บทที่ 4
บูลีนริง
(Boolean ring)

4.1 บูลีนริง

นิยาม

ในพีชคณิตบูลีน β เรานิยามการ + ของผลต่างสมมาตร ดังนี้

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

$\forall\, x, y \in \beta$

ทฤษฎี 4.1

> สำหรับ x, y ใด ๆ ในพีชคณิตบูลีน การ $+$ มีคุณสมบัติต่อไปนี้
>
> 1. $x + y = y + x$
> 2. $x + 0 = x$
> 3. $x + x' = 1$
> 4. $x + (y + z) = (x + y) + z$
> 5. $x \wedge (y + z) = (x \wedge y) + (x \wedge z)$
> 6. $x + x = 0$
> 7. $x + y = x + z \rightarrow y = z$
> 8. $1 + x = x'$
> 9. $x + y = z \rightarrow y = x + z$
> 10. $x = z \longleftrightarrow x + z = 0$

พิสูจน์ ข้อ 1 $x + y = y + x$

$\because \quad x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$

และ $y + x = (y \wedge x') \vee (y' \wedge x)$

$= (y' \wedge x) \vee (y \wedge x')$

$= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$

$\therefore \quad x + y = y + x$

พิสูจน์ ข้อ 2 $x + 0 = x$

$$\because \; x + 0 = (x \wedge 0') \vee (x' \wedge 0)$$
$$= (x \wedge 1) \vee 0$$
$$= x \wedge 1$$
$$= x$$

พิสูจน์ ข้อ 3 $x + x' = 1$

$$\because \; x + x' = (x + (x')') \vee (x' \wedge x')$$
$$= (x \wedge x) \vee x'$$
$$= x \vee x'$$
$$= 1$$

พิสูจน์ ข้อ 4 $x + (y + z) = (x + y) + z$

$$x + (y + z) = x + ((y \wedge z') \vee (y' \wedge z))$$
$$= (x \wedge ((y \wedge z') \vee (y' \wedge z))')$$
$$\vee (x' \wedge (y \wedge z') \vee (y' \wedge z)))$$
$$= (x \wedge (y \wedge z')' \wedge (y' \wedge z)')$$
$$\vee (x' \wedge ((y \wedge z') \vee (y' \wedge z)))$$
$$= (x \wedge (y' \vee z) \wedge (y \vee z'))$$
$$\vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z)$$
$$= (x \wedge ((y' \vee z) \wedge y) \vee ((y' \vee z) \wedge z'))$$
$$\vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z)$$
$$= (x \wedge ((y' \wedge y) \vee (z \wedge y)) \vee ((y' \wedge z')$$
$$\vee (z \wedge z')) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z)$$
$$= (x \wedge (z \wedge y) \vee (y' \wedge z')) \vee (x' \wedge y \wedge z')$$
$$\vee (x' \wedge y' \wedge z)$$

$= (x \wedge (y' \wedge z') \vee (y \wedge z)) \vee (x' \wedge y \wedge z')$

$\vee (x' \wedge y' \wedge z)$

$= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z')$

$\vee (x' \wedge y' \wedge z)$ .....(*)

RS $(x + y) + z = z + (x + y)$

แทนค่า $z = x$, $x = y$ และ $y = z$ ลงใน (*) จะได้

$z + (x + y) = (z \wedge x' \wedge y') \vee (z \wedge x \wedge y) \vee (z' \wedge x \wedge y')$

$\vee (z' \wedge x' \wedge y)$

$= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z')$

$\vee (x' \wedge y' \wedge z)$

$= x + (y + z)$

$\therefore (x + y) + z = x + (y + z)$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 5 $x \wedge (y + z) = (x \wedge y) + (x \wedge z)$

$\therefore x \wedge (y + z) = x \wedge ((y \wedge z') \vee (y' \wedge z))$

$= (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z)$

$(x \wedge y) + (x \wedge z) = ((x \wedge y) \wedge (x \wedge z)') \vee ((x \wedge y)'$

$\wedge (x \wedge z))$

$= ((x \wedge y) \wedge (x' \vee z')) \vee ((x' \vee y')$

$\wedge (x \wedge z))$

$= (y \wedge (x \wedge (x' \vee z'))) \vee (((x' \vee y') \wedge x)$

$\wedge z)$

$= (y \wedge ((x \wedge x') \vee (x \wedge z'))) \vee (((x' \wedge x)$

$\vee (y' \wedge x)) \wedge z)$

$$= (y \wedge x \wedge z') \vee (y' \wedge x \wedge z)$$

$$= (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z)$$

$$\therefore\ x \wedge (y + z) = (x \wedge y) + (x \wedge z)$$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 6 $x + x = 0$

$$x + x = (x \wedge x') \vee (x' \wedge x)$$

$$= 0 \vee 0$$

$$= 0$$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 7 $x + y = x + z \rightarrow y = z$

