บทที่ 1

บทนำ

เค้าโครงเรื่อง

1.1 ประวัติและความเป็นมาของเรขาคณิต

1.2 รูปเรขาคณิต

1.3 การสร้างในเรขาคณิตยุคลิด

1.4 เส้นจำนวน

1.5 เส้นยุคลิด

1.6 ระนาบยุคลิดและรูปเรขาคณิต

1.7 การแปลง

1.8 โครงสร้างเรขาคณิต

สาระสำคัญ

1. พัฒนาการของเรขาคณิตตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบัน
2. ความหมายของรูปเรขาคณิตที่สำคัญ เช่นรังสี ส่วนของเส้นตรง รูปสามเหลี่ยม รูปสี่ด้าน วงกลม
3. วิธีการสร้างรูปเรขาคณิตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้บางประการ
4. การนิยามจุดซึ่งมีพิกัดเป็นจำนวนตักยะโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการสร้างรูปเรขาคณิต แนวความคิดเกี่ยวกับกลุ่ม (group)
5. การถอดแบบกันของจำนวนจริง และจุดบนเส้นยุคลิด
6. การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด
7. การแปลงของเส้นตรงไปทั่วถึงตัวมันเอง จุดยืนยง การเลื่อนทางขนาน การเปลี่ยนขนาด
8. ประเภทเรขาคณิตในปัจจุบัน และการจำแนกประเภทของเรขาคณิตโดยพิจารณาจากเส้นขนานเป็นหลัก

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้วนักศึกษาสามารถ

1. อธิบายประวัติและความเป็นมาของเรขาคณิตตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบัน
2. ให้เหตุผลของความจำเป็นที่ต้องศึกษาเรขาคณิต
3. สร้างรูปเรขาคณิตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้
4. อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจริงกับเส้นยุคลิด
5. จำแนกประเภทของเรขาคณิตในปัจจุบันทั้งโดยวิธีพิจารณาจากการแปลง และโดยพิจารณาจากคุณสมบัติของเส้นขนาน

1.1 ประวัติและความเป็นมาของเรขาคณิต

คำว่า **เรขาคณิต** หรือที่ภาษาอังกฤษเรียกว่า Geometry คำว่า Geometry มีรากคำมาจากภาษากรีก geo แปลว่า earth metron แปลว่า a measure เรขาคณิตในระยะแรก ๆ จึงเป็นการวัด ด้าน มุม และพื้นที่ของรูปต่าง ๆ

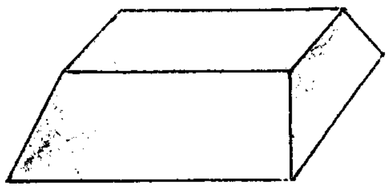
เรขาคณิตนี้มีมานานเพียงไรไม่ปรากฏ เท่าที่ทราบนั้นเริ่มตั้งแต่สมัยบาบิโลเนียเรืองอำนาจ จากหลักฐานที่จารึกในแผ่นดินเหนียวทำให้ทราบว่าราว ๆ 4,000 ปีก่อนคริสตกาลนั้นชาวบาบิโลเนียสามารถหาพื้นที่ของสนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยใช้ด้านกว้างคูณด้านยาว นอกจากนี้ยังรู้ผลการหาพื้นที่รูปต่าง ๆ เช่น รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รู้จักวิธีหาปริมาตรของปริซึม ชาวบาบิโลเนียใช้ค่า $\pi = 3$ ในการคำนวณหาเส้นรอบวงและพื้นที่ของวงกลมโดยถือว่าเส้นรอบวงเป็นสามเท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางและพื้นที่ของวงกลมเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นผ่านศูนย์กลาง เป็นที่น่าสังเกตว่าชาวบาบิโลเนียแบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 360 ส่วนเท่า ๆ กันอันเป็นแนวคิดซึ่งมีประโยชน์มหาศาลต่อคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ชาวบาบิโลเนียรู้จักสูตรการหาปริมาตรของทรงกระบอกโดยใช้ผลคูณของพื้นที่ฐานกับส่วนสูง ชาวบาบิโลเนียยังมีความรู้ว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมแบ่งครึ่งฐาน มุมในครึ่งวงกลมย่อมเป็นมุมฉาก ลักษณะที่ดีเด่นของชาวบาบิโลเนียอีกข้อหนึ่งคือการนำเอาพีชคณิตมาใช้ในเรขาคณิต เช่น ในแผ่นจารึก ชื่อ Strassbury tablet ซึ่งจารึกราว 1,800 ปีก่อนคริสตกาล มีปัญหาดังนี้ "พื้นที่ A ประกอบด้วยผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูป มีพื้นที่รวมกัน 1,000 ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปแรกสั้นกว่า $\frac{1}{3}$ ของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหลังอยู่ 10 จงหาด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสอง"

ประมาณหนึ่งพันปีหลังจากสมัยบาบิโลเนียก็เป็นสมัยของอียิปต์ ผู้ที่ได้รวบรวมตำราวิชาเรขาคณิตเป็นคนแรกของอียิปต์เป็นพระรูปหนึ่ง ชื่อ เอมีส (Abmes) ซึ่งบันทึก

ไว้ประมาณ 1,700 ปีก่อนคริสตกาล โดยเขียนไว้ในกระดาษปาปิรุส บันทึกนี้ได้รวมกฎข้อปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งการแก้ข้อปัญหาเหล่านั้นและคำตอบ ถือกันว่าเรขาคณิตเป็นศาสตร์อันลึกลับซึ่งตกทอดมาในหมู่พวกพระนานนับพันปีและเพราะความจำเป็นซึ่งเกิดจากพื้นดินริมฝั่งแม่น้ำไนล์ถูกน้ำท่วมทุกปีทำให้บางตอนของฝั่งได้พังลงและฝั่งตรงข้ามก็งอกขึ้น เมื่อมีน้ำท่วมทำลายเขตที่ดินกันทุกปีดังนี้ การปักปันเขตที่ดินย่อมเป็นปัญหากันอยู่ตลอดเวลาจึงเป็นเหตุให้วิทยาการแขนงนี้ก่อรูปขึ้นในลักษณะที่เกี่ยวกับการวัด

จากมอสโคว์ปาปิรุส (Moscow Papyrus) (ประมาณ 1,850 B.C.) มีปัญหา 25 ข้อ และจากปาปิรุส (Papyrus) (ประมาณ 1,650 B.C.) มีปัญหา 85 ข้อ พบว่า 26 ข้อจาก 110 ข้อ เป็นปัญหาทางเรขาคณิต ซึ่งส่วนใหญ่เป็นปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่และปริมาตร อียิปต์ในสมัยนั้นรู้สูตรการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ สูตรการหาพื้นที่วงกลมซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลาง d ของชาวอียิปต์ ก็คือ $[d - (\frac{1}{9})d]^2$ ซึ่งเท่ากับทำให้ $\pi = \frac{256}{81}$ หรือเท่ากับ 3.1605...

สำหรับ $[d - (\frac{1}{9})d]^2$ นั้นไม่ได้เขียนว่า $(\frac{8d}{9})^2$ เพราะสมัยนั้นอียิปต์รู้จักแต่เพียงเศษส่วนที่มีเศษเป็น 1 ชาวอียิปต์คำนวณหาปริมาตรของ frustum ของปริมาตรที่ที่มีส่วนสูง h และมีฐานจัตุรัสยาว a และ b ตามลำดับ ได้ถูกต้องโดยใช้สูตร $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$



รูป 1.1

กฎเกณฑ์ทางเรขาคณิตที่ทั้งชาวบาบิโลเนียและชาวอียิปต์คิดขึ้นก่อน 1,500 B.C. นั้นมีทั้งผิดและถูก เช่นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คำนวณจากด้านกว้างคูณด้านยาว นั้นถูกต้อง แต่พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่มีด้านยาว a,a' และ b,b' นั้นชนสอง เผ่านี้ใช้สูตร

$$A = \frac{1}{4}(a - a')(b - b')$$

สูตรนี้จะถูกต้อง ก็เมื่อรูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น

ทั้งชาวบาบิโลเนีย และชาวอียิปต์ ต่างก็คิดว่าด้านตรงข้ามมุมฉากนั้นมีความสัมพันธ์กับด้านอีกสองด้าน ชาวบาบิโลเนียคำนวณด้านตรงข้ามมุมฉาก c โดยใช้สูตร

$$c = a + \frac{b^2}{2a}$$

ถ้า $a = 4,\ b = 3$

จากสูตร จะได้ว่า $c = 5\frac{1}{8}$

ถ้าใช้สูตร $c^2 = a^2 + b^2$

จะได้ $c = 5$ ซึ่งค่าที่ได้แตกต่างกันไม่มากนัก

มีหลักฐานที่เชื่อได้ว่าชาวอียิปต์มีความเจริญในศาสตร์ที่เกี่ยวกับการวัดอย่างถูกต้อง ช่างรางวัดที่ดินของอียิปต์เรียกว่า rope stretchers ที่เรียกอย่างนี้ เพราะใช้เชือกที่ผูกเป็นปม ๆ และความยาวระหว่างปมเท่ากันเป็นเครื่องมือในการวัด ชาวอียิปต์ยังสามารถสร้างสามเหลี่ยมมุมฉากได้ด้วยวิธีง่าย ๆ คือ โดยใช้เชือกสามเส้นที่มีความยาว 3,4 และ 5 หน่วย ตามลำดับ เชือกนี้จะก่อให้เกิดเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้น นอกเหนือไปจากนี้ชาวอียิปต์ก็ยังมีความสามารถในการนำเรขาคณิตเอาไปใช้ในการสร้างรูปที่ยาก ๆ ขึ้นไปอีก ถ้าเรามีวงเวียนเพียงอันเดียวคงจะไม่ยากอะไรที่จะแบ่งเส้นรอบวงของวงกลมเป็น 6 ส่วนเท่า ๆ กัน ซึ่งจะทำให้เกิดเป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าได้แต่เป็นการยากไม่น้อยที่จะแบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 5 ส่วนหรือ 7 ส่วน เท่า ๆ กัน รูป 5 เหลี่ยม หรือ 7 เหลี่ยมด้านเท่านี้ชาวอียิปต์ใช้เป็นแบบหนึ่งในการออกแบบสร้างปิรามิด

สมัยนั้นวิทยาการด้านเรขาคณิตของอียิปต์เป็นที่นับหน้าถือตามาก มีนักศึกษาจากประเทศต่าง ๆ เดินทางมาศึกษาในอียิปต์ ในจำนวนนี้มีพวกกรีกที่สนใจในวิชาเกี่ยว

กับที่ดิน เมื่อพวกกรีกเดินทางกลับไปบ้านเมืองของคนก็ไปเปิดสอนวิชานี้ พวกเมธีทั้งหลายของกรีกก็เริ่มสนใจและสนใจยิ่งไปกว่าอียิปต์ กรีกแตกฉานไปวิชานี้มากกว่าอียิปต์ กรีกได้แก้ไขและนำวิชานี้ไปปรับปรุง พิสูจน์ให้เห็นจริงได้และยังได้นำวิชานี้ไปใช้ในวิชาอื่น ๆ เช่น วิศวกรรม สถาปัตยกรรม ศิลปกรรม การนาวี และดาราศาสตร์ นำไปใช้ในการประดิษฐ์สร้างศิลปกรรมต่าง ๆ เช่น การแกะสลัก และสันนิษฐานกันว่า วีนัส เดอ ไมโล เป็นการแกะสลักโดยใช้ศิลปะกรีกที่ว่าด้วยสามเหลี่ยม นอกจากนั้นยังนำไปใช้ในการก่อสร้างอีกมากจนกล่าวได้ว่า "ทุกสิ่งที่สร้างขึ้นในสมัยกรีก เช่น วิหารพาร์เทนอน และอาโกรโปลิสซึ่งเป็นเมืองเก่าของกรีกตลอดจนกำแพงเป็นการก่อสร้างความเจริญก้าวหน้าทางเรขาคณิตทั้งสิ้น สถานที่มีความเจริญแห่งแรกคือ เกาะไอโอเนีย ต่อมาเอเธนส์ และอเล็กซานเดรีย ซึ่งที่อเล็กซานเดียนี้ได้กลายเป็นเมืองที่มีความเจริญรุ่งเรืองในทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ด้วย

นักเรขาคณิตสมัยแรก ๆ ที่สมควรจะกล่าวถึง โดยเหตุที่เขาเป็นนักคณิตศาสตร์ชั้นเยี่ยม หรือเป็นผู้มีอิทธิพลต่อแนวความคิดของรุ่นหลัง คือ เทลีส (Thales) แห่งมิเลตุส (Meletus) (640-550 B.C.) บุคคลผู้นี้ได้รับการยกย่องว่าเป็นหนึ่งใน Seven wise men

เทลิส (Thales) 640-550 B.C.

