ ที่เป็นรูปธรรมแล้วแสดงว่าสมเหตุสมผลเสียก่อนแล้วดูว่าสัจพจน์ที่กำหนดไม่ได้ทำให้เกิดผลเป็นสัจพจน์ข้อนั้น สัจพจน์ควรจะมีคุณสมบัติอิสระแต่ไม่จำเป็นเพราะสัจพจน์ที่ขึ้นอยู่กับข้ออื่น ๆ หรือส่วนหนึ่งของสัจพจน์ชุดนั้น อาจต้องพิสูจน์ให้เป็นจริงแบบทฤษฎีก็ได้

อาจอธิบายให้เข้าใจด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

ถ้าให้ Σ เป็นสัจพจน์ชุดหนึ่ง

A เป็นสัจพจน์ข้อหนึ่งใน Σ

$\Sigma - A$ เป็นสัจพจน์ชุดนี้ แต่ไม่มี A

$\sim A$ เป็นนิเสธของ A

แล้ว A จะเป็นอิสระใน Σ ถ้าทั้ง Σ และ $(\Sigma - A) + \sim A$ ใช้ได้

พิจารณาสัจพจน์ชุดหนึ่ง มีจุดและเส้นเป็นอนิยาม ความสัมพันธ์ที่ไม่นิยามคือของจุด

กับเส้น (เช่น จุดอยู่บนเส้นและเส้นอยู่บนจุด, จุดสองจุดที่ต่างกัน เส้นสองเส้นซึ่งต่างกันเป็นต้น)

P.1.1 มีจุดที่ต่างกัน 3 จุด

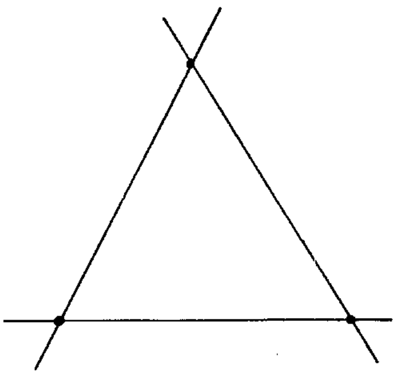
P.1.2 จุดที่ต่างกัน 2 จุด กำหนดเส้นขึ้นเพียงเส้นเดียว

P.1.3 จุดทั้งหลายจะต้องไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน

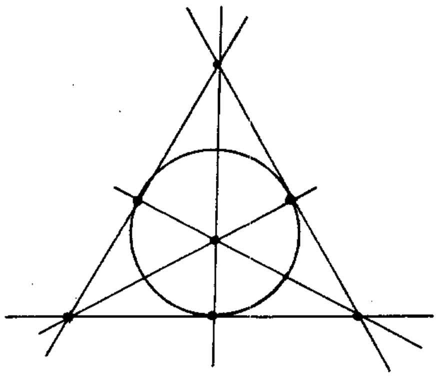
P.1.4 เส้นที่ต่างกัน 2 เส้นจะทำให้เกิดจุดอย่างน้อยที่สุด 1 จุด

P.1.5 เส้นที่ต่างกัน 2 เส้นจะทำให้เกิดจุดอย่างมากที่สุด 1 จุด

ถ้าพิจารณาให้ดีแล้วจะเห็นว่า P.1.5 เป็นผลต่อเนื่องของ P.1.2 สำหรับ P.1.1 - P.1.4 นั้นใช้ได้ตลอด ด้วยเหตุที่มันสมเหตุสมผลในเรขาคณิตของด้าน 3 ด้าน (เส้น) และมุม 3 มุม (จุด) ซึ่งเกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมบนระนาบ ดังรูปที่ 1 ซึ่งเราสร้างขึ้นเพื่อให้เป็นรูปที่แทนสัจพจน์ชุดนี้