สมมติ $x + y = x + z$

$$\therefore\ x + (x + y) = x + (x + z)$$

$$(x + x) + y = (x + x) + z$$

$$0 + y = 0 + z$$

$$y = z$$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 8 $1 + x = x'$

จากข้อ 3

$$x + x' = 1$$

$$x + (x + x') = x + 1$$

$$(x + x) + x' = x + 1$$

$$0 + x' = x + 1$$

$$x' = 1 + x$$

พิสูจน์ ข้อ 9 $x + y = z \longrightarrow y = x + z$

$$x + y = z$$

$$\therefore x + (x + y) = x + z$$

$$(x + x) + y = x + z$$

$$0 + y = x + z$$

$$y = x + z$$

พิสูจน์ ข้อ 10 $x = z \leftrightarrow x + z = 0$

$\Leftarrow$ จากข้อ 9

$x + y = z \rightarrow y = x + z$ .....(*)

แทน $y = 0$ ใน (*) จะได้

$$x + 0 = z \rightarrow 0 = x + z$$

ถ้า สลับที่ y และ z ใน (*) และให้ $y = 0$ จะได้

$$x + z = 0 \rightarrow x = z$$

$\Rightarrow$ สมมติ $x = z$

$$x + z = z + z$$

$$x + z = 0$$

ช.ต.พ.

นิยาม

จะเรียก $\mathbb{R} = (R, +, \times, 0)$ ว่าริงเมื่อ R เป็นเซตใด ๆ ที่ $0 \in R$ และไบนารีโอเปอเรชัน $+$ และ $\times$ บน R สอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $(\ (x + y) = y + z$
3. $x + 0 = x$
4. สำหรับแต่ละ $x \in R$ จะมี $(-x) \in R$ และเป็นตัวเดียวเท่านั้นที่ $x + (-x) = 0$
5. $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
6. $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$
7. $(y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x)$

   $\forall\, x, y, z \in R$

นิยาม

จะเรียกริง $\mathbb{R}$ ว่าคอมมิวเททีฟริง (commutative ring) ก็ต่อเมื่อ $x \times y = y \times x \quad \forall x, y \in R$

นิยาม

> จะเรียกริง $\mathbb{R}$ ว่า ริงที่มียูนิต (*ring with unit*)
> ก็ต่อเมื่อมีอีลีเมนต์ $1 \in R$ ซึ่ง $x \times 1 = 1 \times x = x$
> $\forall\, x \in R$

นิยาม

> จะเรียกริง $\mathbb{R} = (R, +, \times, 0)$ ว่าบูลีนริง
> ก็ต่อเมื่อ $x^2 = x \quad \forall\, x \in R$

$(x^2 = x \times x)$

<u>ทฤษฎี</u> 4.2

> ถ้า $\mathbb{R} = (R, +, \times, 0)$ เป็นบูลีนริง
>
> 1. $x + x = 0$
> 2. $x = -x$
> 3. $x + y = 0 \leftrightarrow x = y$
> 4. $x \times y = y \times x$
>
> $\forall\, x, y \in R$

<u>พิสูจน์</u>

ก่อนอื่นเราควรจะสังเกตกันก่อนว่าสำหรับริงใด ๆ กฎแคนเซเรชัน

(Cancellation law) $x + y = x + z \rightarrow y = z$

เป็นจริงบนริงใด ๆ เพราะ

ถ้า $x + y = x + z$ แล้ว

$(-x) + (x + y) = (-x) + (x + z)$

$((-x) + x) + y = ((-x) + x) + z$

$0 + y = 0 + z$

$y = z$

จากกฎนี้ทำให้เราได้ต่อมาว่า

$$x = x + z \rightarrow z = 0 \qquad \ldots\ldots(*)$$

เพราะถ้า $x = x + z$ แล้ว

$x + 0 = x + z$

โดยกฎแคนเซเรชัน

$0 = z$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 1 $x + x = 0$

$\therefore x + x = (x + x) \times (x + x)$

$= x^2 + x^2 + x^2 + x^2$

$= (x + x) + (x + x)$

จาก $(*)$ ได้ว่า

$x + x = 0$

พิสูจน์ ข้อ 2

$$x = -x$$

$$x + x = 0$$

$$(-x) + (x + x) = (-x) + 0$$

$$((-x) + x) + x = -x + 0$$

$$0 + x = 0$$

$$x = -x$$

พิสูจน์ ข้อ 3 $x + y = 0 \longleftrightarrow x = y$

$\Longrightarrow$ ถ้า $x + y = 0$

แต่ $x + x = 0$ จากข้อ 1

$$x + y = x + x$$

$$y = x$$

$\Longleftarrow$ ถ้า $x = y$

$$x + y = y + y$$

$$x + y = 0$$

พิสูจน์ ข้อ 4 $x \times y = y \times x$

$\because$ $x + y = (x + y) \times (x + y)$

$$= x^2 + (x \times y) + (y \times x) + y^2$$

$$= x + (x \times y) + (y \times x) + y$$

$$= (x + y) + ((x \times y) + (y \times x))$$

โดย $(*)$ ได้ว่า

$$0 = (x \times y) + (y \times x)$$

$$(x \times y) = (y \times x)$$

ช.ต.พ.