เทลิสเชื้อชาติกรีก เกิดที่เมือง มิเลตุส ประมาณปี 640 ก่อนคริสตกาล ที่อียิปต์เทลิสได้รับคำสั่งสอนวิชาคำนวณจากพระซึ่งมีเผยแพร่ในยุคนั้น เขาได้รับสมญาว่าเป็น บิดาแห่งเรขาคณิต (Father of Geometry) เดิมเทลิสเป็นนักธุรกิจท่องเที่ยวค้าขายในประเทศอียิปต์และประเทศต่าง ๆ ขณะเดียวกันเขามีความสนใจศึกษาวิชาเรขาคณิตเป็นอันมาก เมื่อกลับมาเลยเลิกการค้า และหันมาศึกษาค้นคว้าเรื่องต่าง ๆ ทางวิชาเรขาคณิตจากการคำนวณความสูงของปิรามิดและจากความรู้ต่าง ๆ ที่ได้มา เทลีสได้รวบรวมความรู้เหล่านี้ขึ้นเป็นพื้นฐานทางเรขาคณิต เช่นการให้คำนิยามของเส้นตรงว่าเกิดจากจุดหลายจุดเรียงกันเป็นแถว นอกจากนี้ยังวางทฤษฎีบทที่สำคัญ ๆ และพิสูจน์ไว้แล้ว เช่น เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ย่อมแบ่งวงกลมออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน และยังมีเรื่องเส้นตรง 2 เส้นตัดกันมุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นย่อมเท่ากัน นับว่าเทลิสเป็นทั้งผู้นำ และผู้ให้กำเนิดวิชาเรขาคณิตเป็นคนแรกในสมัยกรีกก็ได้

ในสมัยนั้นไม่เพียงแต่จะเป็นพ่อค้าที่มั่งคั่ง เขายังได้ชื่อว่าเป็นนักคณิตศาสตร์และนักดาราศาสตร์คนแรกของกรีกด้วย เทลีสได้ศึกษาในอียิปต์ชั่วระยะหนึ่ง และได้แสดงความเป็นอัจฉริยะในหลาย ๆ ทางความสำเร็จที่ยิ่งใหญ่อันหนึ่งของเขาในอียิปต์ก็คือ สามารถวัดความสูงของปิรามิดได้โดยทางอ้อม (indirect measurement) วิธีการของเขาคือ ใช้ไม้สั้น ๆ ปักไว้กลางแดดและคอยสังเกตว่าเมื่อไรเงาไม้นั้นยาวเท่ากับความยาวของไม้ เมื่อถึงเวลานั้นเขาจะวัดเงาของปิรามิด ซึ่งแท้จริงแล้วก็คือ ความสูงของปิรามิดนั่นเอง แนวคิดนี้อาจเป็นของง่ายสำหรับนักเรียนมัธยมในปัจจุบัน แต่เราต้องไม่ลืมว่า อียิปต์ในสมัยนั้นศึกษาเฉพาะแต่การวัดพื้นที่และปริมาตร เรขาคณิตกับเส้นและรูปสามเหลี่ยมคล้าย ยังไม่เกิดขึ้น

ผลงานต่อไปนี้ ได้ชื่อว่าเป็นสิ่งที่พบโดยเทลีส

1. วงกลมถูกแบ่งครึ่งโดยเส้นผ่านศูนย์กลางใด ๆ
2. มุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมเท่ากัน
3. มุมตรงข้ามที่เกิดจากเส้นตรงตัดกันย่อมเท่ากัน
4. ถ้าสามเหลี่ยมสองรูป มีมุมเท่ากันสองมุมและด้านอีกด้านหนึ่งที่อยู่ระหว่างมุมทั้งสองเท่ากันตามลำดับแล้ว สามเหลี่ยมทั้งสองจะเท่ากันทุกประการ
5. มุมในครึ่งวงกลมย่อมเป็นมุมฉาก (ข้อเท็จจริงนี้ชาวบิโลเนียพบเมื่อราว ๆ 1,400 ปีก่อนแล้ว)

ลูกศิษย์เอกที่มีชื่อเสียงซึ่งเป็นผู้รวบรวมวิชาเรขาคณิตเป็นหมวดหมู่ขึ้นชื่อ อแนกซิแมนเดอร์ (Anaximander) ศิษย์ของ อแนกซิแมนเดอร์ ชื่อ ปีทาโกรัส (Pythagorus)

ปีทาโกรัส (Pythagorus) 584 B.C. - 495 B.C.

ปีทาโกรัสเป็นชาวเกาะ พื้นเพเดิมของเขาอยู่ที่เกาะซามัว (semos) ซึ่งเป็นเกาะเล็ก ๆ เกาะหนึ่งที่อยู่ใกล้ชายฝั่งทะเลของเอเซียไมเนอร์ วันเดือนปีเกิดของเขาไม่เป็นที่ทราบแน่นอน เป็นแต่เพียงนักประวัติศาสตร์สันนิษฐานกันว่า เขาเกิดในระหว่างปีที่ 585 หรือปีที่ 565 ก่อนคริสตกาล คุณสมบัติส่วนตัว ตลอดจนคำสั่งสอนของปีทาโกรัสดูเหมือนจะมีอิทธิพลยิ่งใหญ่ต่อคนในยุคนั้นมาก เพราะเขามีความสามารถในศาสตร์ต่าง ๆ หลายแขนง เช่น วิชาที่ว่าด้วยการถ่ายทอดวิญญาณ ดาราศาสตร์ การ

ปกครองและโดยเฉพาะอย่างยิ่ง คือ "คณิตศาสตร์" ปีทาโกรัสมีอาชีพเป็นครู เขามีโรงเรียนชื่อว่า Pythagorean School

ปีทาโกรัสได้สร้างทฤษฎียกกำลังสอง โดยกำหนดให้มีรูป ๆ หนึ่งแต่ละด้านให้มีความยาว 2 หน่วย พื้นที่จะเกิดจากการยกกำลังสองของมัน คือ 4 และเรายังเรียกว่า 4 เป็นกำลังสองของ 2,8 เป็นกำลังสามของ 2 อยู่ในปัจจุบัน ชาวกรีกถนัดใช้วิชาเรขาคณิตมากกว่าอย่างอื่นเพราะวิชาพีชคณิตหรือการคำนวณในแบบอื่น ๆ ยังไม่ได้รับการพัฒนา

ดังนั้นเลขศูนย์ และเลขไม่มีค่าอื่น ๆ จึงไม่มีใช้ในสมัยนั้น เพราะการลากเส้นให้มีความยาวเป็นศูนย์นั้นทำไม่ได้

เขาค้นพบจำนวน อตักยะ โดยการหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยการกำหนดให้ด้านที่ประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย เมื่อยกกำลังสองของด้านแต่ละด้านก็ยังคงเป็น 1 เพราะฉะนั้นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก ได้จากการถอดรากที่ 2 ของ 1+1 หรือ 2 (รากที่สองของ 2 นั้นมีค่าประมาณ 1.414214) ปีทาโกรัสต้องใช้เศษส่วนที่มีค่ามากกว่าค่าของทศนิยม (เพราะยังไม่มีการค้นพบทศนิยม) แต่เขายังไม่คิดว่า 2 ไม่มีรากที่ 2 และอย่างน้อยที่สุดต้องไม่ใช่แต่เพียง 1 เพราะมันยังมีค่าต่อไปไม่รู้จบอีก ซึ่งปีทาโกรัสเรียกว่า "ไม่สามารถกล่าวได้หมด" ซึ่งในปัจจุบันนี้คือ "จำนวนอตักยะ" นั่นเอง

ในเรื่องเรขาคณิตปีทาโกรัสได้เปลี่ยนแนวทางการศึกษาให้เป็นแนวทางที่ดียิ่งขึ้น เขาได้เดินทางไปศึกษาในอียิปต์ แล้วไปตั้งรกรากอยู่ที่เมืองขึ้นของกรีกทางใต้ของอิตาลี เปิดโรงเรียนสอนวิชาเรขาคณิต ปรัชญาและศาสนา ไม่ช้าโรงเรียนก็เจริญจนกลายมาเป็นสมาคม ใช้สัญลักษณ์ดาวห้าแฉกเป็นเครื่องหมาย จากเครื่องหมายของสมาคมทำให้วิชานี้พัฒนาในเรื่องรูปสามเหลี่ยม และรูปห้าเหลี่ยมมากต่อมาก็มีการค้นคว้าในเรื่องทฤษฎีต่าง ๆ ทฤษฎีที่มีชื่อเสียงอย่างยิ่งของปีทาโกรัสที่ใคร ๆ ต้องเรียนรู้และนำเอาไปใช้ประโยชน์ได้มากที่สุด คือทฤษฎีเรขาคณิตที่ว่าด้วย "มุมภายในสามเหลี่ยมรวมกันเข้า ย่อมเท่ากับสองมุมฉาก" กับทฤษฎีที่ว่าด้วย "เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ย่อมเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากรวมกัน" หรือจะพูดได้ว่า "เมื่อทราบความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

ของสามเหลี่ยมมุมฉากแล้ว ด้านตรงข้ามมุมฉากจะเท่ากับรากที่สองของผลบวกของกำลังสองของอีกสองด้านที่เหลือ"

นอกจากนี้เขาได้วางรากฐานทางเรขาคณิตไว้มากมาย สิ่งที่เห็นจริงแล้ว ซึ่งยุคลิดได้รวบรวมไว้ก็ได้มาจากงานที่ปีทาโกรัสสอน เช่น

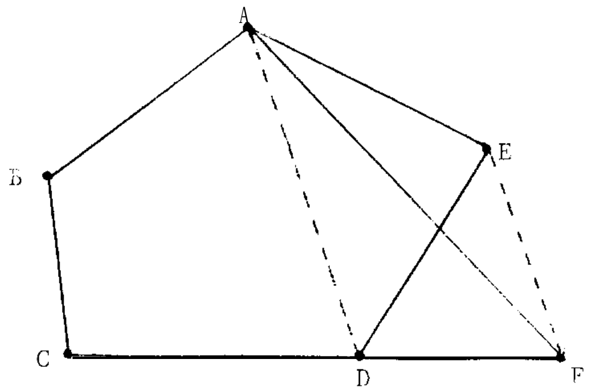
- จำนวนเต็ม ย่อมใหญ่กว่าส่วนย่อยของมัน
- จำนวนเต็ม คือผลรวมของส่วนย่อยหลาย ๆ ส่วนของจำนวนนั้น
- เส้นทุกเส้นย่อมยาวกว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของมัน
- วงกลมย่อมใหญ่กว่าส่วนโค้งของมัน

ซึ่งสิ่งเหล่านี้ไม่ต้องพิสูจน์ทั้งสิ้น

ผลงาน มีดังนี้

1. คุณสมบัติของเส้นขนาน ความสัมพันธ์ของเส้นขนานที่เกี่ยวกับผลบวกของมุมของรูปสามเหลี่ยม

2. การเปลี่ยนรูปหลายเหลี่ยมอย่างหนึ่งไปเป็นรูปหลายเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งโดยให้มีพื้นที่เท่ารูปเดิม



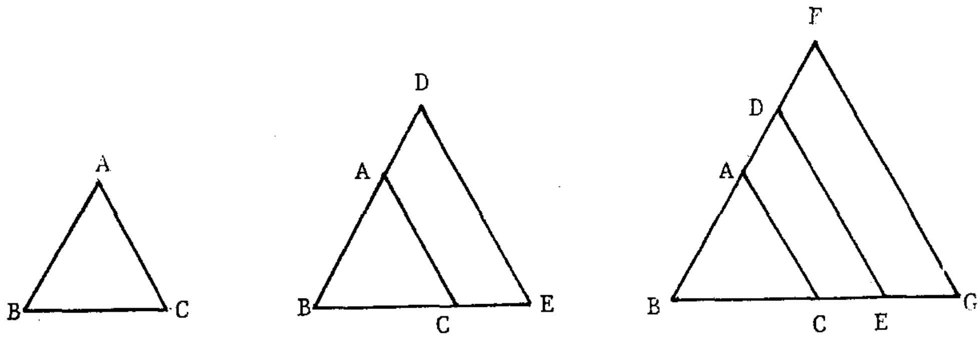
รูป 1.2

รูปหลายเหลี่ยม ABCDE เป็นรูปหลายเหลี่ยมที่กำหนดให้

ลากเส้น AD, ลากเส้นตรง EF//AD ตัดกับเส้นตรง CD ที่ต่อออกไปที่ F ลาก AF

รูปหลายเหลี่ยม ABCF จะมีพื้นที่เท่ากับรูปหลายเหลี่ยม ABCDE

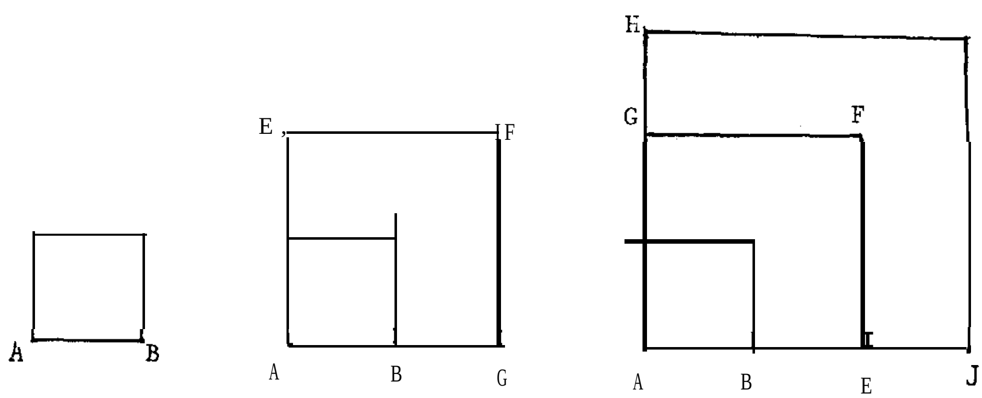
3. คุณสมบัติของรูปหลายเหลี่ยมคล้ายที่เกี่ยวกับสัดส่วน



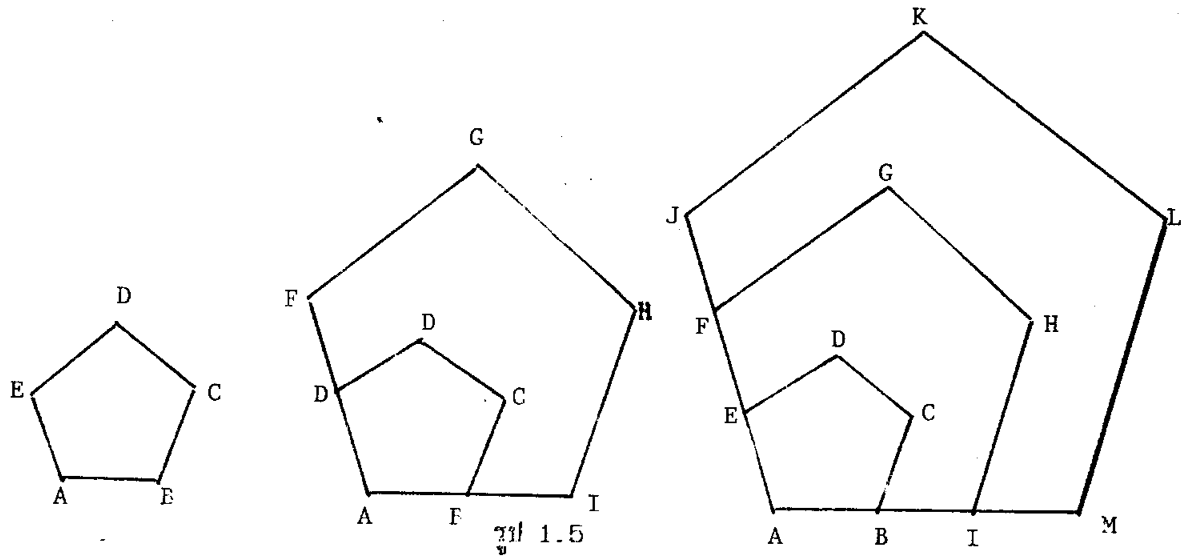
รูป 1.3

รูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม DBE จะได้ด้านที่สมนัยกันเป็นสัดส่วนต่อกันด้านต่อด้าน