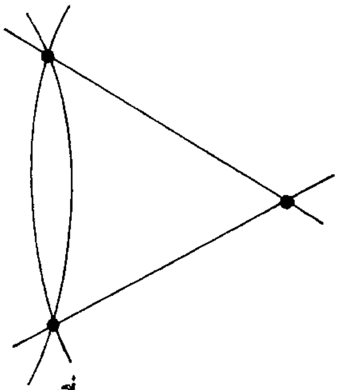
รูปที่ 1

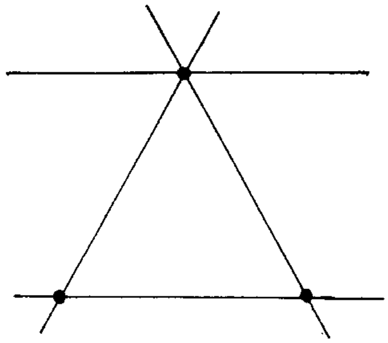


รูปที่ 2

รูป 2.1

เราสามารถพิสูจน์ว่า P.1.1 เป็นอิสระโดยใช้รูปที่ 2 โดยถือว่าวงกลมก็คือเส้น และจุดก็คือจุดที่กำหนดให้เท่านั้นคือมี 7 จุด และ 7 เส้น แต่ละเส้นมีจุด 3 จุด แต่ละจุดมีเส้นผ่าน 3 เส้น ในรูปที่ 3 จะเห็นว่า P.1.1, P.1.3 และ P.1.4 สมเหตุสมผลแต่ P.1.2 ไม่เป็นจริง จึงแสดงว่า P.1.2 เป็นอิสระ


รูปที่ 3


รูปที่ 4

รูป 2.2

เราสามารถแสดงว่า P.1.3 เป็นอิสระโดยใช้รูปซึ่งประกอบด้วยเส้น 1 เส้น แล้วมีจุด 3 จุดอยู่บนเส้นนั้นโดยใช้รูปที่ 2

เราสามารถพิสูจน์ว่า P.1.4 เป็นอิสระจาก P.1.1, P.1.2, P.1.3 โดยใช้รูปที่ 4 โดยมีเส้น 2 เส้นที่ต่างกันแต่ไม่มีจุดร่วมกันเลย

จากที่กล่าวมานี้จะเห็นว่าถ้าเรามีสัจพจน์ชุดหนึ่งซึ่งมี 4 ประการเราใช้โมเดลเพียงแบบเดียวเพื่อแสดงว่าสัจพจน์ชุดนี้ใช้ได้ตลอด แต่เราจะต้องใช้โมเดล ถึง 4 แบบ เพื่อแสดงว่าแต่ละประการเป็นอิสระ

ค. **ความเป็นหมวดหมู่เดียวกัน** (Catigorical)

สัจพจน์ชุดหนึ่งจะเรียกว่าเป็นหมวดหมู่เดียวกัน ถ้ามีโมเดลเดียวเท่านั้นที่ทำให้สัจพจน์ชุดนั้นสมเหตุสมผลแต่ถ้าหากมีมากกว่าหนึ่งโมเดล ที่ทำให้สัจพจน์ชุดนั้นเป็นจริงแล้ว โมเดลทั้งหลายจะต้องมีความสมนัยกับแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างความสัมพันธ์ เช่น =, <, ... และระหว่างการกระทำ

เช่น + , - , ... ในโมเดลทั้งสองนั้นตัวอย่างเช่น ถ้าโมเดล I มี a, b, c, +, = โมเดล II มี A,B,C บวก, เท่ากับ และถ้า "a + b = c" แล้วทำให้ "A บวก B เท่ากับ C" เรียกการสมนัยนี้ว่าโมเดลทั้งสองถอดแบบกัน

P.1.1 ถึง P.1.4 ที่กล่าวมาแล้วในเรื่องสมเหตุผลสมในรูปที่ 1 ก็ยังคงสมเหตุสมผลอีก ถ้าให้จุดแทนด้วยอักษร

และเส้นแทนด้วยสดมภ์ในโมเดลมีอักษร 3 ตัว อักษรที่ไม่ซ้ำกัน 2 ตัว จะทำให้เกิด 1 สดมภ์