<u>ทฤษฎี</u> 4.3

> ให้ $\mathbb{R} = (R, +, \times, 0)$ เป็นบูลีนริงที่มียูนิต $1 \neq 0$
>
> ถ้ากำหนด $x' = 1 + x$
>
> $x \wedge y = x \times y$
>
> $x \vee y = x + y + (x \times y)$
>
> แล้ว $\beta = (R, \wedge, \vee, ', 0)$ เป็นพีชคณิตบูลีน

<u>พิสูจน์</u> ในการพิสูจน์เราจะต้องแสดงว่าโอเปอเรชันที่กำหนดบน R ดังทฤษฎีสอดคล้องคุณสมบัติของ พีชคณิตบูลีนทั้ง 5 ข้อ คือ

1) กฎการสลับที่

$$\because\ x \vee y = x + y + (x \times y)$$
$$= y + x + (y \times x)$$
$$= y \vee x$$

และเพราะ $\mathbb{R}$ เป็นบูลีนริง ดังนั้นโดยข้อ 4 ของทฤษฎี 4.2 ได้ว่า

$$x \times y = y \times x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$

2) กฎการจัดหมู่

$$x \wedge (y \wedge z) = x \wedge (y \times z)$$
$$= x \times (y \times z)$$
$$= (x \times y) \times z$$
$$= (x \wedge y) \wedge z$$

$$x \vee (y \vee z) = x \vee (y + z + (y \times z))$$

$$= x + ((y + z)\ t\ (y + z)) + x \times (y + z + (y \times z)$$

$$= (x\ t\ (y\ t\ z)) + (y\ t\ z)\ t\ (x \times y) + (x \times z) +$$

$$(x \times y \times z)$$

$$= ((x + y) + z) + (x \times y) + (x \times z) + (y \times z) +$$

$$(x \times y \times z)$$

$$= (x + y + (x \times y)) + z + (x + y + (x \times y)) \times z$$

$$= (x + y + (x + y)) \vee z$$

$$= (x \vee y) \vee z$$

3. กฎการกระจาย

$$x \wedge (y \vee z) = x \times (y + z + (y \times z))$$

$$= (x \times y) + (x \times z) + (x \times y \times z)$$

และ $(x \wedge y)\ u\ (x \wedge z) = (x \times y) + (x \times z)\ t\ ((x \times y) \times (x \times z))$

$$= (x \times y) + (x \times z)\ t\ (x \times y \times z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = x \vee (y \times z)$$

$$= x + (y \times z) + (x \times y \times z)$$

และ $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = ((x \vee y)\ A\ x) \vee ((x \vee y) \wedge z)$

$$= ((x \wedge x) \vee (y \wedge x)) \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$$

$$= (x \vee (y \wedge x)) \vee (x \wedge z) \vee (y \vee z)$$

$$= (x \vee (y \times x)) \vee ((x \times z) \vee (y \times z))$$

$$= (x + (x \times y)\ t\ (x \times x \times y)$$

$$\vee ((x \times z)\ t\ (y \times z)\ t\ (x \times y \times z^2)$$

$$= (x + (x \times y) + (x \times y))$$

$$\vee ((x \times z) + (y \times z) + (x \times y \times z)$$

$$= x \vee ((x \times z) + (y \times z) + (x \times y \times z))$$

$$= x + ((x \times z) + (y \times z) + (x \times y \times z)))$$

$$+ ((x \times (x \times z) + (x \times (y \times z)$$

$$+ (x \times (x \times y \times z))$$

$$= x + (x \times z) + (y \times z) + (x \times y \times z) + (x \times z)$$

$$(x \times y \times z) + (x \times y \times z)$$

$$= x + (y \times z) + (x \times y \times z) + ((x \times z) + (x \times z))$$

$$((x \times y \times z) + (x \times y \times z))$$

$$= x + (y + z) + (x \times y \times z)$$

$\therefore\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

4. R มีสมาชิก 0 และ 1

$\because\ x \wedge 0 = x \times 0$

$$= x \times (0 + 0)$$

$$= (x \times 0) + (x \times 0)$$

$$= 0$$

$\because\ x \vee 0 = x + 0 + (x \times 0)$

$$= x + 0 + 0$$

$$= x$$

$x \wedge 1 = x \times 1$

แต่ 1 เป็นยูนิตใน $\mathbb{R}$ ดังนั้นโดยนิยามของยูนิต

$$x \times 1 = x$$

$$\therefore \; x \wedge 1 = x$$

$$\begin{aligned}
x \vee 1 &= x + 1 + (x \times 1) \\
&= x + 1 + x \\
&= (x + x) + 1 \\
&= 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \wedge x' &= x \times (1 + x) \\
&= (x \times 1) + (x \times x) \\
&= x + x \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \vee x' &= x + (1 + x) + x \times (1 + x) \\
&= (x + x) + 1 + (x \times 1) + (x \times x) \\
&= 0 + 1 + (x + x) \\
&= 1 + 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

5. $0 \neq 1$

โจทย์กำหนดมาให้ <u>ข.ต.พ.</u>

4.2 พีชคณิตไบรน์ *(Byrne Algebra)*

นิยาม

พีชคณิตไบรน์คือ $(B, \wedge, {}', 0)$ โดยที่ B เป็นเซทใด ๆ ที่ $0 \in B$ $\wedge$, เป็นไบนารีโอเปอเรชันบน B, $'$ เป็นซิงกูลารีโอเปอเรชันบน B ซึ่งสอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