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}$$



รูป 1.4



รูป 1.5

รูป ABCDE คล้ายกับรูป AIHGF

จะได้ $\frac{AB}{AI} = \frac{BC}{IH} = \frac{CD}{HG} = \frac{DF}{GF} = \frac{EA}{FA}$

4. เรื่องราวของทรงสามมิติปรกติ (Regular Solids)

ทรงสามมิติที่เป็น ปรกติ ก็คือ ทรงสามมิติที่มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

ก. มีด้านทุกด้านเท่ากัน

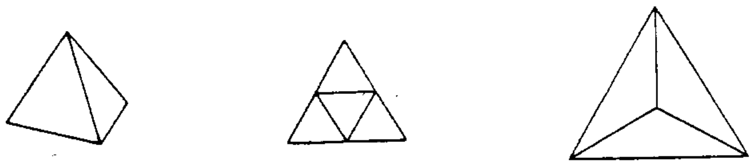
ข. มีมุมทุกมุมเท่ากัน

ทรงสามมิติปรกติ หรือ ทรงหลายหน้าปรกติ (regular polyhedron) นั้น ถ้าจะพิจารณาให้ดีแล้วจะมีเพียง 5 อย่างเท่านั้น ชื่อของทรงหลายหน้าปรกติ นั้น เรียกตามจำนวนหน้าที่ประกอบกันขึ้นเป็นทรงหลายหน้า ทรงสามมิติปรกติทั้งห้ามีดังนี้

1. ทรงสี่หน้า (Tetrahedron) แต่ละหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยม
2. ทรงหกหน้า (Hexahedron) แต่ละหน้าเป็นรูปจัตุรัส
3. ทรงแปดหน้า (Octahedron) แต่ละหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยม
4. ทรงสิบสองหน้า (Dodecahedron) แต่ละหน้าเป็นรูปห้าเหลี่ยม
5. ทรงยี่สิบหน้า (Icosahedron) แต่ละหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยม

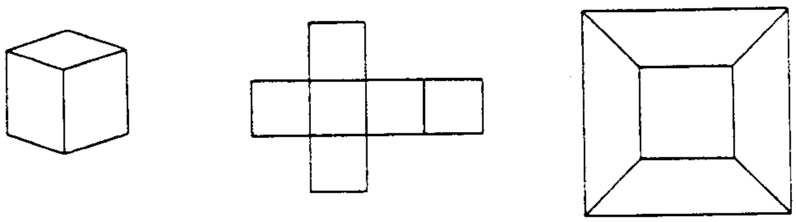
สัญลักษณ์สำหรับเรียก ทรงสามมิติปรกตินั้น Coxeter ได้เสนอแนะไว้ในหนังสือ Introduction to Geometry ว่าควรจะใช้ Schläfli symbol {p,q} แต่ละระนาบของทรงเรียกว่าหน้าหรือ (face) ด้านร่วมของสองหน้าใด ๆ เรียกว่าขอบหรือ (edge) ซึ่ง {p,q} นั้นหมายความว่าแต่ละหน้าจะมี p เหลี่ยม และแต่ละยอดจะมีขอบอยู่ q ขอบ เช่น ลูกบาศก์ (cube) สัญลักษณ์ {4,3} เพราะมี 4 หน้า และแต่ละยอดมี 3 ขอบ

Leonardo da Vinci ได้เคยสร้าง ตัวแบบ ของ ทรงสามมิติเหล่านี้ไว้ ตัวแบบเป็น perspective คล้าย ๆ กับการมองจากที่สูง จากจุดศูนย์กลางของหน้าใดหน้าหนึ่งจะเห็นรูปทุกหน้าเว้นหน้าหลังสุด ตัวแบบของทรงสามมิติ โดยวิธีนี้เรียกว่า Schlegel diagram รูปต่อไปนี้แสดงทรงสามมิติปรกติ ทั้งห้าแบบของการสร้าง และ Schlegel diagram



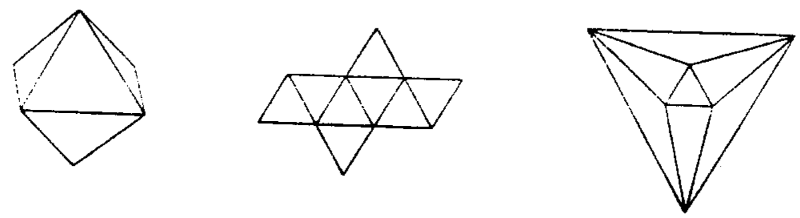
ทรงสี่หน้า

Tetrahedron {3,3}



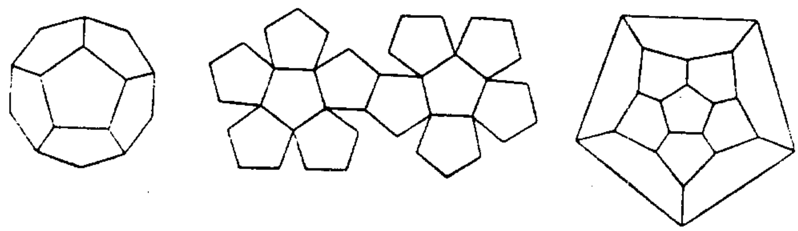
ลูกบาศก์

Cube {4,3}



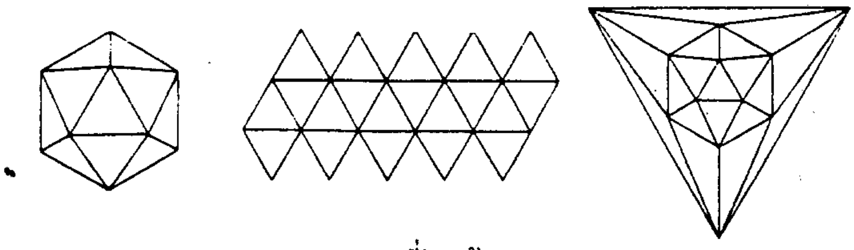
ทรงแปดหน้า

Octahedron {3,4}



ทรงสิบสองหน้า

Dodecahedron {5,3}



ทรงยี่สิบหน้า

Icosahedron {3,5}

รูป 1.6

ถ้าพิจารณา Schlegel diagram ให้ดี จะเห็นว่ามีความสัมพันธ์ระหว่างยอด ขอบ และหน้า ดังนี้

กำหนดให้ V คือ ยอด (vertex)

E คือ ขอบ (edge)

F คือ หน้า (face)

แล้วจะได้ความสัมพันธ์

$$V - E + F = 2$$

ความสัมพันธ์อันนี้เรียกว่าสูตรของออยเลอร์ Euler's formula ซึ่งไม่เพียงแต่จะเป็นจริงในทรงสามมิติปรกติเท่านั้น ยังเป็นจริงในรูปธรรมดาอีกด้วย

5. **พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส** บนด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีค่าเท่ากับ ผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านอีกสองด้านที่เหลือ

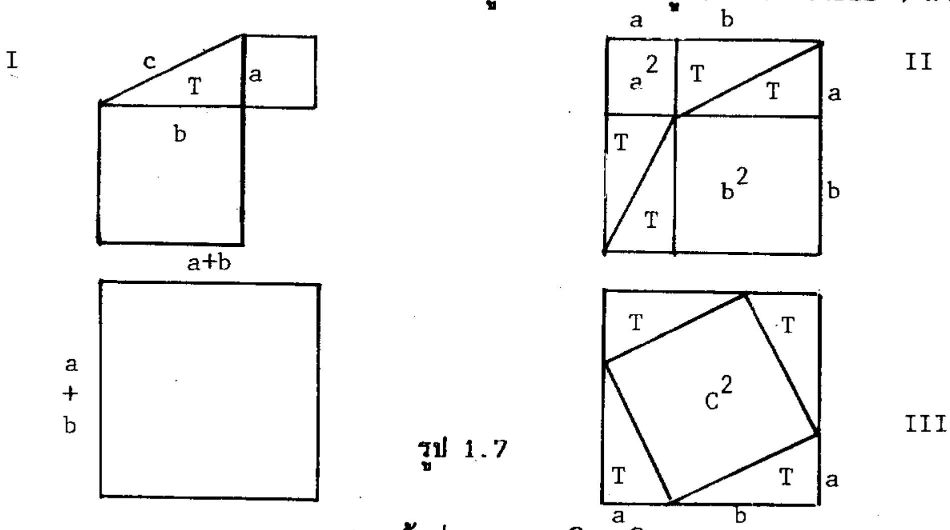
ในปัจจุบัน เรามักจะพบเรื่องราวของทฤษฎีนี้ในรูปดังนี้

ถ้า a,b และ c เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากแล้ว จะได้

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ที่เขียนอย่างนี้เป็นเรื่องราวของคนรุ่นหลังที่พยายามนำเอาพีชคณิตไปใช้ในสมัยของปีทาโกรัสนั้น สัญลักษณ์ a^2 หรือ b^2 ยังไม่มีในโลกนี้

ทฤษฎีนี้สามารถพิสูจน์ได้หลายวิธีในหนังสือ The Pythagorean Proposition เขียนโดย Elisha S. Loomis อธิบายการพิสูจน์ทฤษฎีนี้ไว้ถึง 256 วิธี เป็นที่เชื่อได้ว่า ปีทาโกรัส พิสูจน์โดยการแบ่งรูปออกเป็นส่วนย่อย ๆ ดังนี้



รูป 1.7

จากรูป II จะเห็นว่าพื้นที่เท่ากับ $a^2 + b^2 + 4T$

จากรูป III จะเห็นว่าพื้นที่เท่ากับ $c^2 + 4T$

$$c^2 + 4T = a^2 + b^2 + 4T$$

ดังนั้น $$c^2 = a^2 + b^2$$

เพลโต (Plato) มีอายุอยู่ระหว่างปีก่อน ค.ศ. 249 - 348 B.C. เป็นครูสอนหนังสืออยู่ในสวน เจ้าของสวนชื่ออะคาเดมัส (Akademas) สวนชื่ออะคาเดเมีย (Akademia) โรงเรียนชื่ออะคาเดมี (Akademy) อยู่ห่างจาก Athen ประมาณ 1 ไมล์ ผลงานที่มีชื่อเสียงคือ การค้นพบวิชาการทางเหตุผลแบบวิเคราะห์ (Analysis) คือ พิสูจน์จากผลที่จะพิสูจน์ ไปยังสิ่งที่กำหนดให้ ตรงข้ามกับ Synthesis

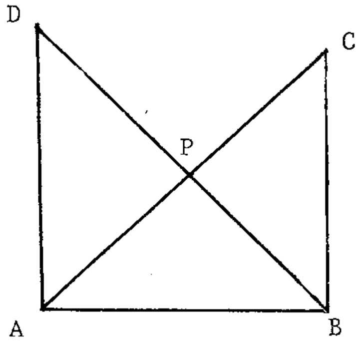
นักปราชญ์อื่น ๆ ที่เกิดในระยะนี้คือ Hippocrates (470 B.C.), Eudosus (408 - 355 B.C.) Menaechmus (375 B.C. - 325 B.C.)

ผลงาน

1. **ค้นพบทฤษฎีของสัดส่วน**
2. **ภาคตัดกรวย** (Conic section) **พบโดย ฮิปโปเครติส** (Hippocrates) และ **ยูโดซุส** (Eudosus)

3. การหาขอบของลูกบาศก์ที่มีปริมาตรเป็น 2 เท่า ของลูกบาศก์ที่กำหนดให้
4. ค้นพบวิธีแบ่งมุมใด ๆ ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน
5. รู้จักวิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้มีพื้นที่เท่ากับวงกลมที่กำหนดให้

การค้นพบทฤษฎีของสัดส่วน



รูป 1.8

ให้ CAB และ DAB เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 2 รูป มีมุม A และมุม B เป็นมุมฉากตามลำดับ AB เป็นด้านร่วมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง

เส้น AC และ BD ตัดกันที่ P และตั้งฉากกันด้วย

รูปสามเหลี่ยม CPB, BPA และ APD คล้ายกัน

PC : PB = PB : PA = PA : PD

การหาขอบของลูกบาศก์ที่มีปริมาตร เป็น 2 เท่าของลูกบาศก์ที่กำหนดให้

ให้ส่วนของเส้นตรง 2 เส้นยาว s และ 2s ถ้าเรากำหนดให้ x และ y เป็นสัดส่วนกับ s และ 2s ดังนี้

$$s : x = x : y = y : 2s$$

จากสัดส่วนที่ เราได้ $x^2 = sy$ และ $y^2 = 2sx$ โดยการกำจัดเราจะพบว่า

$$x^3 = 2s^2$$

ดังนั้น x จะเป็นขอบของลูกบาศก์ที่มีปริมาตรเป็น 2 เท่าของลูกบาศก์บนขอบ s

พิสูจน์

1. $\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s}$

2. $x^2 = sy$

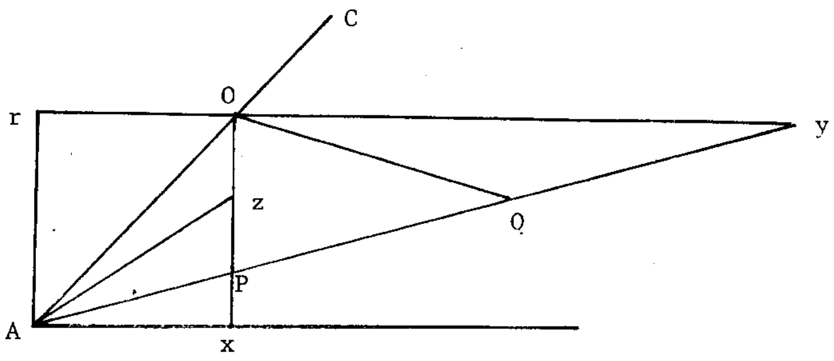
3. $y^2 = 2sx$

4. จากข้อ 2 $\quad x^4 = s^2 y^2$

$\qquad = s^2\ 2sx$

$x^3 = 2s^3$.