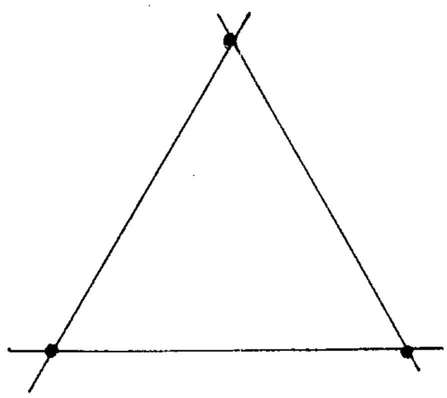
1 สดมภ์	A	B	C
	B	C	A

ในโมเดลมีอักษร 3 ตัว อักษรที่ไม่ซ้ำกัน 2 ตัว จะทำให้เกิด 1 สดมภ์ อักษรทุกตัวจะไม่อยู่บนสดมภ์เดียวกัน สดมภ์ 2 สดมภ์ใด ๆ จะมีอักษรร่วมกันอย่างน้อย 1 ตัว ดังนั้น P.1.1 ถึง P.1.4 จึงเป็นจริงในโมเดลนี้และโมเดลนี้ทำให้ P.1.1 ถึง P.1.4 สมเหตุสมผลโมเดลนี้กับรูปที่ 1 เป็นความสมนัยกันแบบ 1-1 จึงเป็นไอโซมอร์ฟิคกัน

นั่นแสดงว่าสัจพจน์ P.1.1 ถึง P.1.4 มีความเป็นหมวดหมู่เดียวกัน

ถ้าสัจพจน์จุดใดเป็นหมวดหมู่เดียวกัน แล้วสัจพจน์ชุดนั้นจะมี**ความครบถ้วน** นั่นก็หมายความว่าเราไม่สามารถจะเพิ่มสัจพจน์ที่เป็นอิสระเข้าไปในเซตได้อีก ถ้าเราเพิ่มสัจพจน์ที่เป็นอิสระเข้าไปในเซตเก่าได้อีกสัจพจน์ชุดนั้นก็**ไม่ครบถ้วน**

A	B	C
B	C	A



รูป 5

รูป 2.3

ง. **ความครบถ้วน** (complete)

สัจพจน์ชุดหนึ่งจะเรียกว่ามีความครบถ้วน เมื่อไม่สามารถเพิ่มขึ้นความใดข้อความหนึ่งหรือสัจพจน์หนึ่ง เข้าไปได้ เพราะเกินความจำเป็นหรือถ้ามีสองข้อความใด ๆ อย่างน้อยข้อความหนึ่งนำไปใช้ได้ อีกข้อความหนึ่งก็เกินความจำเป็นการเพิ่มศัพท์บางศัพท์ก็ควรต้องคำนึงถึงคุณสมบัติข้อนี้ด้วย

กิจกรรมการเรียนที่ 2.2

1. กำหนดเซตของสัจพจน์ให้ดังนี้
   P1. มีอย่างน้อย 1 จุดบนระนาบ
   P2. บนแต่ละเส้นมีจุด 2 จุดเท่านั้น
   P3. แต่ละจุดมีเส้นผ่าน 2 เส้นเท่านั้น
   P4. แต่ละเส้นมีเส้นขนานอีก 3 เส้นขนานกับเส้นนี้
   P5. สำหรับเส้นสองเส้นใด ๆ ที่ตัดกันไม่มีเส้นอื่นที่ขนานกับเส้นหนึ่งและตัดกับอีกเส้นหนึ่ง
   จงแสดงว่าเซตของสัจพจน์นี้ใช้ได้ตลอด

   กำหนดเซตของสัจพจน์ให้ดังนี้
   P1. มีเส้นที่ต่างกัน 3 เส้น
   P2. เส้นสองเส้นที่ต่างกันอยู่บนอย่างน้อย 1 จุด
   P3. เส้นสองเส้นที่ต่างกันอยู่บนอย่างมาก 2 จุด
   P4. เส้นทั้งหมดไม่อยู่บนจุดเดียวกัน
   P5. จุดสองจุดใด ๆ อยู่บนอย่างน้อย 1 เส้น
   จงพิจารณาว่าแบบฝึกหัดข้อ 2 - 8 ข้อความใดเป็นอิสระจาก

   P1. - P5.

2. มีสองจุดเท่านั้นบนแต่ละเส้น
3. มีจุด 4 จุดเท่านั้น
4. มีจุด 3 จุดบนแต่ละเส้น
5. ทุกจุดอยู่บนเส้นเดียวกัน
6. มีจุดที่ต่างกันอย่างมาก 5 จุด
7. P2
8. P3
9. P4
10. P5

11, ถ้าอักษรแต่ละตัวแทนจุด อักษรแต่ละหลักแทนเส้นและกำหนดโมเดลให้ดังนี้

C	B	A	A
D	D	C	B
F	E	E	F

จงเขียนโมเดลที่เป็นหมวดหมู่เดียวกันกับโมเดลนี้โดยใช้จุดกับเส้น

2.3 เรขาคณิตเชิงสัจพจน์ (Axiomatic Geometry)