B_1 $x \wedge y = y \wedge x$

B_2 $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

B_3 $x \wedge x = x$

B_4 $x \wedge y' = 0 \longleftrightarrow x \wedge y = x$

B_5 $0 \neq 0'$

นิยาม

กำหนด

1 แทน $0'$

$x \vee y$ แทน $(x' \wedge y')'$

$x \leqslant y$ แทน $x \wedge y = x$

จากที่เราได้พิสูจน์มาแล้วในหัวข้อก่อน ๆ ทำให้ได้ผลตามมาว่าสำหรับพีชคณิตบูลีน $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ ใด ๆ $(B, \wedge, ', 0)$ เป็นพีชคณิตไบรน์

ทฤษฎี 4.4

สำหรับพีชคณิตไบรน์ $(B, \wedge, ', 0)$ ใด ๆ $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ เป็นพีชคณิตบูลีน โดยที่ $\vee$ และ 1 กำหนดตามนิยามข้างต้นและมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $x \wedge x' = 0$
2. $x \wedge y' = 0 \longleftrightarrow x \leq y$
3. $x \leq x$
4. $x \leq y \;\&\; y \leq x \rightarrow x = y$
5. $x \leq y \;\&\; y \leq z \rightarrow x \leq z$
6. $x \wedge y \leq x$
7. $x \wedge 0 = 0$
8. $x'' = x$
9. $x \wedge y = (x' \vee y')'$
10. $x \vee y = y \vee x$
11. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
12. $x \vee x = x$
13. $x \leq y \longleftrightarrow y' \leq x'$
14. $x \vee y' = 1 \longleftrightarrow x \vee y = x$
15. $x \leq y \longleftrightarrow x \vee y = y$

16. $x \wedge 1 = x$

17. $x \vee 0 = x$

18. $x \vee x' = 1$

19. $x \leqslant x \vee y$

20. $x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$

21. $x \leqslant y \rightarrow (x \wedge z \leqslant y \wedge z \ \& \ x \vee z \leqslant y \vee z)$

22. $(x \leqslant z \ \& \ y \leqslant z) \rightarrow x \vee y \leqslant z$

23. $(z \leqslant x \ \& \ z \leqslant y) \rightarrow z \leqslant x \wedge y$

24. $x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y$

25. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

26. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

พิสูจน์ ข้อ 1 $x \wedge x' = 0$

$\because x \wedge x = x$

ดังนั้นโดยเงื่อนไขของพีชคณิตบูลข้อ 4

$x \wedge x' = 0$

พิสูจน์ ข้อ 2 $x \wedge y' = 0 \leftrightarrow x \leqslant y$

สมมติ $x \wedge y' = 0$

$\therefore x \wedge y = x$ โดย $B4$

$x \leqslant y$

สมมติ $x \leqslant y$

$x \wedge y = x$

$x \wedge y' = 0$ โดย $B4$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 3 $\quad x \leqslant x$

$$\because \quad x \wedge x = x$$

$$\therefore \quad x < x$$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 4 $\quad x \leqslant y \;\&\; y \leqslant x \rightarrow x = y$

สมมติ $\quad x \leqslant y \;\&\; y \leqslant x$

$x \wedge y = x$ และ $y \wedge x = y$

แต่ $\quad x \wedge y = y \wedge x$

$$\therefore \quad x = y$$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 5 $\quad x \leqslant y \;\&\; y \leqslant z \rightarrow x \leqslant z$

สมมติ $\quad x \leqslant y \;\&\; y \leqslant z$

$x \wedge y = x$ และ $y \wedge z = y$

$$\because \quad x \wedge y = x$$

$$x \wedge (y \wedge z) = x$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x$$

$$x \wedge z = x$$

$$x \leqslant z$$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 6 $\quad x \wedge y \leqslant x$

$$(x \wedge y) \wedge x = (x \wedge x) \wedge y$$

$$= x \wedge y$$

$$x \wedge y \leqslant x$$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 7 $x \wedge 0 = 0$

$\because \quad x \wedge 0 = x \wedge (x \wedge x')$

$= (x \wedge x) \wedge x'$

$= x \wedge x'$

$= 0$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 8 $x'' = x$

$\because \quad x'' \wedge x' = x' \wedge x'' = 0$

ดังนั้น โดยข้อ 2 ได้ว่า

$x'' \leqslant x$ .....(1)

โดยวิธีเดียวกันจะได้

$x''' \leqslant x'$ .....(2)

และ $x'''' \leqslant x''$ .....(3)

จาก (1) และ (3) โดยข้อ 5 จะได้

$x'''' \leqslant x$

$x'''' \wedge x = 0$ โดยข้อ 2

$x' \leqslant x'''$ โดยข้อ 2

จาก (2) และ (3) โดยข้อ 4 จะได้

$x' = x'''$

$x \wedge x''' = 0$ โดยข้อ 1

$x \leqslant x''$ โดยข้อ 2 ....(4)

จาก (1) และ (4) โดยข้อ 4 จะได้

$x'' = x$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 9 $x \wedge y = (x' \vee y')'$

$\because x' \vee y' = (x'' \wedge y'')'$

$= (x \wedge y)'$

ดังนั้น $(x' \vee y')' = (x \wedge y)'' = (x \wedge y)$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 10 $x \vee y = y \vee x$

$\because x \vee y = (x' \wedge y')'$

$= (y' \wedge x')'$

$= (y \vee x)$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 11 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$\because x \vee (y \vee z) = (x' \wedge (y' \wedge z')'')'$