การแบ่งมุมออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน



รูป 1.9

วิธีสร้าง

1. กำหนดให้ $C\hat{A}B$ เป็นมุม ๆ หนึ่งมีจุด O เป็นจุดบนแขน AC
2. จาก O ลากเส้น OX $\perp$ AB
3. สร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า AXOr
4. จาก A ลากเส้นตรง Ay พบ rO ที่ต่อออกไปที่ y และตัดกับ OX ที่ P ทำให้ Py = 2 AO
5. ให้ Q เป็นจุดกึ่งกลาง Py ลาก OQ ให้ Z เป็นจุดกึ่งกลาง OP ลาก AZ

จะได้ (1) PQ = Qy = AO = OQ

(2) OY // AB, $\quad O\hat{y}A = y\hat{A}B$

$Q\hat{O}y = Q\hat{y}O$ (OQ = Qy)

$O\hat{Q}A = O\hat{A}Q \ (AO = OQ)$

$O\hat{Q}A = Q\hat{O}y + Q\hat{y}O = 2Q\hat{y}O$

$O\hat{A}Q = 2\ Q\hat{y}Q$

$\quad = 2\ y\hat{A}B \because O\hat{y}A = y\hat{A}B$

$O\hat{A}Z = Z\hat{A}P = P\hat{A}X$

กิจกรรมการเรียนที่1.1

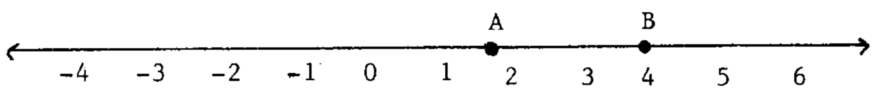
1. การพิสูจน์ทฤษฎีปีทาโกรัสนอกจากที่กล่าวไปแล้ว ยังทำได้โดยวิธีอื่น จงแสดงวิธีต่าง ๆ เหล่านั้นมาสัก 2 วิธี
2. ทฤษฎีปีทาโกรัส พิสูจน์โดยมุ่งที่พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นเกณฑ์ นักศึกษาคิดว่าแนวคิดของทฤษฎีเป็นจริงแต่เฉพาะรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่านั้นใช่หรือไม่ ให้นักศึกษาพิจารณารูปอื่น ๆ ที่สร้างบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เช่น รูปวงกลม รูปหกเหลี่ยมด้านเท่า เป็นต้น นักศึกษาได้ข้อสรุปอย่างไร

1.2 รูปเรขาคณิต

ระบบคณิตศาสตร์ใด ๆ ต้องเริ่มจากอนิยามศัพท์ (undefined terms) เช่น เซต จุด และเส้นเป็นอนิยามศัพท์ สำหรับเส้นนั้นอาจกล่าวว่าเป็นเซตของจุด ซึ่งความหมายนี้กลมกลืนกับบทนิยามที่กล่าวว่า รูปเรขาคณิต คือ เซตของจุด ตัวอย่างหนึ่งของรูปเรขาคณิตได้แก่ เส้นตรง

ต่อไปนี้จะเขียนแทนจุดด้วย • และใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ A,B,...,Z เป็นชื่อเรียกของจุด จุดสองจุดใด ๆ ที่ต่างกันจะมีเส้นตรงเดียวเท่านั้นที่บรรจุทั้งจุด A และจุด B

เส้นตรง $\overleftrightarrow{AB}$ กำหนดด้วยจุดสองจุดใด ๆ ในเซต



รูป 1.10

ในเรขาคณิตระบบยุคลิด (Euclidean geometry) นั้นอาจเลือกจุดใดจุดหนึ่งของเส้นตรง $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นจุดกำเนิด มีพิกัดเป็น 0 และอาจเลือกจุดอื่นที่อยู่ห่างจากจุดกำเนิดไปทางขวามือเป็นระยะทาง 1 หน่วย จุดนี้จะมีพิกัดเป็น 1 ดังนั้นทุก ๆ จุดแต่ละจุดบนเส้นตรงจะมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่งเป็นพิกัดของจุดแต่ละจุด และกล่าวได้ว่าจำนวนจริงทุก ๆ จำนวนมีกราฟเป็นจุดบนเส้นตรง ดังนั้นเส้นยุคลิด (Euclidean line) เป็นเส้นจำนวนจริง เพราะเส้นยุคลิดเป็นเซตของจุดที่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับเซตของจำนวนจริง ในบทนี้คำว่า เส้นตรง หมายถึงเส้นยุคลิด เว้นแต่จะกำหนดเป็นอย่างอื่น

จุด P ซึ่งอยู่บนเส้นตรงเส้นหนึ่งและจุด P มีพิกัด x เขียนแทนด้วย P_x

ถ้าจุด A มีพิกัด a และจุด B มีพิกัด b ซึ่ง $a < b$ แล้ว

เส้นกึ่งอนันต์ (half - line) ที่มีจุดปลายข้างหนึ่งคือ จุด A และเส้นนี้บรรจุจุด B อาจนิยามว่า

$$\overset{\rightarrowtail}{AB} = \{P_x \mid a < x\}$$

อ่านว่า "เซตของจุด P_x ซึ่ง a น้อยกว่า x"

รังสี (ray) $\overrightarrow{AB}$ ซึ่งมีจุดปลายข้างหนึ่งคือจุด A และบรรจุจุด B อาจนิยามว่า

$$\overrightarrow{AB} = \{P_x \mid a \leq x\}$$

สังเกตว่า รังสี $\overrightarrow{AB}$ เป็นผลผนวก (union) ของเส้นกึ่งอนันต์ $\overset{\rightarrowtail}{AB}$ กับจุด A

$$\overrightarrow{AB} = \overset{\rightarrowtail}{AB} \cup A$$

ส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ซึ่งมีจุดปลายคือ A และ B อาจนิยามว่า

$$\overline{AB} = \{P_x \mid a \leq x \leq b\}$$

สังเกตว่าส่วนของเส้นตรง AB เป็นผลตัด (intersection) ของรังสี $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$

$$\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$$

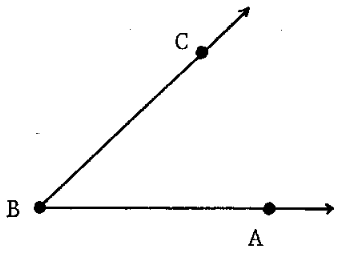
เครื่องหมาย = ที่ใช้ในเรขาคณิตมีความหมายเหมือนกับที่ใช้ในพีชคณิต นั่นคือ ใช้เครื่องหมาย = เพื่อแสดงว่าสัญลักษณ์ทั้งสองแทนสิ่งเดียวกัน จุดบนส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ที่ไม่ใช่จุดปลาย เรียกว่า **จุดข้างใน** (interior points) ของส่วนของเส้นตรง

ถ้า P_r และ P_s เป็นจุดสองจุดใด ๆ บนเส้นตรงเส้นหนึ่งแล้ว ความยาวของ $\overline{P_rP_s}$ นิยามด้วย

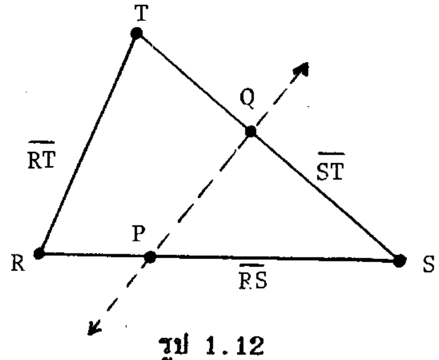
$$m(\overline{P_rP_s}) = |s - r|$$

มีข้อสังเกตเรื่องความยาว ซึ่งเรามักจะนึกถึงความยาวว่าเป็นการวัดส่วนของเส้นตรงจึงเขียนแทนความยาวของ P_rP_s ด้วย $m(\overline{P_rP_s})$ ถ้าส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ มีความยาวเป็นค่าเดียวกันแล้ว กล่าวว่า ส่วนของเส้นตรงสองส่วนนี้เป็น**ส่วนของเส้นตรงที่ลงรอยกัน** (Congruent line segments, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$)

ผลบวกของรังสีสองรังสี $\overrightarrow{BA}$ และ $\overrightarrow{BC}$ ซึ่งมีจุดปลาย B ร่วมกัน ทำให้เกิดมุมบนระนาบ (plane angle) $A\hat{B}C$ ซึ่งมีรังสี $\overrightarrow{BA}$ และ $\overrightarrow{BC}$ เป็นด้าน (sides) และมีจุด B เป็นจุดยอด



รูป 1.11



รูป 1.12

ที่กล่าวมานี้เหมือนกับการนิยามว่า มุมเป็นเซตของจุดนั่นเอง ในขณะนี้ยังไม่กล่าวถึงการเลือกให้รังสีใดรังสีหนึ่งเป็นรังสีเริ่มต้น และจะยังไม่กล่าวถึงการหมุนของรังสีรอบจุดยอดของมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกามีค่าเป็นบวก เมื่อนึกถึงมุมใด ๆ ซึ่งด้านประกอบมุมทั้งสองด้านไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันอาจนึกถึง มุมแหลม มุมฉาก หรือมุมป้าน โดยไม่มีมุมกลับ กล่าวคือ วัดมุม ABC เป็นค่า x มีหน่วยเป็น องศา ($x = m\,A\hat{B}C$) ซึ่ง $0 \leq x \leq 180$ แล้ว

$m\,A\hat{B}C = 0$	ถ้า $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$
$0 < m\,A\hat{B}C < 90$	ถ้า $A\hat{B}C$ เป็นมุมแหลม
$m\,A\hat{B}C = 90$	ถ้า $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก
$90 < m\,A\hat{B}C < 180$	ถ้า $A\hat{B}C$ เป็นมุมป้าน
$m\,A\hat{B}C = 180$	ถ้า $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AC}$ นั่นคือ ถ้า $\overrightarrow{BA}$ และ $\overrightarrow{BC}$ เป็นรังสีตรงข้าม และ $A\hat{B}C$ เป็นมุมตรง

มุมสองมุมใด ๆ $A\hat{B}C$ และ $D\hat{E}F$ เรียกว่าเป็นมุมสมรอยกัน (congruent angle) เมื่อขนาดของมุมทั้งสองมีค่าเดียวกัน เขียนแทนด้วย $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$

ใช้เครื่องหมายเท่ากับ " = " สำหรับมุมมุมเดียวกัน แต่เรียกได้สองชื่อ เช่น $A\hat{B}C = C\hat{B}A$

ถ้า $R\hat{S}T$ เป็นมุมฉากแล้ว รังสี $\overrightarrow{SR}$ และ $\overrightarrow{ST}$ ตั้งฉากกัน เขียน

แทนด้วย $\overleftrightarrow{SR} \perp \overleftrightarrow{ST}$

เส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกัน ถ้าเส้นตรงทั้งสองบรรจุรังสีที่ตั้งฉากกัน และกล่าวว่า กึ่งช่วงอนันต์สองช่วง ส่วนของเส้นตรงทั้งสองและเซตของจุดที่อยู่ร่วมเส้นตรงทั้งสองเส้นนี้ตั้งฉากกัน

จุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เป็นจุดไม่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน (noncollinear points)

ถ้า R,S และ T เป็นจุด 3 จุดที่ไม่ร่วมเส้นตรงเดียวกันแล้ว ผลผนวกของ $\overline{RS} \cup \overline{ST} \cup \overline{RT}$ ของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดโดยจุดทั้งสามเรียกว่า **รูปสามเหลี่ยม** RST (รูป 1.12)

ส่วนของเส้นตรง $\overline{RS}$, $\overline{RT}$, $\overline{ST}$ เรียกว่า ด้านของรูปสามเหลี่ยม

จุด R,S และ T เป็นจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

ด้านทั้งสามกำหนด $R\hat{T}S$, $T\hat{S}R$ และ $S\hat{R}T$ ของรูปสามเหลี่ยม

ถ้า P และ Q เป็นจุดของรูปสามเหลี่ยม RST ซึ่งไม่ใช่จุดบนด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมผลผนวกของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง กับจุดข้างในรูปสามเหลี่ยม เรียกว่า บริเวณรูปสามเหลี่ยม

ถ้าจุดยอดทุกจุดของรูปสามเหลี่ยมสองรูป RST และ R'S'T' มีการสมนัยกัน คือ มุมที่สมนัยกันเป็นมุมลงรอยกันแล้ว สามเหลี่ยมสองรูปเป็น**สามเหลี่ยมคล้ายกัน** เขียนแทนด้วย $\Delta RST \sim \Delta R'S'T'$ ภายใต้การสมนัยนี้

อาจสร้างมโนภาพรูปสามเหลี่ยมว่าเป็นระนาบ ระนาบคือ เซตของจุด ซึ่ง

ก) ถ้าจุดสองจุดของเส้นตรงเส้นหนึ่งเป็นสมาชิกของเซตของจุดแล้ว ทุกๆ จุดบนเส้นเป็นสมาชิกของเซตนี้ด้วย นั่นคือ เส้นเป็นเซตย่อยของระนาบ และ

ข) ถ้าจุดยอดมุมของสามเหลี่ยมเป็นสมาชิกของเซตแล้ว ทุก ๆ จุดที่เป็นสมาชิกของเซตอยู่บนเส้นตรง (ซึ่งมีหลายเส้น) แต่ละเส้นบรรจุจุดอย่างน้อย 2 จุดของรูปสามเหลี่ยม

รูปเรขาคณิตที่อยู่บนระนาบเดียวกัน เป็น **รูปร่วมระนาบกัน** (Coplanar figures)

บนระนาบหนึ่ง เส้นตรงใด ๆ p และ q ซึ่งไม่ตัดกันจะขนานกัน เขียน

แทนด้วย p//q ดังนั้น เส้นร่วมระนาบ p และ q ขนานกัน ถ้าไม่มีจุดร่วมกัน หรือถ้าเส้นร่วมระนาบมีอย่างน้อยสองจุดร่วมกันซึ่งหมายความว่า เส้นทั้งสอง **ทับกันสนิท** (coinside)

สังเกตว่า เรานิยามเส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับตัวเอง และเซตทั่วไปของจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรง ซึ่งกำหนดเส้นตรงขนานกัน ถ้าเส้นตรงเหล่านั้นขนานกัน

ถ้า A,B,C และ D เป็นจุดร่วมระนาบกัน โดยไม่มีส่วนของเส้นตรงสองในสี่ต่อไปนี้ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ร่วมเส้นตรงเดียวกัน หรือไม่มีส่วนของเส้นตรงสองเส้นใด ๆ ที่มีจุดข้างในร่วมกันแล้ว $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ เป็นรูปสี่ด้าน (quadrilateral)

บนระนาบนั้น เซตของจุดทั้งหมดซึ่งอยู่ห่างจากจุดที่เป็นระยะคงที่ที่กำหนดให้ เรียกว่า**วงกลม** เรียกระยะคงที่ว่า **รัศมี** เรียกจุดคงที่ว่า **จุดศูนย์**กลาง

จุดบนระนาบเป็นจุดบนวงกลม ถ้าระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดศูนย์กลางเท่ากับรัศมี

จุดบนระนาบที่ระยะทางจากจุดบนวงกลมไปยังจุดศูนย์กลางน้อยกว่ารัศมี เรียกจุดเหล่านั้นว่า**จุดข้างในวงกลม** และถ้าระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดศูนย์กลางมากกว่ารัศมี เรียกจุดนั้นว่า **จุดข้างนอกวงกลม**