จากที่เคยทราบมาแล้วว่า เรขาคณิตจะได้มาจากสัจพจน์ชุดหนึ่งด้วยระบบนิรนัย ถ้าเราพิจารณาว่าสัจพจน์ชุดนั้นสมเหตุสมผลตามข่ายที่เรากำลังพิจารณาอยู่เราก็สามารถสร้างทฤษฎีขึ้นมาตามกติกาที่วางไว้นั้นได้และสามารถนำไปใช้กับข้อความหรือปัญหาอื่น ๆ ที่เกิดขึ้นในข่ายเดียวกันด้วยสัจพจน์ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีการนี้เรียกเรขาคณิตเชิงสัจพจน์ต้องจำไว้เสมอว่าศัพท์ที่ใช้ต้องมีคุณสมบัติของศัพท์ตามที่เขียนไว้ในนิยามและสัจพจน์เท่านั้น ถ้าต้องการศัพท์ที่มีคุณสมบัติอื่นอีกก็จะต้องนิยามเพิ่มเติมภายในขอบเขตที่สร้างขึ้นไว้ หรือที่จะสร้างเพิ่มเติมแต่มีคุณสมบัติของสัจพจน์ตามที่กล่าวไว้แต่ต้นทุกประการจะเริ่มอธิบายเรขาคณิตชนิดนี้ด้วยระบบทางตรรกวิทยาอย่างง่ายก่อน เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาโครงสร้างของเรขาคณิตแบบยุคลิดซึ่งซับซ้อน ยุ่งยาก มีจำนวนจุด และเส้นนับไม่ถ้วนมีทฤษฎีบทมากมาย

เรขาคณิตที่จะศึกษาก่อนเพราะมีโครงสร้างที่ง่ายไม่ซับซ้อนคือเรขาคณิตชนิดที่มีจำนวนสมาชิกน้อย นับได้สิ้นสุดมีสัจพจน์น้อยข้อและมีทฤษฎีไม่มากบทเราเรียกว่า **เรขาคณิตจำกัด** (finite geometry) เรขาคณิตนี้ครั้งแรกคนที่เริ่มคิดคือ C.Fano (1892) แต่ก็ยังไม่เป็นที่แพร่หลายนักเพิ่งจะเริ่มแพร่หลายในปี ค.ศ. 1906 เมื่อ O.Veblen และ W.H.Bussey ได้ศึกษาเรื่องนี้อย่างจริงจัง ตั้งแต่นั้นมาก็เกิดเรขาคณิตจำกัดขึ้นมามากมายหลายชนิด จุดและเส้นในเรขาคณิตชนิดนี้ก็เหมือนกับที่ใช้ในเรขาคณิตยุคลิด เพียงแต่นำมาพิจารณาอีกแง่หนึ่งเท่านั้น

เรขาคณิตจำกัดที่จะกล่าวต่อไปนี้ มีจุดและเส้นเป็นอนิยามส่วนความหมายของเส้นไม่เหมือนกัน เพราะว่าเส้นในเรขาคณิตจำกัดไม่มีจุดนับไม่ถ้วนเหมือนเรขาคณิตยุคลิด

จะกล่าวถึงเรขาคณิตจำกัดง่าย ๆ ดังนี้

เรขาคณิต 3 จุด (Three Points Geometry)

ประกอบด้วยสัจพจน์ชุดหนึ่งซึ่งมี 4 ข้อ ดังนี้

1. มีจุด 3 จุดเท่านั้น
2. จุด 2 จุดจะอยู่บนเส้นเพียงหนึ่งเส้นเท่านั้น
3. จุดทั้งหมดไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน
4. เส้นสองเส้นจะผ่านจุดอย่างน้อยที่สุด 1 จุด