$= (x' \wedge (y' \wedge z'))'$

และ $(x \vee y) \vee z = z \vee (x \vee y)$

$= (z' \wedge (x' \wedge y'))'$

$= (x' \wedge (y' \wedge z'))'$

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 12 $x \vee x = x$

$\because x \vee x = (x' \wedge x')'$

$= x''$

$= x$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 13 $x \leqslant y \longleftrightarrow y' \leqslant x'$

สมมติ $x \leqslant y$

$x \wedge y' = 0$ โดยข้อ 2

$y' \wedge x'' = 0$

y’ 4.x’ โดยข้อ 2

สมมติ y ’ $\leqslant x'$

$x'' \leqslant$ y ”

$x \leqslant y$

<u>พิสูจน์ข้อ</u> ข้อ 14 $x \vee y' = 1 \longleftrightarrow x \vee y = x$

จากข้อ 13 $x \leqslant y \longleftrightarrow y' \leqslant x'$

ดังนั้น $x' \wedge y = 0' \longleftrightarrow x' \wedge y' = x'$

$(x' \wedge y)' = 0' \longleftrightarrow (x' \wedge y')' = x''$

$x \vee y' = 1 \longleftrightarrow x \vee y = x$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 15 ข้ $x \leqslant y \longleftrightarrow x \vee y = y$

$\because x \leqslant y \longleftrightarrow y' \leqslant x'$

$\longleftrightarrow y' \wedge x' = y'$

$\longleftrightarrow (y' \wedge x')' = y''$

$\longleftrightarrow x \vee y = y$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 16 $x \wedge 1 = x$

$\because x' \wedge 0 = 0$

0 $\leqslant$ x’

X $\leqslant 1$ โดยข้อ 13

$\therefore x \wedge 1 = x$

พิสูจน์ ข้อ 21 $x \leq y \rightarrow (x \wedge z \leq y \wedge z \;\&\; x \vee z \leq y \vee z)$

สมมติ $x \leq y$

$x \wedge y = x$

$\therefore (x \wedge z) \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$= x \wedge z$

$x \wedge z \leq y \wedge z$

และ $x \leq y$

$x \vee y = y$

$\therefore (x \vee z) \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$= y \vee z$

$x \vee z \leq y \vee z$

พิสูจน์ ข้อ 22 $(x \leq z \;\&\; y \leq z) \rightarrow x \vee y \leq z$

สมมติ $x \leq z \;\&\; y \leq z$

$x \vee z = z \;,\; y \vee z = z$

$z = z \vee x$

$= z \vee y$

$z \vee (x \vee y) = z \vee (x \vee y)$

$(x \vee y) \vee z = (z \vee x) \vee y$

$= z \vee y$

$= z$

$x \vee y \leq z$

4.3 ไอเดียล *(Ideals)*

นิยาม

> ไอเดียล *(Ideal)* ของพีชคณิตบูลีน
>
> $\beta = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$
>
> คือ $\Phi \neq J \subsetneq B$ ซึ่งสอดคล้องคุณสมบัติ
>
> 1. $(x \in J \ \&\ y \in J) \rightarrow x \vee y \in J$
> 2. $(x \in J \ \&\ y \in B) \rightarrow x \wedge y \in J$

$2'$ $(x \in J) \ \&\ y \leq x) \rightarrow y \in J$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.3.1

$\{0\}$ เป็นไอเดียล

B เป็นไอเดียลโดยตัวมันเอง

ข้อสังเกต 1. คุณสมบัติข้อ 2 ในนิยามสมมูลกับ ข้อ $2'$ เพราะว่า

สมมติ (2) จริง

นั่นคือ $(x \in J$ และ $y \in B) \rightarrow x \wedge y \in J$

ให้ $x \in J$ และ $y \leq x$ แล้ว

$y = x \wedge y \in J$

$y \in J$

สมมติ $(2')$ จริง

นั่นคือ $(x \in J$ และ $y \leq x) \rightarrow y \in J$

ให้ $x \in J$ และ $y \in B$

เพราะว่า $x \wedge y \leqslant x$

$\therefore y \leqslant x$

$\therefore y \in J$ โดย $2'$

ซ.ต.พ.

2. 0 เป็นสมาชิกของทุก ๆ ไอเดียลเพราะ $0 \leqslant x \quad \forall x \in B$

นิยาม

ทุก ๆ ไอเดียล J ของ B ที่ $J \neq B$ เรียก J ว่าพรอพเพอร์ไอเดียล (Proper ideal) $\{0\}$ เป็นพรอพเพอร์ไอเดียลด้วย

ข้อสังเกต ไอเดียล J จะเป็นพรอพเพอร์ไอเดียลก็ต่อเมื่อ $1 \notin J$ เพราะถ้า $1 \in J$ แล้ว $J \subset B$

ในทางกลับกัน

ถ้า $1 \in J$ และถ้า $y \in B$ แล้ว

$y \leqslant 1$

โดย $(2')$

$y \in J$

$B \subset J$

$J = B$

ตัวอย่าง 4.3.2

ถ้า A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตเปล่า $\mathcal{P}(A)$ ซึ่งเป็นเซตของสับเซตทั้งหมดของ A เป็นพีชคณิตบูลีน แล้วเซต J ซึ่งเป็นเซตของสับเซตทั้งหมดที่เป็นเซตจำกัดของ A เป็นไอเดียล