ผลผนวกของจุดบนวงกลมและจุดข้างในวงกลมเรียกว่า **บริเวณวงกลม** ส่วนของเส้นตรงที่จุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเรียกว่า **คอร์ด** (Cord) ของวงกลม ถ้าคอร์ดบรรจุจุดศูนย์กลางของวงกลมเรียกว่า **เส้นผ่านศูนย์กลาง** (diameter) ของวงกลม จุดสองจุดใด ๆ ของวงกลมแบ่งวงกลมเป็นสองส่วน (arcs) โดยมีจุดปลายเป็นจุดที่กำหนดให้

วงกลมสองวงใด ๆ ที่มีรัศมีลงรอยกัน เป็นวงกลมที่ลงรอยกัน (Congruent circle)

ในปริภูมิปกติของเรานั้นจุดทั้งหลายไม่ได้อยู่บนระนาบเดียวกันทั้งหมด ถ้า Q เป็นจุด ๆ หนึ่งซึ่งไม่อยู่บนระนาบของรูปสามเหลี่ยม RST แล้ว ผลผนวกของบริเวณสามเหลี่ยมของรูปสามเหลี่ยม *RST*, *QRS*, *QST* และ *QTR* เป็นทรงสี่หน้า จุด 4 จุดที่ไม่ร่วมระนาบเดียวกัน Q,R,S และ T กำหนดปริภูมิสามมิติ

มีคุณสมบัติว่า

ก) ถ้าจุดสองจุดของเส้นตรงเส้นหนึ่งอยู่ในปริภูมิสามมิติแล้ว ทุก ๆ จุดของเส้นตรงอยู่ในปริภูมิสามมิติด้วย และ

ข) ทุก ๆ จุดของปริภูมิสามมิติจะอยู่บนเส้นตรงเส้นหนึ่ง (โดยทั่ว ๆ ไปนั้นมีเส้นจำนวนมาก) ซึ่งบรรจุอย่างน้อยสองจุดของทรงสี่หน้า

ปริภูมิปกติของเราเป็นปริภูมิสามมิติและในเรขาคณิตพื้นฐานเรานึกถึงจุดของปริภูมิสามมิติว่าเป็นเซตจักรวาลของเซตของจุด

กิจกรรมการเรียนที่ 1.2

จากข้อ 1 ถึง 6 จงบอกเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ

1) รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็น
   ก) รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
   ข) รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
   ค) รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า
2) สามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน
3) สามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ
4) รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งเป็น
   ก) รูปสี่เหลี่ยมคางหมู
   ข) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
5) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งเป็น
   ก) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
   ข) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
   ค) รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
6) ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งเป็น
   ก) เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
   ข) เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

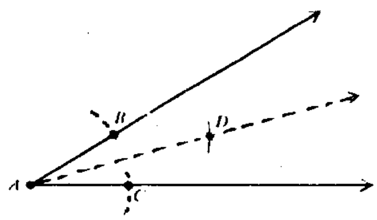
1.3 การสร้างในเรขาคณิตยุคลิด

จุดและเส้นบนระนาบช่วยให้มองเห็นรูปเรขาคณิตและคุณสมบัติต่าง ๆ ในเรขาคณิตบนระนาบแบบยุคลิดดีขึ้น เมื่อศึกษาเรขาคณิตอื่น ๆ พบว่า มีความจำเป็นต้องอาศัยรูปต่าง ๆ เพื่อช่วยให้เข้าใจคุณสมบัติของเรขาคณิตเหล่านั้นเช่นกัน จึงขอแนะนำพื้นฐานของการสร้างโดยใช้ไม้บรรทัด และวงเวียนเป็นเครื่องมือ การสร้างมีประโยชน์ต่อการศึกษาเรขาคณิตอื่น ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก

บทสร้างที่ 1 การลากเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุดสองจุดที่กำหนด

บทสร้างที่ 2 การสร้างวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดซึ่งกำหนดให้และมีรัศมียาวเท่ากับความยาวที่กำหนด

บทสร้างที่ 3 การแบ่งครึ่งมุม



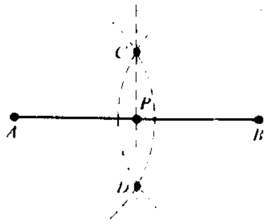
รูปที่ 1.13

ในบทสร้างที่ 3 นี้จะเน้นการใช้ส่วนโค้งของวงกลมและส่วนของเส้นตรงช่วยการสร้าง นักศึกษาคงจะจำวิธีการแบ่งครึ่งมุมโดยใช้ ไม้บรรทัดและวงเวียนได้ และจะเห็นว่า ส่วนโค้ง BC เป็นส่วนหนึ่งของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด A มีรัศมี $\overline{AB}$ วงกลมนี้ตัดแขนอีกข้างหนึ่งของมุมที่กำหนดให้ ที่จุด C ส่วนโค้งสองส่วนที่ตัดกันที่จุด D เป็นส่วนหนึ่งของวงกลมที่เท่ากันทุกประการ และเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด B และจุด

C ตามลำดับ รังสี $\overrightarrow{AD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม CAB

นั่นคือ $C\hat{A}D = D\hat{A}B$

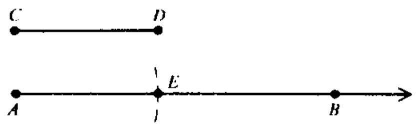
บทสร้างที่ 4 การลากเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง



รูป 1.14

การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ที่จุด P ทำได้โดยสร้าง CD แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ (รูป 1.14)

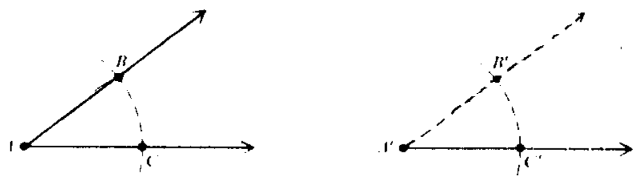
บทสร้างที่ 5 การสร้างส่วนของเส้นตรงบนรังสีที่กำหนดให้ โดยจุดปลายข้างหนึ่งของส่วนของเส้นตรง เป็นจุดเดียวกับจุดปลายของรังสีและส่วนของเส้นตรงนี้มีความยาวเท่ากับความยาวที่กำหนดให้



รูปที่ 1.15

เมื่อกำหนดส่วนของเส้นตรง $\overline{CD}$ และรังสี $\overrightarrow{AB}$ สามารถสร้างส่วนของเส้นตรงบนรังสี $\overrightarrow{AB}$ ให้มีจุดปลายที่ A จากรูป 1.15 จะได้ $\overline{AD} \cong \overline{CD}$

บทสร้างที่ 6 การสร้างมุมบนรังสีที่กำหนดให้ โดยมีมุมใดเท่ากับมุมที่กำหนด



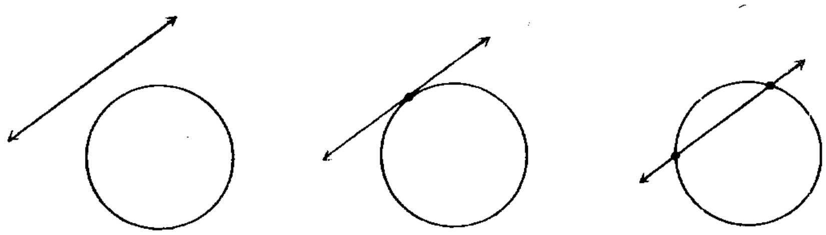
รูปที่ 1.16

เส้นตรงเส้นหนึ่งบนระนาบเดียวกันกับวงกลมวงหนึ่ง อาจจะ

ก) ไม่บรรจุจุดใดเลยของวงกลม (รูป ก)

ข) บรรจุจุดจุดหนึ่งและจุดเดียวเท่านั้นของวงกลม (เส้นสัมผัสวงกลม) (รูป ข)

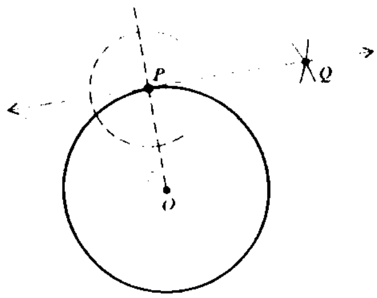
ค) บรรจุจุดจุดของวงกลมสองจุด (รูป ค)



(ก) (ข) (ค)

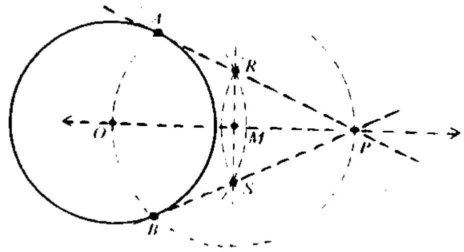
รูปที่ 1.17

บทสร้างที่ 7 การสร้างเส้นสัมผัสวงกลมและบรรจุจุดจุดหนึ่งของวงกลมได้



รูปที่ 1.18

บทสร้างที่ 8 สร้างเส้นสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้และบรรจุจุดข้างนอกของวงกลมที่กำหนดให้



จะเห็นว่ามีได้ 2 เส้น

รูปที่ 1.19

ต่อไปจะกล่าวถึง **การผกผัน** (inverse) ของจุดจุดหนึ่งเมื่อเทียบกับวงกลมที่กำหนดให้

พิจารณาวงกลมใด ๆ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด O และรัศมี $r > 0$ ถ้า A เป็นจุดใด ๆ ซึ่งอยู่บนระนาบเดียวกันกับวงกลมนั้น และแตกต่างไปจากจุดศูนย์กลาง O แล้ว จะทำให้เกิด เส้นตรง OA และรังสี $\overrightarrow{OA}$

อาจมองว่าเส้นตรง OA เปรียบเหมือนเส้นจำนวนจริง มีจุดกำเนิดที่จุด O และมีจำนวนบวกเป็นพิกัดของ A ดังนั้นบนรังสี $\overrightarrow{OA}$ มีจุด A' เพียงจุดเดียวเท่านั้นซึ่งผลคูณของ $m(\overline{OA})$ และ $m(\overline{OA'})$ เท่ากับ r^2 กล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ ถ้าจุด A มีพิกัด a แล้ว มีจุด A' เพียงจุดเดียวเท่านั้นซึ่งพิกัดเป็น $\frac{r^2}{a}$

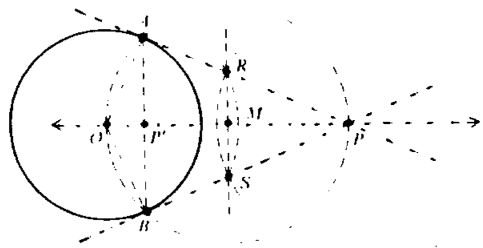
โดยทั่ว ๆ ไป จุดสองจุด B และ B' เป็น **จุดผกผัน** (inverse points) เมื่อเทียบกับวงกลมที่กำหนดให้ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด O มีรัศมี r ถ้า B' อยู่บนรังสี $\overrightarrow{OB}$ และ $[m(\overline{OB})].[m(\overline{OB'})] = r^2$

เส้นตรง p และวงกลมวงหนึ่งตั้งฉากกัน ถ้าเส้นตรง p ตัดกับวงกลมนี้อย่างน้อยหนึ่งจุดและเส้นตรง p นี้ ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดตัดนั้นด้วย

วงกลมสองวงที่ร่วมระนาบเดียวกันเป็น**วงกลมตั้งฉากกัน** (orthogonal circles) ถ้าวงกลมทั้งสองมีจุดร่วมกันอย่างน้อยหนึ่งจุดและเส้นตรงที่สัมผัสวงกลมที่จุดนี้เป็นเส้นตั้งฉาก

วงกลมตั้งฉากกันนี้ก่อให้เกิดมูลฐานสำหรับตัวแบบหนึ่งของเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก

บทสร้างที่ 9 การสร้างจุดผกผันเทียบกับวงกลมและจุดข้างนอกวงกลมที่กำหนดให้



รูปที่ 1.20

การพิสูจน์ว่า จุด P' กับจุด P เป็นจุดผกผันเมื่อเทียบกับวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด O ตามรูป 1.20 นั้น ขึ้นกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน

อาศัยบทสร้างที่ 8 สร้างเส้นสัมผัส AP และ BP จะได้ว่า

$$\Delta OAP = \Delta OBP \quad \begin{cases} O\hat{A}P \text{ และ } O\hat{B}P \text{ เป็นมุมฉาก} \\ \overline{OA} = \overline{OB} = r \\ \overline{OP} = \overline{OP} \end{cases}$$

ดังนั้น $A\hat{O}P' = A\hat{O}P$

$\overline{AP} = \overline{BP}$

และ $OP \perp \overline{AB}$ เพราะจุด O และจุด P อยู่ห่างจากจุดปลาย A และ B ของ $\overline{AB}$ เป็นระยะเท่า ๆ กัน จึงเกิดการแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง

$$\Delta OP'A \sim \Delta OAP \quad \begin{cases} A\hat{O}P' = A\hat{O}P \\ \text{และ} \\ O\hat{P}A = O\hat{A}P \end{cases}$$

เนื่องจากด้านสมนัยของสามเหลี่ยมคล้ายเป็นสัดส่วนกัน

$$\frac{m(\overline{OP'})}{m(\overline{OA})} = \frac{m(\overline{OA})}{m(\overline{OP})}$$

และเนื่องจาก $m(\overline{OA}) = r$

$[m(\overline{OP'})].[m(\overline{OP})] = r^2$ (r คือ รัศมีของวงกลมของการผกผัน)

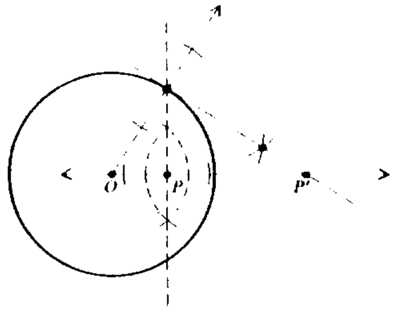
นั่นคือ P และ P' เป็นจุดผกผันเมื่อเทียบกับวงกลมที่กำหนดให้

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OAP ส่วนสูง $\overline{AP'}$ แบ่งด้านฐานออกเป็นส่วนของเส้นตรง ซึ่งแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมเป็น mean proportion ระหว่างด้านฐานกับส่วนของเส้นตรง ส่วนหนึ่งที่เกิดจากการแบ่งฐาน เช่น

$$\frac{m(\overline{OP'})}{m(\overline{OA})} = \frac{m(\overline{OA})}{m(\overline{OP})}$$