เมื่อเรามีสัจพจน์ 4 ข้อนี้ จะเกิดปัญหาขึ้นมาทันทีว่า

ก. รูปของเรขาคณิตชนิดนี้จะเขียนแทนด้วยรูปอะไร

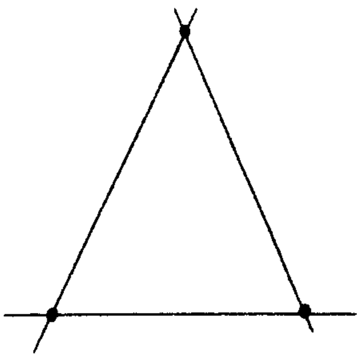
ข. จะมีเส้นกี่เส้นในเรขาคณิตชนิดนี้

ค. จะมีทฤษฎีใดที่พิสูจน์เรขาคณิตชนิดนี้ได้บ้าง

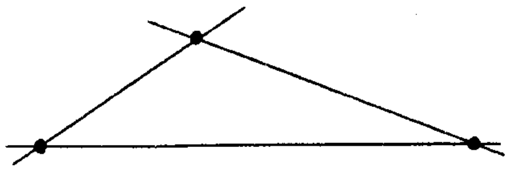
ง. เราจะใช้สมาชิกอื่นใดแทนได้บ้าง นอกจากเส้นและจุด

จ. คุณสมบัติของเรขาคณิตยุคลิดข้อใดที่ยังใช้ได้ในเรขาคณิตชนิดนี้ และข้อใดที่ใช้ไม่ได้

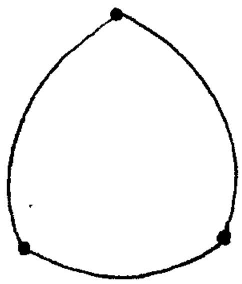
ปัญหาทั้งหมดนี้ไม่สามารถตอบได้จากเรขาคณิตจำกัดชนิดนี้ แต่ปัญหาเหล่านี้เราอาจจะแสดงให้เห็นได้ด้วยรูป ซึ่งจะตอบปัญหา ข้อ ก. ได้ เราสามารถวาดได้หลายแบบดังนี้



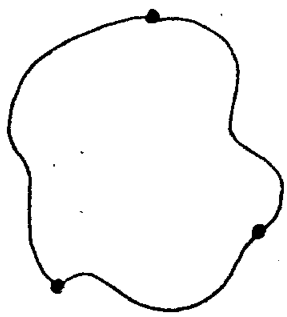
รูป 1



รูป 2



รูป 3



รูป 4

รูป 2.4

ลองเปรียบเทียบคำพูดในสัจพจน์ข้อ 2 และ 4 จะทำให้เรารู้ว่า เราต้องการเส้น 2 เส้น จะผ่านจุดมากกว่า 1 จุด ได้หรือไม่

ทฤษฎีบทที่ 1 เส้น 2 เส้นจะผ่านจุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ โดยสัจพจน์ข้อ 4 เส้นสองเส้นจะผ่านจุดอย่างน้อยที่สุด 1 จุด สมมติว่ามีเส้นสองเส้น l,m ผ่านจุดมากกว่า 1 จุด สมมติเป็นจุด P และ Q โดยสัจพจน์ข้อ 2 จะแย้งทันทีว่า จุด 2 จุด มีเส้นผ่าน 2 เส้น

ดังนั้นเส้น 2 เส้นจะผ่านจุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น นอกจากนี้เราสามารถหาจำนวนเส้นในเรขาคณิต 3 เส้น นี้จากทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 เรขาคณิต 3 จุด มีเส้น 3 เส้นเท่านั้น

พิสูจน์ จากสัจพจน์ข้อ 2 จุดแต่ละคู่จะมีเส้นผ่าน 1 เส้น นั่นคือจะมีเส้นอย่างน้อย 3 เส้น

สมมติว่ามีเส้นที่ 4 จากสัจพจน์ข้อ 1 ซึ่งจะมีจุดอยู่ 3 จุดเท่านั้น เส้นที่ 4 จะต้องผ่านจุด 2 จุดใน 3 นั้น มันก็จะแย้งสัจพจน์ข้อ 2 และทฤษฎีบท 2.1 ทันที ดังนั้นจะมีเส้นมากกว่า 3 เส้นไม่ได้

จากรูปที่ปรากฏเรื่องความยาวของส่วนของเส้นตรง, การวัดขนาดของมุม และพื้นที่ก็ไม่มีในเรขาคณิตชนิดนี้ จากสัจพจน์ทั้ง 4 ข้อก็ทำให้เห็นว่าไม่มีเส้นขนาน เรื่องการคล้ายกันก็ไม่มีความหมายในเรขาคณิตชนิดนี้