J จะเป็นพรอพเพอร์ไอเดียลก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตอนันต์

นิยาม

> ให้ $u \in B$, J_u เป็นเซตของ v ทั้งหมดที่ $v \leq u$
> J_u เป็นไอเดียลเรียก J_u ว่า *principal ideal* ซึ่ง *generate* โดย u

ทฤษฎี 4.5

> ให้ β เป็นพีชคณิตบูลีน C เป็นสับเซตใด ๆ ของ β W เป็นผลร่วมของไอเดียล J ทั้งหมดที่มี C เป็นสับเซต $(C \subseteq J)$ แล้ว W จะเป็นไอเดียลที่มี C เป็นสับเซตด้วย และเรากล่าวว่า W ถูกเจนเนอร์เรทโดย C เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $Gen(C)$

พิสูจน์ อย่างน้อยที่สุดจะต้องมีหนึ่งไอเดียลที่มี C เป็นสับเซตคือเซต B เอง

สมมติ x และ $y \in W$

$z \in B$

ถ้า J เป็นไอเดียลใด ๆ ที่มี C เป็นสับเซต แล้ว

$x \in J$ และ $y \in J$

$\therefore x \vee y \in J$

และ $x \wedge z \in J$

ดังนั้น $x \vee y$ และ $x \wedge z \in W$

W เป็นไอเดียล <u>ซ.ต.พ.</u>

<u>ทฤษฎี</u> 4.6

> ให้ C เป็นสับเซตของพีชคณิตบูลีน B แล้วไอเดียล $Gen(C)$ ประกอบด้วยอีลีเมนต์ทั้งหมดในรูป
>
> $(y_1 \wedge x_1) \vee \ldots \vee (y_k \wedge x_k)\ ;\ k \geqslant 1$
>
> โดยที่ $x_1, x_2, \ldots, x_k \in C$
>
> และ $y_1, y_2, \ldots, y_k \in B$

<u>พิสูจน์</u> ให้ D เป็นเซตของอีลีเมนต์ในรูปที่โจทย์กำหนด

ดังนั้น จอยของ 2 อีลีเมนต์ใด ๆ ของ D จะยังคงอยู่ในรูปที่โจทย์กำหนด

นั่นคือ จอยของ 2 อีลีเมนต์ใด ๆ ของ D ยังคงอยู่ใน D

$\therefore$ สำหรับ $y \in B$

$$y \wedge ((y_1 \wedge x_1) \vee \ldots \vee (y_k \wedge x_k)) = (y \wedge (y_1 \wedge x_1)) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee (y \wedge (y_k \wedge x_k))$$

$$= ((y \wedge y_1) \wedge x_1) \vee \ldots \vee ((y \wedge y_k) \wedge x_k)$$

ซึ่งยังคงอยู่ใน D

ดังนั้น D เป็นไอเดียล

ด้วยเหตุที่ $x = 1 \wedge x$

ทุก ๆ $x \in C \rightarrow x \in D$

$\because x_i \in C$

$\therefore y_i \wedge x_i \in J$

ดังนั้น $(y_1 \wedge x_1) \vee (y_2 \wedge x_2) \vee \ldots \vee (y_k \wedge x_k) \in J$

นั่นคือทุก ๆ $(y_1 \wedge x_1) \vee \ldots \vee (y_k \wedge x_k)$ ของ D จะเป็นสมาชิก ของไอเดียล J ใด ๆ ที่มี C เป็นสับเซต

D เป็นผลร่วมของไอเดียลทั้งหมดที่มี C เป็นสับเซต

ซ.ต.พ.

<u>ทฤษฎี</u> 4.7

> ให้ C เป็นสับเซตของพีชคณิตบูลีน β, ไอเดียล $Gen(C)$ ประกอบด้วยเซต E ซึ่งเป็นเซตของ y ทั้งหมดที่
> $y \leq x_1 \vee \ldots \vee x_k$ โดยที่ $x_1, \ldots, x_k \in C$

<u>พิสูจน์</u> ถ้า $y \leq x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}$

และ $z \leq x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_m}$

แล้ว $y \vee z \leq x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_k} \vee x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_m}$

ถ้า $Y \leqslant x_1 \vee \ldots \vee x_k$

และ $v \leqslant y$ แล้ว

$v \leqslant x_1 \vee \ldots$ J r_k

ดังนั้น E เป็นไอเดียล

ถ้า $x \in C$

$\therefore x \leqslant x$

ดังนั้น $x \in E$

แสดงว่าสมาชิกทุกตัวของ E ต้องเป็นสมาชิกของทุก ๆ ไอเดียลที่มี C เป็นสับเซท

$$E = Gen(C)$$

ข.ต.พ.

บทแทรก

> ถ้า C เป็นสับเซตใด ๆ ของพีชคณิตบูลีน β แล้วไอเดียล $Gen(C)$ ซึ่งถูกเจนอนอเรทโดย C จะเป็นพรอพเพอร์ไอเดียล ก็ต่อเมื่อ $x_1 \vee \ldots \vee x_k \neq 1$ สำหรับ $\forall x_1, \ldots, x_k \in C$

พิสูจน์ $\because 1 \leq u$ สมนัยกับ $1 = u$ สำหรับ u ใด ๆ

ด้วยเหตุนี้โดยทฤษฎี 4.7

$1 \in Gen(C)$ ก็ต่อเมื่อ $1 = x_1 \vee \ldots \vee x_k$ สำหรับ

$x_1, \ldots, x_k$ บางตัวใน C

แต่ $1 \in Gen(C)$ ก็ต่อเมื่อ $Gen(C)$ ไม่ใช่พรอพเพอร์ไอเดียล

ช.ต.พ.