หรือเขียนว่า $[m(\overline{OP})].[m(\overline{OP'})] = [m(\overline{OA})]^2$

บทสร้างที่ 10 การสร้างจุดผกผันเมื่อเทียบกับวงกลมและจุดข้างใน ซึ่งไม่ใช่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดให้



รูปที่ 1.21

กิจกรรมการเรียนที่ 1.3

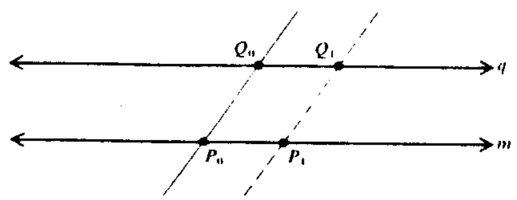
1. จงสร้างเส้นตั้งฉากกับเส้น q และผ่านจุด A ซึ่งไม่ได้อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้
2. จงสร้างเส้นตั้งฉากกับวงกลมและบรรจุ
   ก) จุดข้างนอก A
   ข) จุดข้างใน B ที่ไม่ใช่จุดศูนย์กลางของวงกลม
3. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจุดมุมทั้งสี่อยู่บนวงกลมที่กำหนดให้
4. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุในวงกลม
5. จงสร้างวงกลมที่ผ่านจุดสามจุด A,B และ C ซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จงสร้างเส้นตรงหรือวงกลมที่ตั้งฉากกับวงกลมที่กำหนดให้ และบรรจุ

1.4 เส้นจำนวน

ในเรขาคณิตระบบยุคลิด เส้นตรงใด ๆ อาจเขียนแทนด้วยเส้นจำนวนจริง แต่ละจุดมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่งเป็นพิกัดของจุด แต่ละจำนวนจริง มีจุด ๆ หนึ่งเป็นกราฟต่อไปนี้จะใช้การสร้างในหัวข้อ 1.2 ในการนิยามจุดซึ่งมีจำนวนตักยะเป็นพิกัด และจะใช้เส้นตรงเท่านั้นในการลากเส้นขนาน ซึ่งวิธีการต่างๆ เหล่านี้จะทำให้เกิดพื้นฐานของการใช้เส้นตรงและเส้นในจินตนาการเป็นการปูทางไปสู่การศึกษาเรขาคณิตสัมพรรค ในที่นี้เขียน P_n แทนจุดซึ่งมีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม

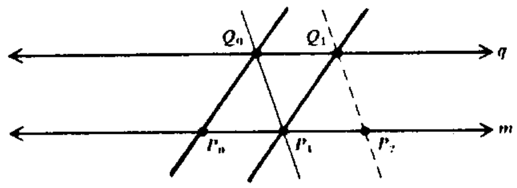
ให้ m เป็นเส้นตรงใด ๆ เลือกจุดบน m มาสองจุด คือ จุดกำเนิดซึ่งจะเรียกว่า P_0 กับอีกจุดหนึ่งเรียกว่า P_1 โดย อยู่ห่างจาก P_0 เป็นระยะ 1 หน่วย (unit point) ลากเส้น q ซึ่ง $q \neq m$ และ $q // m$

เลือกจุดใด ๆ Q บนเส้น q แล้วลาก $\overleftrightarrow{P_0Q_0}$ และลากเส้นตรง $\overleftrightarrow{P_1Q_1} // \overleftrightarrow{P_0Q_0}$ ซึ่ง Q_1 เป็นผลตัดของ q กับเส้นตรงที่บรรจุ P_1 และขนานกับ $\overleftrightarrow{P_0Q_0}$ รูป 1.22 ดังนั้นรูปสี่ด้าน $P_0P_1Q_1Q_0$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ $\overline{P_0P_1} \cong \overline{Q_0Q_1}$ เนื่องจากเป็นด้านคู่ขนานกันของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานต้องลงรอยกัน



รูป 1.22

การสร้าง P_2 บน m ทำได้โดยการสร้าง $\overleftrightarrow{P_1Q_0}$ ลากเส้นตรงที่บรรจุ Q_1 ให้ขนานกับ $\overleftrightarrow{P_1Q}$ จะได้ P_2 เป็นผลตัดของ กับเส้นตรงที่สร้างผ่าน Q_1 ดัง รูป 1.23



รูป 1.23

ทราบหรือไม่ว่า เหตุใด

$$\overline{P_1P_2} \cong \overline{Q_0Q_1}$$

$$\overline{P_1P_2} \cong \overline{P_0P_1}$$

การสร้าง P_3 (รูป 1.24) สร้างโดย

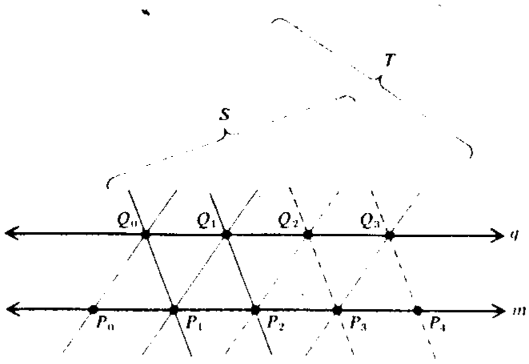
1) $\overleftrightarrow{P_2Q_2} \,//\, \overleftrightarrow{P_0Q_0}$, Q_2 บน q

2) $\overleftrightarrow{Q_2Q_3} \,//\, \overleftrightarrow{Q_0P_1}$, P_3 บน m

การสร้าง P_4 สร้างโดย

1) $\overleftrightarrow{P_3Q_3} \,//\, \overleftrightarrow{P_0Q_0}$, Q_3 บน q

2) $\overleftrightarrow{Q_3P_4} \,//\, \overleftrightarrow{Q_0P_1}$, P_4 บน m



รูป 1.24

ทำนองเดียวกันสำหรับ P_5 นั่นคือสร้าง $\overleftrightarrow{P_4Q_4}$ และ $\overleftrightarrow{Q_4P_5}$
สำหรับ P_6 สร้าง $\overleftrightarrow{P_5Q_5}$ และ $\overleftrightarrow{Q_5P_6}$
และโดยทั่ว ๆ ไปสำหรับจำนวนเต็มบวกใด ๆ
ใช้ $\overleftrightarrow{P_{n-1}Q_{n-1}}$ และ $\overleftrightarrow{Q_{n-1}P_n}$ เพื่อสร้าง P_n
ถ้าเราคิดถึงเส้นที่ขนานกับ $\overleftrightarrow{P_OQ_O}$ และมีคุณสมบัติ T ร่วมกัน เราอาจเขียน

$$P_OP_1P_2 \cdots \overset{T}{\underset{\wedge}{=}} Q_OQ_1Q_2 \cdots$$

เพื่อแสดงว่า $\overleftrightarrow{P_OP_O}$, $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$, $\overleftrightarrow{P_2P_2}$ ... มีคุณสมบัติ T ร่วมกัน นั่นคือคุณสมบัติที่ทุก ๆ เส้นขนานกับ $\overleftrightarrow{P_OQ_O}$

ในบทที่ 5 จะกล่าวถึงคุณสมบัติของ T ที่ต่างไปเล็กน้อยคือ กล่าวว่า จุด $P_O, P_1, P_2, \ldots$ เป็น perspective กับจุด $Q_O, Q_1, Q_2, \ldots$ เมื่อเทียบกับ T

เส้นตรง $\overleftrightarrow{Q_OP_1}$, $\overleftrightarrow{Q_1P_2}$, $\overleftrightarrow{Q_1P_2}$, $\overleftrightarrow{Q_2P_3}, \ldots$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{Q_OP_1}$ และอาจพิจารณาว่ามีคุณสมบัติ S (ขนานกับ $\overleftrightarrow{Q_OP_1}$) ร่วมกันแล้ว เขียนแทนด้วย

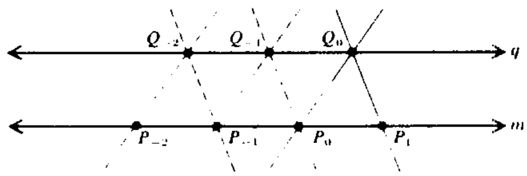
$$Q_OQ_1Q_2, \cdots \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} P_1P_2P_3 \cdots$$

และจุด $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ เป็น perspective กับ $P_1, P_2, P_3, \ldots$ เมื่อเทียบกับ S

สัญลักษณ์ที่เขียนทั้งหมดนี้คือ การสร้างทั้งหมดของ P_2, P_3 และ P_4 ในรูป 1.24 ซึ่งอาจอธิบายได้ในพจน์ของ P_i บน m, Q_i บน q และ

$$P_0P_1P_2P_3 \overset{T}{\underset{\wedge}{=}} Q_0Q_1Q_2Q_3 \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} P_1P_2P_3P_4$$

รูปทั่วไปคือ $P_n \overset{T}{\underset{\wedge}{=}} Q_n \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} P_{n+1}$



รูป 1.25

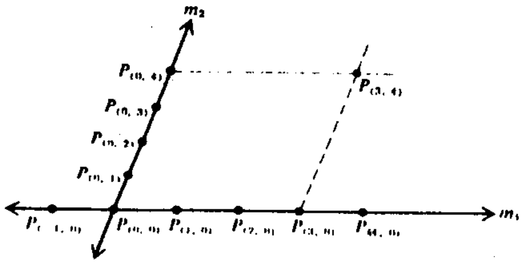
การสมนัยแบบ perspective มีคุณสมบัติสะท้อน (reflexsive) เขียนแทนด้วย

$$p_m \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} Q_{m-1} \overset{T}{\underset{\wedge}{=}} P_{m-1}$$

การสร้าง P_m สำหรับจำนวนเต็มลบใด ๆ ดังรูป 1.25 ตัวอย่างเช่น การสร้าง P_{-1} ทำได้โดย

ก) $\overleftrightarrow{P_0Q_{-1}} \mathbin{//} \overleftrightarrow{Q_0P_1}$, Q_{-1} บน q ข) $\overleftrightarrow{Q_{-1}P_{-1}} \mathbin{//} \overleftrightarrow{P_0Q_0}$, P_{-1} บน m

ค) $\overleftrightarrow{P_{-1}Q_{-2}} \mathbin{//} \overleftrightarrow{Q_0P_1}$, Q_{-2} บน q ง) $\overleftrightarrow{Q_{-2}P_{-2}} \mathbin{//} \overleftrightarrow{P_0Q_0}$, P_{-2} บน m



รูป 1.26

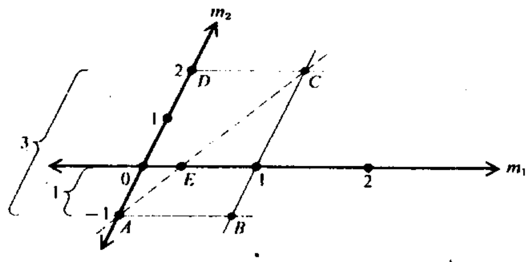
การสร้างจุดที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม (Integral points) บนเส้นจำนวนอาจถูกขยายไปถึงการสร้างจุดซึ่งมีพิกัดเป็นคู่อันดับของจำนวนเต็ม (lattice points) บนระนาบพิกัด

เริ่มด้วยเส้นจำนวนสองเส้น m_1 และ m_2 ซึ่งมีจุดกำเนิดร่วมกัน และตัดกันเป็นมุมที่เหมาะสมมุมหนึ่ง ซึ่งไม่จำเป็นว่าจะต้องเป็นมุมฉาก

เมื่อพิจารณาจุดต่าง ๆ ในระนาบพิกัดแต่ละจุด P_n บนเส้น m_1 เขียนแทนด้วย $P_{(n,0)}$ ซึ่งพิกัดของจุดนี้มี m_1 เป็นพิกัดที่หนึ่งมี m_2 เป็นพิกัดที่สองแต่ละจุด P_m บนเส้น m_2 เขียนแทนด้วย $P_{(0,m)}$ ความยาวหนึ่งหน่วยบนเส้นจำนวนสองเส้นไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน นั่นคือ $\overline{P_{(0,0)}P_{(1,0)}}$ ไม่จำเป็นต้องลงรอยกันกับ $\overline{P_{(0,0)}P_{(0,1)}}$ ดังที่แสดงในรูป 1.26

แต่ละจุด $P_{(i,k)}$ บนระนาบ อาจถูกสร้างขึ้นให้เป็นจุดที่เกิดจากการตัดกันของเส้นที่บรรจุ $P_{(i,0)}$ และขนานกับ m_2 กับเส้นตรงที่บรรจุ $P_{(0,k)}$ และขนานกับ m_1

จุด $P_{(j,k)}$ ซึ่งมีพิกัดเป็น j และ k มักเขียนแทนด้วย $P : (j,k)$



รูป 1.27

กระบวนการสร้างจุดซึ่งมีพิกัดเป็นจำนวนตักยะ (rational points) บนเส้นจำนวนใช้ในการกำหนด lattice points บนระนาบ ตัวอย่าง เช่น .