ต่อไปจะกล่าวถึงเรขาคณิต 7 จุด และ 7 เส้น

กำหนดสมาชิกคือ "นักเรียน" กับ "คณะกรรมการ" และความสัมพันธ์ "เป็นกรรมการ" กับสัจพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

P.1 มีคณะกรรมการอย่างน้อยที่สุดหนึ่งคณะ

P.2 คณะกรรมการทุก ๆ คณะมีกรรมการอย่างน้อย 3 คน

P.3 ไม่มีคณะกรรมการคณะใดที่มีกรรมการเกินกว่า 3 คน

P.4 ถ้า A และ B เป็นนักเรียนจะมีคณะกรรมการอย่างน้อยที่สุดหนึ่งคณะซึ่งคนทั้งสองเป็นกรรมการร่วมกัน

P.5 ถ้า A และ B เป็นนักเรียนจะมีคณะกรรมการอย่างมากที่สุดหนึ่งคณะที่คนทั้งสองเป็นกรรมการร่วมกัน

P.6 นักเรียนทุกคนไม่เป็นกรรมการในคณะกรรมการชุดเดียวกัน

P.7 คณะกรรมการสองคณะใด ๆ จะมีกรรมการร่วมกันอย่างน้อยหนึ่ง

จากสัจพจน์ที่กำหนดให้จะสามารถพิจารณาหาจำนวนนักเรียนทั้งหมดและจำนวนนักเรียนที่มีในคณะกรรมการแต่ละชุดได้

จาก P.1 จะมีคณะกรรมการอย่างน้อยหนึ่งคณะ

จาก P.2 และ P.3 ทำให้ทราบว่าคณะกรรมการหนึ่งมีสมาชิกเพียง 3 คนได้แก่ A B และ C ดังนั้นเราอาจพิจารณาว่านักเรียนสามคนที่อยู่ในคณะกรรมการชุดเดียวกันประกอบด้วย

A

B

C

จาก P.6 จะมี D ซึ่งไม่อยู่ในคณะกรรมการชุดนี้

โดย P.4 และ P.5 D ต้องเป็นกรรมการในคณะกรรมการชุดหนึ่งซึ่งเป็นชุดเดียวกันกับ A B และ C

คณะกรรมการชุดนี้มี A และ D เป็นกรรมการร่วมกันจะต้องมีสมาชิกคนที่ 3 (จาก P.2)

จาก P.5 สมาชิกคนที่ 3 นี้ต้องไม่ใช่ทั้ง B หรือ C

ก็เห็นสมาชิกคนที่สามต้องเป็นนักเรียนคนที่ 5 คือ E และสมาชิกคนที่สามของคณะกรรมการชุดที่มี B และ D ก็ต้องเป็นนักเรียนคนที่ 6 คือ F

ตอนนี้เรามีนักเรียน 6 คน และคณะกรรมการ 3 คณะแล้ว คือ ABC, ADE และ BDF (P.4 - P.5) นักเรียนสองคนใด ๆ จะต้องเป็นกรรมการร่วมกัน นักเรียน A เป็นกรรมการร่วมกับ B,C,D,E แล้ว

ดังนั้นโดย P.5 A กับ F ไม่สามารถเป็นกรรมการร่วมกับ B,C,D หรือ E ได้ดังนี้จะต้องมีนักเรียนคนที่ 7 คือ G ซึ่งเป็นกรรมการร่วมกับ A กับ F ใน AFG

ด้วยการหาเหตุผลในลักษณะนี้ทำให้ทราบว่ามีนักเรียน 7 คนและมีคณะกรรมการ 7 คณะ ถ้าให้อักษรแต่ละตัวแทนชื่อนักเรียนอักษรในแต่ละหลัก (column) แทนคณะกรรมการแต่ละคณะเราจะได้ดังนี้