ทฤษฎี 4.8

> ถ้า J เป็นไอเดียลของพีชคณิตบูลีน β และถ้า $y \in B$ แล้วไอเดียล $Gen(J \cup \{y\})$ ซึ่งเจนเนอเรทโดย $J \cup \{y\}$ จะประกอบด้วย สมาชิกทั้งหมดในรูป $(z \wedge y) \vee x$ โดยที่ $z \in B$ และ $x \in J$

พิสูจน์ ให้ H เป็นเซตของสมาชิกทั้งหมดในรูป $(z \wedge y) \vee x$ โดยที่ $z \in B, x \in J$

เพราะ $y = (1 \wedge y) \vee 0$

$y \in H$

ถ้า $v \in J$

แล้ว $v = (0 \wedge y) \vee v \in H \rightarrow J \subseteq H$

ดังนั้น $J \cup \{y\} \subseteq H$

$$((z_1 \wedge y) \vee x_1) \vee ((z_2 \wedge y) \vee x_2) = (z_1 \wedge y) \vee (z_2 \wedge y) \vee (x_1 \vee x_2)$$
$$= ((z_1 \vee z_2) \wedge y) \vee (x_1 \vee x_2) \in H$$

และถ้า $w \in J$ แล้ว

$$w \wedge ((z \wedge y) \vee x) = ((w \wedge z) \wedge y) \vee (w \wedge x) \in H$$

$\therefore$ H เป็นไอเดียล

ถ้า I เป็นไอเดียลที่มี $J \cup \{y\}$

และถ้า $x \in J$ แล้ว $(z \wedge y) \vee x \in I$

แล้ว $H \subseteq I$

ช.ต.พ.

บทแทรก

ถ้า J เป็นไอเดียลของพีชคณิตบูลีน β และถ้า $y \in B \sim J$

แล้วไอเดียล $Gen(J \cup \{y\})$ ซึ่งเจนเนอเรทโดย

$J \cup \{y\}$ เป็นพรอพเพอร์ไอเดียลก็ต่อเมื่อ $x \vee y \neq 1$

สำหรับทุก ๆ $x \in J$

นั่นคือก็ต่อเมื่อ $\forall x \in J,\ y' \nleq x$

พิสูจน์ โดยบทแทรกของทฤษฎี 4.7 เราได้ว่า $Gen(J \cup \{y\})$ เป็นพรอพเพอร์-ไอเดียลก็ต่อเมื่อ

$$x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee y \neq 1 \quad \forall x_1, \ldots, x_k \in J$$

(ขอให้สังเกตว่าถ้า $x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee y \neq 1$ แล้ว $x_1 \vee \ldots \vee x_k \neq 1$)

แต่เพราะว่า J เป็นไอเดียล

$$x = x_1 \vee \ldots \vee x_k \in J$$ ด้วย

นั่นคือ $x \vee y \neq 1 \quad \forall x \in J$

ช.ต.พ.

นิยาม

> ให้ M เป็นไอเดียลของพีชคณิตบูลีน β จะเรียก M ว่าแมกซิมอลไอเดียล *(Maximal ideal)* ก็ต่อเมื่อ M เป็นพรอพเพอร์ไอเดียลและไม่มีพรอพเพอร์ไอเดียล J ของ β ซึ่ง $M \subset J \subset \beta$

<u>ทฤษฎี</u> 4.9

> ให้ M เป็นพรอพเพอร์ไอเดียลของพีชคณิตบูลีน β แล้ว M จะเป็นแมกซิมอลไอเดียลก็ต่อเมื่อสำหรับ $y \in B$, $y \in M$ หรือมิฉะนั้นก็ $y' \in M$

<u>พิสูจน์</u> สมมติ M เป็นแมกซิมอลไอเดียล

ถ้า $y \notin M$ (จะต้องแสดงว่า $y' \in M$)

ให้ $I = Gen(M \cup \{y\})$

$\therefore I$ เป็นไอเดียลของ β ซึ่ง $M \subset I$

เนื่องจาก M เป็นแมกซิมอล

$\therefore I = B$

ดังนั้นโดยบทแทรกของทฤษฎี 4.8 ได้ว่า

$y' \leq x$ สำหรับ x บางตัวใน M

เพราะ M เป็นไอเดียล

$y' \in M$

สมมติ $y \in M$ หรือ $y' \in M \quad \forall y \in B$

ถ้า $M \subset J$ โดยที่ J เป็นไอเดียล

ให้ $y \in J \sim M$

เพราะ $y \notin M,\ y' \in M$

$\therefore\ y' \in J$

$\therefore\ 1 = y \vee y' \in J$

$\therefore\ J = B$

M เป็นแมกซิมอลไอเดียล

ช.ต.พ.