เพื่อจะสร้าง $P_{1/3}$ ทำได้โดยใช้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มีจุดยอด $A : (0,-1)$, $B : (1,-1)$, $C : (1,2)$, $D : (0,2)$; ลาก AC เขียนกำกับจุดตัดของ m_1 และ AC ว่า E และเขียนจุดกำเนิด 0 (รูป 1.27) ดังนั้น

$$OE \parallel DC,\ \Delta AOE \sim \Delta ADC \quad \text{และ}$$

$$\frac{m(\overline{OE})}{m(\overline{DC})} = \frac{m(\overline{AO})}{m(\overline{AD})}$$

เนื่องจากบน m_2 เรามี $m(\overline{AO}) = 1$ และ $m(\overline{AD}) = 3$

$$\frac{m(\overline{OE})}{m(\overline{DC})} = \frac{1}{3}$$

สังเกตว่า อัตราส่วนไม่ได้ขึ้นกับความยาวหนึ่งหน่วยบนสเกล

ในที่สุดเนื่องจาก $m(\overline{DC}) = 1$ จะได้ $m(\overline{OE}) = \frac{1}{3}$ และดังนั้น E คือ

$P_{1/3}$

เราอาจใช้จุดยอด $A : (0,-a)$, $B : (1,-a)$, $C : (1, b-a)$ และ $D(0, b-a)$ เพื่อสร้างจุดตัดยะใด ๆ $P_{a/b}$

วิธีอื่นๆ อาจใช้ได้ด้วยดังแบบฝึกหัดที่ 1.4 ข้อ 4 และข้อ 5

ในวิชาเรขาคณิตนั้นพบว่ามีการนำแนวความคิดของกลุ่ม (group) มาใช้ เพราะเป็นแนวความคิดที่สำคัญที่จะนำไปสู่การพัฒนากระบวนการนิรนัย (deductive) ของวิชาเรขาคณิตเนื่องจากสามารถใช้จำนวนเต็มและจุดบนเส้นจำนวนอธิบายให้เข้าใจความหมายของกลุ่มได้ชัดเจน จึงจะกล่าวถึงแนวคิดเกี่ยวกับกลุ่มดังนี้

เซต S ประกอบเป็น กลุ่ม ภายใต้การดำเนินการ $\otimes$ ถ้าสอดคล้องกับ

1. Closure $\otimes$: ถ้า $a \in S$ และ $b \in S$ แล้ว $a \otimes b \in S$ นั่นคือ เซต S มีคุณสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ $\otimes$
2. Associative $\otimes$: ถ้า $a \in S$, $b \in S$ และ $c \in S$ แล้ว $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
3. Identity : มีสมาชิกหนึ่งสมาชิก $i \in S$ ซึ่ง ถ้า $a \in S$ แล้ว $a \otimes i = i \otimes a = a$
4. Inverse $\otimes$: ถ้า i เป็นสมาชิกที่เรียกว่าเป็นเอกลักษณ์สำหรับ $\otimes$ และ $a \in S$ แล้ว มีสมาชิกเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น $a' \in S$ ซึ่ง $a \otimes a' = i = a' \otimes a$ นั่นคือ สมาชิกแต่ละตัว a ของเซต S มีสมาชิกที่เป็นตัวผกผันเพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ a'

ตัวอย่างของกลุ่ม เช่น เซต J ของจำนวนเต็มประกอบเป็นกลุ่มภายใต้การบวก

ถ้า a,b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว

1) $a + b \in J$ (ผลบวกของจำนวนเต็มสองจำนวนใด ๆ เป็นจำนวนเต็ม)
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$
3) $a + 0 = 0 + a = a$ (0 เป็นเอกลักษณ์)

4) ทุก ๆ จำนวนเต็ม b มีตัวผกผันของการบวกเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น คือ -b

จำนวนเต็มยังมีสมบัติว่า $a + b = b + a$ ด้วย โดยทั่วไปแล้ว ถ้าเซตประกอบเป็นกลุ่มภายใต้การดำเนินการ $\otimes$ และถ้าพบว่า กฎการสลับที่ (Commutative law) $a \otimes b = b \otimes a$ เป็นจำนวน สำหรับสมาชิกทุก ๆ ตัว a,b ของ S แล้ว เรียกกลุ่มนี้ว่า **Commutative group**

กิจกรรมการเรียนที่ 1.4

1. กำหนดจุด P_0 และ P_1 จงใช้วิธีการสร้างของหัวข้อ 1.4 สร้าง P_2, P_3, P_4 และ P_5
2. กำหนดจุด P_0 และ P_1 จงใช้วิธีการสร้างของหัวข้อ 1.4 สร้าง P_{-1}, P_{-2}, P_{-3} และ P_{-4}
3. กำหนด $P_{(0,0)}, P_{(1,0)}$ และ $P_{(0,1)}$ ให้ จงใช้เส้นจำนวน m_1 และ m_2 ดังที่อธิบายในหัวข้อ 1.4 สร้าง $P_{(1,1)}, P_{(2,1)}, P_{(1,2)}, P_{(0,3)}, P_{(3,3)}$ และ $P_{(3,4)}$
4. จงสร้าง $P_{1/5}$ แล้วใช้ P_0 และ $P_{1/5}$ และวิธีการของแบบฝึกหัด 1.4 ข้อ 1 สร้าง $P_{2/5}, P_{3/5}, P_{4/5}$ และ $P_{5/5}$
5. จงสร้าง $P_{-1/5}, P_{-2/5}, P_{-3/5}$ และ $P_{-4/5}$

ข้อ 6 - 9 จงพิจารณาว่าแต่ละเซตที่กำหนดให้นี้ ประกอบเป็นกลุ่มภายใต้การดำเนินการที่กำหนดให้หรือไม่

6. จำนวนเต็ม, การลบ
7. จำนวนตักยะบวก, การคูณ
8. จำนวนตักยะ, การหาร
9. จำนวนตักยะ, การบวก

1.5 **เส้นยุคลิด** (Euclidean line)

จากการสร้างที่กล่าวแล้วในหัวข้อ 1.4 เป็นการกำหนดความสัมพันธ์ 1 - 1 ระหว่างจำนวนตักยะและจุดตักยะบนเส้นจำนวนจริง เรียกอีกอย่างว่า **เส้นยุคลิด** และยังสามารถสร้างจุดอีกมากมายที่มีพิกัดเป็น**จำนวนอตักยะ** ในหัวข้อนี้จึงจะกล่าวถึงสมบัติบางประการของจำนวนจริง เพื่อช่วยให้ความเข้าใจเกี่ยวกับจุดบนเส้นตรงดีขึ้น

เราอาจนึกถึงจำนวนจริงใด ๆ ว่าอาจเขียนแทนได้ด้วยทศนิยมอนันต์ เช่น

$$\frac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0}$$

$$\frac{2}{3} = 0.6666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\frac{24}{11} = 2.181818\ldots = 2.\overline{18}$$

$$\sqrt{7} = 2.645\ldots \quad \text{(และไม่เวียนซ้ำ)}$$

โดยทั่วไป จำนวนตักยะใด ๆ อาจเขียนแทนด้วยทศนิยมอนันต์แบบเวียนซ้ำ

จำนวนอตักยะใด ๆ อาจเขียนแทนด้วยทศนิยมอนันต์ที่ไม่เวียนซ้ำ

พบเสมอว่าใช้เส้นยุคลิดแทนเส้นจำนวนจริงเสมอ ดังจะเห็นจากทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีคันตอร์-เดเดคินส์ (Cantor-Dedekinds Theorem)

มีการถอดแบบกันระหว่างเซตของจำนวนจริงและเซตของจุดบนเส้นตรงเส้นหนึ่งในเรขาคณิตระบบยุคลิด

การถอดแบบกันเป็นการสมนัย 1 - 1 ซึ่งทำให้นิยามจุดบนเส้นตรง โดยพิกัดของจุดและแน่นอนว่าพิกัดนั้นเป็นจำนวนจริง

เซตของจำนวนจริง R ประกอบเป็นกลุ่มการสลับที่ (commutative group) ภายใต้การบวกและมีคุณสมบัติปิดภายใต้การคูณ และเป็นไปตามกำการเปลี่ยนกลุ่มได้กับกฎการสลับที่ มีสมาชิกหนึ่งของเซตที่เรียกว่า **เอกลักษณ์** สมาชิกทุกตัวยกเว้น 0 (ซึ่งเป็นเอกลักษณ์ของการบวก) มีตัวผกผันของการคูณเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น นั่นคือ ส่วน

กลับของจำนวนนั้นนั่นเอง

สำหรับทุกจำนวนจริง a,b และ c ใน R

$a(b + c) = ab + ac$;

นั่นคือเป็นไปตามกฎของการแจกแจง สรุปคุณสมบัติของจำนวนจริงตามที่กล่าวมานี้ได้ว่า เซตของจำนวนจริงประกอบเป็นสนามการสลับที่ (commutative field)

สังเกตว่า **สนาม** ต้องเกี่ยวข้องกับการดำเนินการสองแบบ **กลุ่ม** ต้องการการดำเนินการแบบเดียว

เซตของจำนวนตักยะประกอบเป็นฟิลด์ด้วยเช่นกัน จึงมีความจำเป็นต้องพิจารณาต่อไปถึงคุณสมบัติอื่น ๆ ของจำนวนจริง

จำนวนจริงสอดคล้องกับกฎไตรวิภาค (Tricotomy law) นั่นคือ สำหรับแต่ละคู่ของจำนวนจริง a,b ความสัมพันธ์หนึ่งในสามแบบต่อไปนี้เป็นความจริง

$a < b,\ a = b,\ a > b$

คุณสมบัติของสิ่งที่มีอันดับต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับจำนวนจริง a,b และ c ;

i) ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

ii) ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$;

iii) ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

สรุปคุณสมบัติทั้งหมดโดยกล่าวว่า เซตของจำนวนจริงประกอบเป็น**สนามที่เป็นอันดับ** (ordered field)

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากเซตของจำนวนตักยะประกอบเป็นสนามที่เป็นอันดับด้วย เราต้องค้นหาต่อไปอีกว่า มีสมบัติอะไรที่ทำให้เซตของจำนวนจริงแตกต่างจากเซตของจำนวนตักยะ

พิจารณาทศนิยมอนันต์ ซึ่งเป็นค่าของ π

3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 ...

และ

ลำดับอนันต์ของจำนวนตักยะ

3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592,...

ในลำดับของจำนวนตักยะ แต่ละจำนวนมากกว่าหรือเท่ากับสมาชิกที่อยู่ข้างหน้านั่นคือ ลำดับเป็นลำดับอนันต์ที่มีค่าเพิ่มขึ้น

เช่นเดียวกัน เพราะว่าทุก ๆ จำนวนในลำดับน้อยกว่า 4 ลำดับมีขอบเขตบนมีขอบเขตต่ำสุด คือ 4 ลำดับนี้ถูกจำกัดขอบเขตบน มีขอบเขตบนต่ำสุดเป็น 4 ลำดับนี้ถูกจำกัดขอบเขตบน โดยแต่ละสมาชิกของลำดับอนันต์ที่มีค่าลดลงต่อไปนี้คือ

4, 3.2, 3.15, 3.142, 3.1416, 3.14160, 3.141593,...

พจน์แรกของลำดับอนันต์ทั้งสองต่างกันเท่ากับ 1

พจน์ที่สองของลำดับอนันต์ทั้งสองต่างกันเท่ากับ 0.1

พจน์ที่สามของลำดับอนันต์ทั้งสองต่างกันเท่ากับ 0.01

พจน์ที่สี่ ....

ขณะที่เราพิจารณา ดูเหมือนว่าเรากำลังพิจารณาจำนวนต่อไปนี้ อย่างใกล้ชิด คือ

ระหว่าง 3 กับ 4

ระหว่าง 3.1 กับ 3.2

ระหว่าง 3.14 กับ 3.15

และ ฯลฯ

เห็นได้ชัดเจนว่าลำดับทั้งสองเป็นลำดับลู่เข้า แต่มีปัญหาว่า ลิมิตของลำดับเป็นค่าเดียวกันหรือไม่พบว่าลิมิตของลำดับทั้งสองเป็นค่าเดียวกัน คือ จำนวนตักยะ π การที่ลิมิตของลำดับหาค่าได้นี้เขียนเป็นสัจพจน์ได้ว่า "ถ้าลำดับของจำนวนจริงมีขอบเขตข้างบนแล้วจะมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่งที่เป็นขอบเขตบนค่าต่ำสุด" ข้อความนี้เป็นสัจพจน์ของความต่อเนื่อง (postulate of continuity) ซึ่งทำให้เรามั่นใจว่ามีคุณสมบัติบริบูรณ์ในเซตที่สมาชิกเรียงอย่างมีอันดับ เนื่องจากตัวอย่างที่กล่าวมานี้เป็นลำดับของจำนวนตักยะ ซึ่งมีจำนวนอตักยะเป็นขอบเขตบนค่าต่ำสุดคุณสมบัติบริบูรณ์นี้เป็นสมบัติของเซตของจำนวนจริงที่ไม่ได้เป็นคุณสมบัติของเซตของจำนวนตักยะจากที่กล่าวมานี้ทำให้สรุปได้ว่า เซตของจำนวนจริงประกอบเป็น **complete order fields**

การถอดแบบกันของจำนวนจริงและจุดบนเส้นยุคลิดเป็นหลักประกันที่มั่นคงให้เราทราบว่าเส้นยุคลิดมีคุณสมบัติบริบูรณ์

กิจกรรมการเรียนที่ 1.5

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปทศนิยมรู้จบและเวียนซ้ำ

   ก) $\frac{1}{9}$

   ข) $\frac{4}{9}$

   ค) $\frac{1}{7}$

   ง) $\frac{1}{8}$

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $\frac{a}{b}$ a เป็นจำนวนเต็ม และ b เป็นจำนวนเต็ม +

   ก) $0.\overline{27}$

   ข) $0.\overline{4751}$

   ค) $8.6\overline{394}$

3. จงอธิบายเซตของจำนวนที่กำหนดให้ว่าแต่ละเซตประกอบเป็น complete ordered field หรือไม่

   ก) จำนวนเต็ม

   ข) จำนวนตักยะ

   ค) จำนวนจริง

1.6 ระนาบยุคลิดและรูปเรขาคณิต

จากการที่ได้รู้จักเส้นยุคลิด ระนาบ และปริภูมิ มาแล้วจากหัวข้อ 1.2 จุดสองจุดใด ๆ ที่ต่างกันกำหนดเส้นตรงขึ้นเส้นหนึ่ง จุดสามจุดใด ๆ ที่ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกำหนดระนาบขึ้นระนาบหนึ่ง และจุดสี่จุดใด ๆ ที่ไม่ได้อยู่ร่วมระนาบเดียวกันกำหนดปริภูมิสามมิติจุดใด ๆ บนเส้นตรงจะแบ่งเส้นตรงออกเป็นสองส่วน แต่ละส่วนเรียก **เส้นกึ่งอนันต์** (half line) จุดแบ่งนี้เป็นจุดปลายของเส้นกึ่งอนันต์ทั้งสองแต่ไม่ได้เป็นสมาชิกของเส้นใดเส้นหนึ่ง เส้นใด ๆ บนระนาบแบ่งระนาบเป็นสองบริเวณแต่ละบริเวณเรียก**กึ่งระนาบ** (half - plane) เส้นแบ่งนี้เป็นขอบร่วมกันของกึ่งระนาบทั้งสองแต่เส้นนี้ไม่ใช่เซตย่อยของแต่ละกึ่งระนาบ ระนาบใด ๆ แบ่งปริภูมิสามมิติเป็นสองส่วน แต่ละส่วนเรียก**กึ่งปริภูมิ** (half - space) ระนาบเป็นหน้าร่วมกันของกึ่งปริภูมิทั้งสองแต่ไม่ได้เป็นเซตย่อยของแต่ละกึ่งปริภูมิ