A	A	B	A	C	B	C
B	D	D	F	E	E	D
C	E	F	G	F	G	G

รูป 2.6

ถ้าแทน "นักเรียน" ด้วยจุด

แทน "คณะกรรมการ" ด้วยเส้น

แทน "เป็นสมาชิกของ" ด้วย การลากเส้นเชื่อมจุดสองจุดเข้าด้วยกัน

P.1 - P.7 อาจเขียนใหม่เป็น P1.1 - P1.7 ตามลำดับ

P1.1 มีอย่างน้อยหนึ่งเส้น

P1.2 แต่ละเส้นมีจุดที่ต่างกันอย่างน้อย 3 จุด

P1.3 ไม่มีเส้นใดที่ผ่านจุดมากกว่า 3 จุด

P1.4 จุดสองจุดใด ๆ อยู่บนเส้นอย่างน้อยหนึ่งเส้น

P1.5 จุดสองจุดใด ๆ ที่ต่างกันอยู่บนเส้นอย่างมากหนึ่งเส้น

P1.6 จุดทุกจุดไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน

P1.7 เส้นสองเส้นใด ๆ มีจุดร่วมกันอย่างน้อย 1 จุด

จากสัจพจน์ P1.1 - P1.7 จะสามารถเขียนทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีที่ 1 จุดสองจุดใด ๆ อยู่บนเส้นหนึ่งและเส้นเดียวเท่านั้น

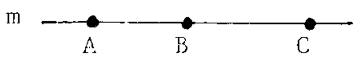
ทฤษฎีที่ 2 เส้นสองเส้นใด ๆ จะมีจุดร่วมกันหนึ่งจุดเท่านั้น

ทฤษฎีที่ 3 มีจุด 3 จุดที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน

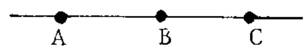
ทฤษฎีที่ 4 ทุก ๆ เส้นจะอยู่บนจุด 3 จุดเท่านั้น

การพิสูจน์ละไว้เป็นแบบฝึกหัดของผู้อ่าน

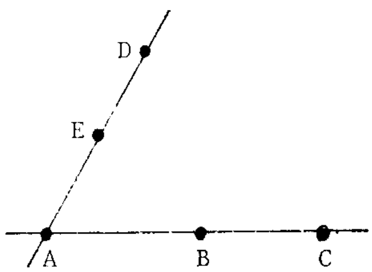
สามารถแสดงว่าเซต S ของจุดและเส้นซึ่งสอดคล้องตามสัจพจน์ P1.1 - P1.7 ต้องประกอบด้วย 7 จุดและ 7 เส้น แต่ละเส้นผ่านจุด 3 จุดของ S และแต่ละจุดอยู่บนเส้น 3 เส้น รูป 5-10 แสดงลำดับขั้นตอนเพื่อพิสูจน์ว่ามี 7 จุดและ 7 เส้นเท่านั้น โดยเส้นไม่จำเป็นต้องเป็นเส้นตรงในเรขาคณิตตาม P.1 - P.7