นิยาม

> ให้ J เป็นไอเดียลของพีชคณิตบูเลียน β จะเรียก J ว่า พราม *(prime)* ก็ต่อเมื่อสำหรับ x และ y ใดๆใน B $(x \notin J$ และ $y \notin J) \to x \wedge y \notin J$

<u>ทฤษฎี</u> 4.10

> ให้ J เป็นพรอพเพอร์ไอเดียลของพีชคณิตบูเลียน β J จะเป็นแมกซิมอลก็ต่อเมื่อ J เป็นพราม

พิสูจน์ สมมติ J เป็นแมกซิมอล

ถ้า $x \notin J$ และ $y \notin J$ แล้ว

โดยทฤษฎี 4.9 ได้ว่า

$x' \in J$ และ $y' \in J$

$\therefore x' \vee y' \in J$

เพราะ J เป็นพรอพเพอร์พอไอเดียล

$x \wedge y = (x' \vee y')' \notin J$

ดังนั้น J เป็นพราม

สมมติ J เป็นพราม

ให้ $y \in B$

โดยทฤษฎี 4.9 เป็นการเพียงพอที่เราจะแสดงแต่เพียงว่า

$y \in J$ หรือ $y' \in J$

สมมติ $y \notin J$ และ $y' \notin J$

เพราะ J เป็นพราม

$0 = y \wedge y' \notin J$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ซ.ต.พ.

ทฤษฎี 4.11

แมกซิมอลพรินซิพอลไอเดียล คือพรินซิพอลไอเดียล Ju' โดยที่ u เป็นอะตอม

พิสูจน์ สมมติ u เป็นอะตอม

ถ้า $y \in B$ และ $y \notin Ju'$ แล้ว

$y \nleqslant u'$

$\therefore u \nleqslant y'$

เพราะ u เป็นอะตอม

$u \leqslant y$

$y' \leqslant u'$

ie $y' \in Ju'$ (โดยทฤษฎี 4.9)

$\therefore$ Ju' เป็นแมกซิมอล

สมมติ Ju' เป็นแมกซิมอล

ถ้า $v \leqslant u$

เราจะต้องแสดงว่า $v = 0$ หรือ $v = u$

สมมติ $v \neq u$

เพราะ Ju' เป็นแมกซิมอล

$v \in Ju'$ หรือ $v' \in Ju'$

$\therefore v \leqslant u'$ หรือ $v' \leqslant u'$

ie $v \leqslant u'$ หรือ $u \leqslant v$

แต่ $u \nleqslant v$

เพราะ $v \leqslant u$ และ $v \neq u$

$v \leqslant u'$

เพราะ $v \leqslant u$ และ $v \leqslant u'$

$\therefore v \leqslant u \wedge u' = 0$

ดังนั้น $v = 0$

u เป็นอะตอม ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่าง</u> 4.3.3

A เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตเปล่า $\mathcal{P}(A)$ เป็นเซตของสับเซตทั้งหมดของ A แล้ว อะตอมคือ ซิงเกิลตัน $\{a\}$ โดยที่ $a \in A$ ด้วยเหตุนี้ แมกซิมอลพรินซิพอลไอเดียล ประกอบด้วยสับเซต X ทั้งหมดของ $A \ni$ $a \notin X$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. พิสูจน์ทฤษฎี 4.4 ข้อ 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26

2. จงหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมี *(existence)* ของคำตอบ และหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

   ก) $u \vee z = w$

   ข) $u \wedge z = u \wedge w$

3. ถ้า C เป็นสับเซตของพีชคณิตบูลีน β และถ้าไอเดียล J ซึ่งมี C เป็นสับเซตเป็นสับเซตของทุก ๆ ไอเดียลที่มี C เป็นสับเซตแล้วจงแสดงว่า J เป็นไอเดียล $Gen(C)$

4. ถ้า J เป็นไอเดียลของพีชคณิตบูลีน β และ $y \in B$ จงพิสูจน์ว่า $Gen\ (J \cup \{y\})$ เป็น *proper ideal* ก็ต่อเมื่อ $y' \in J$

5. เราจะเรียกพีชคณิตบูลีน β ว่า *simple* ก็ต่อเมื่อ $\{0\}$ เป็น *proper* ไอเดียล จงพิสูจน์ว่า β เป็น *simple* ก็ต่อเมื่อ $B = \{0,1\}$

6. ถ้า $\mathcal{R} = (R, +, \times, 0)$ เป็น *commutative ring* แล้วจะเรียก $\Phi \neq J \subsetneq R$ ว่า *ring-theoretic ideal* ก็ต่อเมื่อ

   1. $(x \in J \ \&\ y \in J) \rightarrow x - y \in J$

   2. $(x \in J \ \&\ z \in R) \rightarrow x \times z \in J$

   จงพิสูจน์ว่าถ้า J เป็นสับเซตของพีชคณิตบูลีน $\beta = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ และ $\mathcal{R} = (B, +, \wedge, 0)$ เป็นบูลีนริง แล้ว J จะเป็นไอเดียลของ β ก็ต่อเมื่อ J เป็น *ring theoretic ideal* ของ $\mathcal{R}$

7. จงแสดงว่า ถ้า J เป็นไอเดียลของพีชคณิตบูลีน β แล้ว $x + y \in J$ ก็ต่อเมื่อมี z บางตัวใน J ซึ่ง $x \vee z = y \vee z$