เส้นตรงสองเส้นที่ตัดกันที่จุด ๆ หนึ่งจะกำหนดระนาบขึ้นระนาบหนึ่ง เส้นตรงสองเส้นที่อยู่ร่วมระนาบเดียวกันแต่ไม่ใช่เส้นตัดกันจะเป็นเส้นขนานกัน ดังนั้นเส้นตรงสองเส้นขนานกันถ้าเส้นทั้งสองทับกันสนิทจนเป็นเส้นเดียวกัน หรือเส้นทั้งสองอยู่ร่วมระนาบกันโดยที่ไม่มีจุดใดร่วมกัน เส้นตรงสองเส้นในปริภูมิสามมิติไม่ร่วมระนาบกันเป็น**เส้นไขว้ต่างระนาบ** (skew line) ดังนั้นในปริภูมิสามมิติ เส้นตรงสองเส้นอาจ ตัดกัน ขนานกัน หรือ เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ

ระนาบสองระนาบในปริภูมิ 3 มิติอาจตัดกันหรือขนานกัน ถ้าระนาบสองระนาบตัดกันแล้วในปริภูมิสามมิติยุคลิดนั้น ระนาบสองระนาบต้องมีเส้นตรงร่วมกันอย่างน้อยหนึ่งเส้นและเนื่องจากระนาบที่ทับกันสนิทขนานกันจึงกล่าวได้ว่า ระนาบสองระนาบใด ๆ ในปริภูมิยุคลิดจะตัดกันเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งหรืออาจขนานกัน

การเกิดหรือการมีอยู่ของเส้นขนานเป็นสัจพจน์ในเรขาคณิตยุคลิดบนระนาบ เรียกสัจพจน์นี้ว่า **สัจพจน์ของการขนานกัน**

ถ้า m เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งและ P เป็นจุด ๆ หนึ่ง มีเส้นตรงเส้นเดียวเท่านั้นที่ลากผ่านจุดที่กำหนดให้ P นี้ และขนานกับเส้นตรง m

เนื่องจากเส้นตรงใด ๆ ขนานกับตัวมันเอง จุด P ที่กล่าวในสัจพจน์ของการขนานกันอาจอยู่บนเส้นตรง m ก็ได้ ดังนั้นจึงสามารถพิสูจน์ได้ว่าบนระนาบนั้นเส้นตรงสองเส้น ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรงเดียวกันย่อมขนานกัน

ในปริภูมิสามมิติ เส้นตรงสองเส้นใด ๆ ที่ตั้งฉากกับระนาบเดียวกันย่อมขนานกัน ระนาบสองระนาบใด ๆ ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรงเดียวกันย่อมขนานกัน

เมื่อพิจารณาระยะทางในพจน์ของการวัด ไม่ว่าเราจะวัดโดยใช้หน่วยการวัดใด ๆ เช่น นิ้ว ฟุต ไมล์ หรือปี ประสบการณ์ในชีวิตประจำวันชี้ให้เห็นบทบาทขั้นหลักมูลของการวัดว่า บนเส้นยุคลิด ระนาบยุคลิด หรือปริภูมิยุคลิดนั้นจำเป็นต้องใช้ความยาวหนึ่งหน่วยก่อนจะวัดระยะทาง ซึ่งก็คือความยาวของเส้นตรงจำกัดความยาวเป็นเท่าใด

โดยทั่วไปถ้า A,B และ C เป็นจุด นิยามของระยะทางสอดคล้องกับสมบัติสามประการดังนี้

1) $m(\overline{AB}) \geq 0$

2) $m(\overline{AB}) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

3) $m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) \geq m(\overline{AC})$

จากข้อความใน 3) อาจนึกถึงความรู้เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมซึ่งทราบกันดีแล้วว่าผลบวกของด้านสองด้านของสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมยาวกว่าด้านที่สาม ข้อความใน 3) เรียกว่า **กฎของอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม** (triangle inequality) การเท่ากันเกิดขึ้นเมื่อ A,B และ C อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันเท่านั้นและ $B \in \overline{AC}$

อาจสร้างระบบพิกัดขึ้น ดังหัวข้อ 1.2 บนเส้นยุคลิดใด ๆ ซึ่งแต่ละจุดมีจำนวนจริง x เป็นพิกัดของจุด และสำหรับจุดสองจุดใด ๆ A ซึ่งมีพิกัด x_1 และ B มีพิกัด x_2

$$m(\overline{AB}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

เนื่องจาก $\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$

ด้วยวิธีคล้ายกัน อาจสร้างระบบพิกัดบนระนาบยุคลิด ซึ่งแต่ละจุดมีคู่อันดับคู่หนึ่ง (x,y) ของจำนวนจริงเป็นพิกัดของจุดและสำหรับจุดสองจุดใด ๆ $P : (x_1, y_1)$

และ $Q : (x_2, y_2)$

$$m(\overline{PQ}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ทำนองเดียวกัน อาจสร้างระบบพิกัดบนปริภูมิ -3 มิติยุคลิดซึ่งแต่ละจุดมีจำนวนรูปสามสิ่งที่เป็นอันดับ (x,y,z) ของจำนวนจริงเป็นพิกัด และสำหรับจุดสองจุดใน ๆ $R : (x_1, y_1, z_1)$ และ $S : (x_2, y_2, z_2)$

$$m(\overline{RS}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

ในแต่ละกรณี สอดคล้องกับคุณสมบัติสามประการของระยะทางเซตของจุดที่กำหนดให้บนระนาบอยู่ห่างจากจุดที่กำหนด $O:(h,k)$ เป็นระยะทาง r หน่วย คือวงกลม

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

มีจุดศูนย์กลาง (h,k) และรัศมี r

ในปริภูมิ 3 มิติ เซตของจุดที่อยู่ห่างจากจุด $O : (h,k,l)$ เป็นระยะ r หน่วย คือทรงกลม

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

มีจุดศูนย์กลาง (h,k,l) มีรัศมี r

รูปเรขาคณิตอาจแทนด้วย เส้นพิกัด ระนาบพิกัด หรือปริภูมิพิกัดในกรณีที่พิกัดถูกใช้ในการพิสูจน์สมบัติของรูปเรขาคณิตเริ่มแรกด้วยการพิจารณาจุดกึ่งกลางส่วนของเส้นตรงที่จำกัดความยาว จากนั้นให้ตัวอย่างของการนำพิกัดไปพิสูจน์ข้อความส่วนของเส้นตรงที่จำกัดความยาว $\overline{AB}$ มีจุดกึ่งกลางเพียงจุดเดียวเท่านั้น นั่นคือจุด M ซึ่ง $M \in \overline{AB}$ และ $m(\overline{AM}) = m(\overline{MB})$

นิยามของระยะทางอาจใช้ในการพิสูจน์ว่า

"บนเส้นตรงเส้นหนึ่งถ้า A มีพิกัด x_1 และ B มีพิกัด x_2 แล้วจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ มีพิกัดเป็น $\frac{x_1 + x_2}{2}$;

บนระนาบระนาบหนึ่ง ถ้า $P : (x_1, y_1)$ และ $Q = (x_2, y_2)$ แล้วจุด

กึ่งกลางของ $\overline{PQ}$ มีพิกัด $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$;

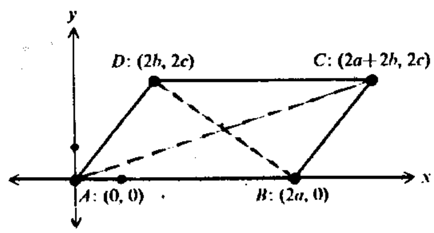
ในปริภูมิ ถ้า $R : (x_1, y_1, z_1)$ และ $S : (x_2, y_2, z_2)$ แล้วจุดกึ่งกลางของ $\overline{RS}$ มีพิกัด $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

การศึกษาเรื่องราวของเรขาคณิตวิเคราะห์ นิยามเส้นร่วมระนาบสองเส้นว่าเป็นเส้นขนาน ถ้าเส้นเหล่านี้มีความชันเป็นค่าเดียวกัน ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว เส้นที่กำหนดโดยจุดสองจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) มีความชัน $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

เส้นตรงซึ่งบรรจุจุดสองจุดที่มีพิกัดของ y เป็นค่าเดียวกันจะขนานกับแกน x
เส้นตรงซึ่งบรรจุจุดสองจุดที่มีพิกัดของ x เป็นค่าเดียวกันจะขนานกับแกน y

ตัวอย่าง จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตัดกันและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

วิธีทำ กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีจุดยอดที่ $A : (0,0)$, $B : (2a,0)$, $C : (2a + 2b, 2c)$ และ $D : (2b,2c)$ บนระนาบพิกัดแล้ว จุดกึ่งกลางของ $\overline{BD}$ มีพิกัด $(a + b, c)$; เส้นทแยงมุมสองเส้นมีจุดกึ่งกลางเป็นจุดเดียวกันและต้องแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



รูป 1.28

กิจกรรมการเรียนที่ 1.6

1. จงหา
   ก. ความยาว
   ข. จุดกึ่งกลางของเส้นตรงจำกัดซึ่งมีจุดปลายที่
      1) 2 และ 8
      2) (1,3) และ (5,5)
      3) (4,-1) และ (8,9)
      4) (1,3,4) และ (5,6,-2)

2. จงเขียนรูปบนระนาบพิกัด และจงพิสูจน์ว่า
   2.1 จุดกึ่งกลางของส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอยู่ห่างจากจุดยอดทั้งสามเป็นระยะเท่า ๆ กัน
   2.2 เส้นจำกัดความยาวที่เชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมจะขนานกับด้านที่สาม และมีความยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม
   2.3 เส้นจำกัดความยาวที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ จะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

1.7 การแปลง (Transformations)

ความสัมพันธ์ของจำนวนจริงกับจุดบนเส้นยุคลิดเป็นการส่ง (mapping) ของเซตของจำนวนจริงไปทั่วถึงเซตของจุดบนเส้นตรง ต่อไปนี้จะพิจารณาการส่งเซตของจุดบนเส้นตรงเส้นหนึ่งไปทั่วถึงตัวของมันเอง โดยจะใช้พิกัดในการกำหนดลักษณะการจับคู่ของจุด

สมมติว่าแต่ละจุด P_x ส่งไปบนจุดที่สมนัยกัน P_{x+3} อาจสร้างมโนภาพของการส่งนี้ว่าเป็นการเลื่อนของจุดไปทางขวาสามหน่วย และใช้สมการ

$$x' = x + 3$$

อธิบายการส่งของจุด P_x ไปบนจุด $P_{x'}$, ซึ่ง $x' = x + 3$

เนื่องจากแต่ละจุดของเส้นตรงสมนัยกับแต่ละจุดบนเส้นตรงได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น จึงเป็นการส่งแบบ 1 - 1 ของเส้นตรงไปทั่วถึงตัวของมันเอง การส่งแบบนี้เรียกว่าการแปลงของเส้นตรงไปทั่วถึงตัวของมันเอง เรื่องราวของการแปลงมีบทบาทอย่างยิ่งต่อการศึกษาเรขาคณิตเพราะการศึกษาเรขาคณิตนั้นจะต้องมุ่งความสนใจไปที่จุดซึ่งสมนัยกับตัวมันเองที่เรียกว่า **จุดยืนยง** (invariant point) กับคุณสมบัติว่าระยะทาง พื้นที่และขนาดของมุมยังคงค่าไม่เปลี่ยนไปภายใต้การแปลง

การแปลงซึ่งมีสมการเป็น $x' = x + 3$ เป็นสมาชิกของเซตของการแปลงซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$x' = x + b$$

สำหรับจำนวนจริงบางจำนวน b การแปลงใด ๆ ของเส้นตรงไปทั่วถึงตัวของมันเองซึ่งแสดงในรูป $x' = x + b$ เป็น**การเลื่อนทางขนาน** (Translation) ของเส้นตรงไปทั่วถึงตัวของมันเอง

พิจารณาการเลื่อน $x' = x + 3$ ถ้าจุดจุดหนึ่ง P_x สมนัยกับตัวเอง เราต้องการ $P_{x'} = P_x$, $x' = x$ และ ดังนั้น $x = x + 3$

จะเห็นว่าไม่มีค่า x ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x = x + 3$ จึงไม่มีจุดยืนยงภายใต้การเลื่อนทางขนาน $x' = x + b$ มีพิกัด $x' = x$ และ $x = x + b$

การเลื่อนทางขนานของเส้นยุคลิดไปทั่วถึงตัวของมันเองมีจุดยืนยงก็ต่อเมื่อ $b = 0$ ในกรณีนี้การเลื่อนมีสมการเป็น

$$x' = x$$

ทุก ๆ จุดคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลง เรียกการแปลงนี้ว่า การแปลงเอกลักษณ์ (identity transformation) สังเกตว่าการเลื่อนทางขนานเป็นแบบพิเศษของการแปลง การแปลงเอกลักษณ์เป็นแบบพิเศษของทั้งการแปลงและการเลื่อนทางขนาน

การเลื่อนทางขนานที่มีสมการเป็น $x' = x + b$ นั้นระยะทางยังคงเดิมเพราะ

$m(\overline{P_{r'}P_{s'}}) = |(r + b) - (s + b)| = |r - s| = m(\overline{P_r P_s})$

อันดับในทิศทางตามเส้นตรงยังคงเดิมภายใต้การเลื่อนทางขนานด้วยสมการ $x' = x + b$ เนื่องจาก ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว

$$x_1 + b < x_2 + b$$

และ $$x_1' < x_2'$$

อาจพิจารณาว่าการแปลงเป็นสมาชิกของระบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีการดำเนินการที่ต่อเนื่องกัน เช่น

การเลื่อนทางขนาน $T_1 = x' = x + a$

$T_2 = x' = x + b$

$T_3 = x' = x + c$

อาจเขียนแทนในรูปของ

$$x \xrightarrow{T_1} x + a$$

(อ่านว่า x ถูกส่งภายใต้ T_1 ไปยัง $x + a$)

$$x \xrightarrow{T_2} x + b$$

$$x \xrightarrow{T_3} x + c$$

สังเกตว่าสัญกรณ์รูป $f(x)$ นี้และสัญลักษณ์ x ใช้แทนสมาชิกที่ถูกแปลงไป การแปลงต่อจาก T_1 คือการแปลง T_2 อาจแทนด้วย

$$x \xrightarrow{T_1} x + a \xrightarrow{T_2} (x + a) + b = x + (a + b)$$

เนื่องจากผลบวกของ $a + b$ ของจำนวนจริงสองจำนวนเป็นจำนวนจริงค่าหนึ่ง

$$x \longrightarrow x + (a + b)$$

เป็นการแปลงในรูป $x' = x + b$ ซึ่งก็คือการเลื่อนทางขนานนั่นเอง มีสัญกรณ์อื่น ๆ ที่นิยมใช้ในเรื่องการแปลงเช่น อาจแทน T_1 ด้วย

$$T_1(x) = x + a$$