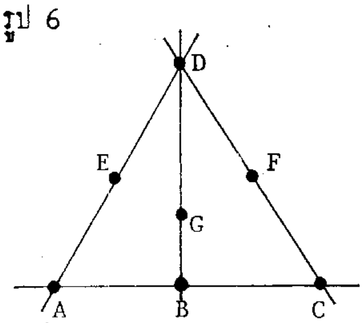
รูป 5



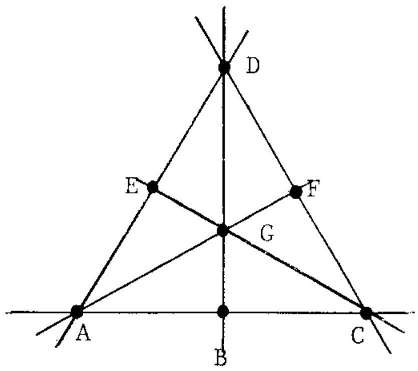
รูป 6



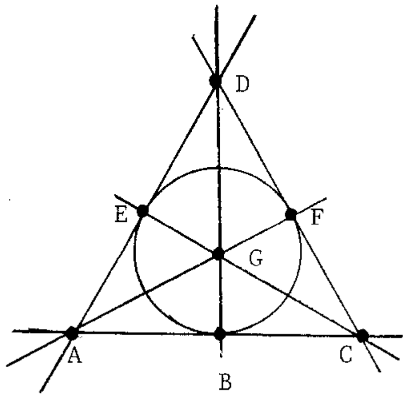
รูป 7



รูป 8



รูป 9



รูป 10

รูป 2.7

กิจกรรมการเรียนที่ 2.3

จากการที่ได้ศึกษาเรขาคณิต 3 จุดและ 3 เส้น จงทำตามคำสั่งและตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงเขียนรูปแบบอื่น ๆ ให้แตกต่างจากรูปที่เขียนไว้
2. จะลากเส้นผ่านจุด ๆ หนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้น ๆ หนึ่งให้ขนานกับเส้นนี้ได้หรือไม่
3. แต่ละเส้นจะมีจุดกี่จุด
4. เส้นในเรขาคณิต 3 จุดนี้ต้องตรงหรือไม่
5. เส้นสามเส้นผ่านจุด ๆ หนึ่งได้หรือไม่
6. มีสี่เหลี่ยมในเรขาคณิต 3 จุดนี้หรือไม่
7. จงพิสูจน์ว่าเส้นหนึ่งเส้นจะไม่ผ่านจุด 3 จุด

   ถ้าหากเรามีแผนที่ภูมิศาสตร์ง่าย ๆ แผ่นหนึ่งซึ่งประกอบด้วยถนนและเมืองความสัมพันธ์ระ ระหว่างถนนทั้งหลายมีสองประเภทคือ ถนนขนานกัน กับถนนตัดกันที่เมืองใดเมืองหนึ่ง จากแผนที่นี้พบว่า

   1. มีเมืองอย่างน้อย 1 เมือง บนแผนที่นี้
   2. ถนนแต่ละสายผ่านเมือง 2 เมืองเท่านั้น
   3. ทุก ๆ เมืองมีถนนผ่าน 2 สายเท่านั้น
   4. ถนนทุกสายมีถนนอีก 3 สายเท่านั้นที่ขนานกับถนนสายนี้

5. ถนนสองสายใด ๆ มีถนนสายหนึ่งขนานกับถนนสายหนึ่งและตัดถนนอีกสายหนึ่ง

ให้แทน เมือง ถนน แผนที่ บน ด้วยจุด เส้น ระนาบ บน ตามลำดับ โดยถือว่าคำเหล่านี้เป็นอนิยามศัพท์ และ

นิยาม 1. เส้นขนานหมายถึงเส้นที่ไม่มีจุดร่วมกัน

2. เส้นตัดกันก็คือเส้นที่ไม่ขนานกัน กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือเส้นที่มีจุดร่วมกัน

8. จากข้อ 1-5 ให้สร้างสัจพจน์ P.1-P.5 จากข้อเท็จจริงที่เห็นจากแผนที่นี้

9. จงพิสูจน์ว่ามีเส้นอย่างน้อย 2 เส้นที่ตัดกัน (ทฤษฎีที่ 1)

10. จงพิสูจน์ว่าสำหรับเส้นแต่ละเส้นมีเส้นอีกอย่างน้อยสองเส้นที่ตัดกับเส้นนี้ (ทฤษฎีที่ 2)

11. จงพิสูจน์ว่าสำหรับเส้นแต่ละเส้นจะมีเส้นเพียงสองเส้นเท่านั้นที่ตัด (ทฤษฎีที่ 3)

12. จงพิสูจน์ว่ามีเส้นเพียง 6 เส้นเท่านั้น (ทฤษฎีที่ 4)

13. จงพิสูจน์ว่ามีจุดเพียง 6 จุดเท่านั้น (ทฤษฎีที่ 5)

และจากทฤษฎีเหล่านี้ จงสร้างแบบจำลองในเรขาคณิตระบบนี้

เรขาคณิต 4 เส้นมีจุดและเส้นเป็นอนิยามศัพท์ และมีสัจพจน์ 3 ข้อดังนี้

P.1 เส้นทั้งหมดมี 4 เส้น

P.2 เส้นสองเส้นมีจุดร่วมกัน 1 จุด

P.3 จุดแต่ละจุดอยู่บนเส้นสองเส้นเท่านั้น

14. จงพิสูจน์ว่าเรขาคณิตสี่เส้น มีจุด 6 จุดเท่านั้น

15. จงพิสูจน์ว่าแต่ละเส้นของเรขาคณิตสี่เส้นนี้จะมีจุดเรียงอยู่ 3 จุด

16. ถ้าเปลี่ยนเส้นเป็นจุด และจุดเป็นเส้น ก็จะได้เรขาคณิตสี่จุดมีสัจพจน์คือ

1)..................

2)..................

3)..................

17. จงวาดรูปสร้างแบบจำลองในเรขาคณิต 4 เส้นนี้